MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

54. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STANDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

54. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1951

DIETERICHSCHE UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI W. FR. KAESTNER, GÖTTINGEN
PRINTED IN GERMANY

Inhalt des 54. Bandes.

Seite

COHEN, I. S. und KAPLANSKY, I., Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules 97

BOL, G., Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation 141

BOSE, N. N., On some integrals involving the hypergeometric function ${}_2F_1(a, b; c; -x)$ 160

DIRAC, G. A., Note on the colouring of graphs 347

FORSTER, H., Über das asymptotische Verhalten einer Besselschen Funktion längs einer Welle der durch $z = J_\lambda(x)$ im x-λ-z-Raum definierten Wellenfläche 217

GOLDMAN, O., Hilbert Rings and the Hilbert Nullstellensatz 136

HEUSER, P., Über eine Tschebyscheffsche Eigenschaft der Faberschen Polynome 339

JURKAT, W., Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln 262

JURKAT, W., Zur Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes 343

KLINGENBERG, W., Zur affinen Differentialgeometrie I 65

KLINGENBERG, W., Zur affinen Differentialgeometrie II 184

KNESER, M., Abhängigkeit von Funktionen 34

KNOPP, K., Über die Konvergenzabszisse des Laplace-Integrals 291

KRULL, W., Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie 354

LORENZEN, P., Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis 1

LORENZEN, P., Maß und Integral in der konstruktiven Analysis 275

LÖBELL, F., Der „Kern" als Basis komplexer Vektoren 129

LYRA, G., Über eine Modifikation der Riemannschen Geometrie 52

NEUMER, W., Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn 254

NEUMER, W., Berichtigung zu der Arbeit „Einige Eigenschaften und Anwendungen der δ- und s-Zahlen" in Bd. 53 dieser Zeitschrift 388

NICKEL, K., Lösung eines Integralgleichungssystems aus der Tragflügeltheorie 81

RÉDEI, L., Einfacher Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes 25

ROSE, A., The degree of completeness of a partial system of the 2-valued Propositional Calculus 181

RUND, H., Über die Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen 115

Schmetterer, L., Bemerkungen zur Multiplikation unendlicher Reihen . . 102

Sprague, R., Über die eindeutige Bestimmbarkeit der Elemente einer endlichen Menge durch zweifache Einteilung 27

Stuloff, N., Absolut konvergente verallgemeinerte Dirichletsche Reihen im Reellen 329

Szele, T., Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen 168

Ullrich, E., Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten . . 297

Weston, J. D., Inequalities for Riemann-Stieltjes Integrals 272

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 1, S. 1—24 (1951).

Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis.

Von

Paul Lorenzen in Bonn.

Die klassische Analysis hat bekanntlich nicht nur Arithmetik und Logik zur Grundlage, sondern auch die naive Mengenlehre. Die reellen Zahlen werden durch eine Gleichheitsrelation zwischen Mengen bzw. Folgen — z. B. als unendliche Dezimalbrüche — von rationalen Zahlen definiert. Die Grundbegriffe Menge und Funktion werden nicht mathematisch definiert, sondern nur durch Beispiele und umgangssprachliche Umschreibungen (mit Worten wie Zusammenfassung, Vorschrift, Zuordnung, Gesetz, ...) eingeführt, oft in der Meinung, daß dieses unvermeidlich sei.

Auf die Kritik an der naiven Mengenlehre hin hat man versucht, diese durch eine Axiomatik zu stützen — in mißverstandener Analogie zur Geometrie. Mit geeigneten Axiomen läßt sich nun zwar alles beweisen, aber nichts begründen.

Die Aufgabe einer Konstruktion von reellen Zahlen ist m. W. erstmalig von H. Weyl (Das Kontinuum, 1918) gelöst worden. Weyl benutzt allerdings die arithmetischen und logischen Regeln ohne Begründung, insbesondere auch das tertium non datur. Aufgrund der Brouwer'schen Kritik an dieser Regel ist dann die intuitionistische Analysis entstanden, in der durch das Verbot des tertium non datur und die Beschränkung auf einen sehr engen Funktionsbegriff die Fundamentalsätze der klassischen Analysis nicht mehr gelten.

Nach einer konstruktiven Begründung [1]) von Arithmetik und Logik (einschl. tertium non datur) läßt sich jedoch auch eine Konstruktion von reellen Zahlen durchführen, für die alle Fundamentalsätze der klassischen Analysis gelten. Darin ist die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis enthalten.

Es seien irgendwelche Zeichen $x, y, \ldots$, genannt Individuen, konstruiert (z. B. die sog. natürlichen Zahlen, die Kardinalzahlen $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$.). Die erste Aufgabe besteht darin, eine Sprache über $x, y, \ldots$ zu konstruieren. In der naiven Theorie greift man dazu auf die Umgangssprache zurück und entnimmt aus ihr, daß es Relationen $\varrho, \sigma, \ldots$ (auch Begriffe oder Eigenschaften genannt) gibt, so daß z. B. $\varrho(x), \sigma(x, y), \ldots$ Aussagen sind. Wir benutzen statt dessen folgende

[1]) Vgl. P. Lorenzen, Konstruktive Begründung der Mathematik. Mathematische Zeitschrift 53 (1950), S. 162—202.

Konstruktion, die hier, der Einfachheit halber, nur für einstellige Relationen formuliert sei (vgl. § 1).

(1) Ist ϱ eine Relation, dann sei $\varrho(x)$ eine Aussage.

(2) Sind $A, B, A(x)$ Aussagen, dann seien

$A \wedge B$	gelesen: A und B
$A \vee B$	A oder B
$A \to B$	A dann B
$A \leftrightarrow B$	A wenn und dann B
$\neg A$	nicht A
$\wedge_x A(x)$	für alle x: $A(x)$
$\vee_x A(x)$	für ein x: $A(x)$

Aussagen.

(3) Falls $A_1, \ldots, A_\varkappa$ Aussagen sind, wenn ϱ eine Relation ist, dann sei

$$\mathsf{I}_\varrho(A_1 \to \varrho(x_1), \ldots, A_\varkappa \to \varrho(x_\varkappa))$$

(gelesen: Die durch $A_1 \to \varrho(x_1), \ldots, A_\varkappa \to \varrho(x_\varkappa)$ induktiv definierte Relation ϱ) eine Relation.

Nach (3) ist eine Relation ϱ nichts anderes als ein System von Regeln

$$\begin{array}{l} A_1 \to \varrho(x_1) \\ \vdots \\ A_\varkappa \to \varrho(x_\varkappa) \end{array}$$

zur Ableitung von Aussagen der Form $\varrho(x)$. Da die logischen Regeln (zur Ableitung von Aussagen, die nach (2) zusammengesetzt sind) widerspruchsfrei sind, ist auch die Hinzunahme solcher Regeln für ϱ widerspruchsfrei — denn hiernach sind ja nur Aussagen der Form $\varrho(x)$ ableitbar.

Mit dieser Sprache über $x, y, \ldots$ sind jetzt Mengen und Funktionen von $x, y, \ldots$ zu definieren. Wir beschränken uns hier wieder auf den einstelligen Fall (vgl. § 1).

(M) Sind $A_1(x)$, $A_2(x)$ Aussagen, so daß für alle x

$$A_1(x) \leftrightarrow A_2(x)$$

gilt, dann sei $\mathsf{M}_x A_1(x) = \mathsf{M}_x A_2(x)$.

Die Zeichen $\mathsf{M}_x A(x)$ (gelesen etwa: die Menge der x mit $A(x)$) nennen wir Mengen. Für $M = \mathsf{M}_x A(x)$ sei $x \in M$, wenn $A(x)$.

(T) Gilt für alle x_1, x_2

$$A(x_1) \wedge A(x_2) \to x_1 = x_2,$$

dann sei $\mathsf{T}_x A(x) = x_0$, wenn $A(x_0)$.

Die Zeichen $\mathsf{T}_x A(x)$ (gelesen etwa: dasjenige x mit $A(x)$) nennen wir Terme. Die Terme bezeichnen wir ebenfalls mit $x, y, \ldots$, Terme mit freien Variablen entsprechend z. B. mit $x(x_0)$, $y(x_1, x_2)$ — diese entstehen, wenn $A(x)$ außer x noch andere freie Variable enthält.

(**Φ**) Sind $y_1(x)$, $y_2(x)$ Terme, so daß für alle x

$$y_1(x) = y_2(x)$$

gilt, dann sei $\Phi_x y_1(x) = \Phi_x y_2(x)$.

Die Zeichen $\Phi_x y(x)$ (gelesen etwa: $y(x)$ als Funktion von x) nennen wir Funktionen. Für $f = \Phi_x y(x)$ sei $f(x_0) = y_0$, wenn $y(x_0) = y_0$.

Diese drei Definitionen werden in der klassischen Analysis dauernd (mehr oder weniger bewußt) benutzt. Der hier vorgeschlagene Funktionsbegriff hat mit dem älteren Eulerschen Funktionsbegriff gemeinsam, daß jede Funktion durch einen Term (bei Euler: analytischer Ausdruck) gegeben ist — er hat aber andererseits die „Weite" des Dirichletschen Funktionsbegriffes, da mit jeder Aussage $A(x)$, durch die x eindeutig bestimmt ist, ein Term gebildet werden kann. Insbesondere lassen sich alle rekursiven Funktionen mithilfe von — nach (3) konstruierten — Relationen erhalten.

Mit der Sprache über die rationalen Zahlen erhält man jedoch noch nicht die klassische Analysis, denn — definiert man die reellen Zahlen durch eine Gleichheitsrelation zwischen Mengen von rationalen Zahlen (vgl. § 2) — so sind noch keine Mengen und Funktionen von reellen Zahlen (sondern nur solche von rationalen Zahlen) definiert. Dazu muß die Konstruktion einer Sprache wiederholt werden: zunächst die Sprache über die bisherigen Aussagen, Mengen, Funktionen und reellen Zahlen (Individuen der 1. Schicht), dann wieder eine Sprache über die so erhaltenen Individuen der 2. Schicht usw. (Diese Schichten sind nicht mit den Stufen der naiven und axiomatischen Mengenlehre zu verwechseln.)

Die Vereinigung aller Schichten endlicher Höhe nennen wir die 0-te Hyperschicht. Die Konstruktion einer Sprache hierüber liefert weitere Hyperschichten, deren Individuen wir Hyperaussagen, Hypermengen, Hyperfunktionen und hyperreelle Zahlen nennen. Beschränkt man sich jedoch auf Schichten, so wird das klassische Vollständigkeitsprinzip:

„Zu jeder Menge von reellen Zahlen gibt es eine reelle Zahl als untere Grenze"

beweisbar, obwohl es Hypermengen gibt, deren untere Grenze eine hyperreelle Zahl ist. Durch geeignete Ausschließung der Hyperschichten erhalten wir in §§ 3—6 alle Fundamentalsätze der klassischen Analysis, wie sie in den modernen Lehrbüchern benutzt werden (vgl. etwa Haupt-Aumann, Differential- u. Integralrechnung I). Es ist demnach nicht die konstruktive Analysis, die gegenüber der klassischen Analysis „zu eng" ist, sondern die Abgeschlossenheit, die die klassische Analysis besitzt, entsteht gerade durch eine Beschränkung der Konstruktionsmittel.

Besonders wichtig ist für die konstruktive Theorie die Definition des Begriffes unendlich. Es ist üblich geworden, den Begriff endlich — in Analogie zu abzählbar — abhängig von der Sprache zu machen, indem man definiert:

eine Menge M heißt endlich bzw. abzählbar, wenn es eine umkehrbare Abbildung (d. h. eine gewisse zweistellige Relation) von M auf einen echten bzw. unechten Abschnitt der identischen Folge der Kardinalzahlen 1, 2, 3, ... gibt.

Hiernach könnte eine Menge endlich relativ zu einer Sprache, unendlich (d. h. nicht endlich) relativ zu einer anderen Sprache sein. Die Relativität des Endlichkeitsbegriffes ist aber nur scheinbar. Konstruiert man nämlich zunächst Systeme $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ von Individuen $x, y, \ldots$ nach den Regeln

1) x sei ein System,

2) ist $\bar{x}$ ein System, dann sei $\bar{x}, y$ ein System,

dann sind die endlichen Mengen M gerade diejenigen, zu denen es ein System $\bar{x} = x_1, \ldots, x_\varkappa$[2]) mit

$$M = \mathsf{M}_y(y = x_1 \smile \cdots \smile y = x_\varkappa)$$

gibt. Wir schreiben dann $M = \{x_1, \ldots, x_\varkappa\}$. (Wir behalten die suggestive Schreibweise $x_1, \ldots, x_\varkappa$ für Systeme ($\varkappa$-tupel) trotz ihrer Ungenauigkeit bei.)

Die Relativität des Abzählbarkeitsbegriffes ist dagegen nicht scheinbar, obwohl die naive Theorie dies leugnet. Individuen, die nach einem System von Regeln konstruierte Zeichen sind, sind stets höchstens abzählbar in der Sprache über die benutzten Einzelzeichen — sie können aber überabzählbar in einer engeren Sprache sein.

In unserer Konstruktion ist jede Schicht abzählbar, dagegen z. B. die Hypermenge aller reellen Zahlen überabzählbar. Als triviale Konsequenz der Abzählbarkeit aller Schichten gilt das Auswahlprinzip (vgl. § 1) — dessen Problematik sich damit in Nichts auflöst: zu jeder Menge N von nichtleeren Mengen M gibt es eine Funktion f über N mit $f(M) \in M$.

Durch die Relativität der Abzählbarkeit verliert die naive Theorie der transfiniten Kardinalzahlen zwar ihre eigentliche Bedeutung, die Theorie der II. Zahlklasse wird davon jedoch nicht betroffen. Die zugehörige konstruktive Theorie, die ja auch für die Analysis wichtig ist, soll in einer späteren Arbeit entwickelt werden.

---

[2]) Wir benutzen $\varkappa, \lambda, \ldots$ als Variable für Indizes. Diese werden meistens Kardinalzahlen sein. Die Benutzung von Systemen ist genau so finit (im Hilbertschen Sinne) wie die Benutzung von Kardinalzahlen.

Statt $x_1, \ldots, x_\varkappa$ schreiben wir gelegentlich auch $x_1, x_2, \ldots$. Wir benutzen dann drei Punkte ... für die endlich vielen folgenden Glieder. Bei Folgen (s. u.) benutzen wir dagegen fünf Punkte .....

§ 1.

Relationen, Aussagen und Mengen, Terme und Funktionen.

1) Wir benutzen $k, l \ldots$ (d. h. k und l, evtl. mit Indizes) als Variable für die Kardinalzahlen $1, 1+1, \ldots\ldots$ Der Variabilitätsbereich von $k, l, \ldots$ ist also definiert durch

$$\mathfrak{R}_1) \quad 1$$
$$\mathfrak{R}_2) \quad k \to k+1.$$

$\to$ dient zur Mitteilung der Konstruktionsregel (gelesen etwa: dann). Es ist zu unterscheiden von der zweiwertigen Implikation $A \to B$, die durch $\neg A \vee B$ (nicht A oder B) definiert wird.

Die Kardinalzahlen und die Variablen $k, l, \ldots$, so wie die hieraus nach $\mathfrak{R}_2$ entstehenden Zeichen (z. B. $k+1+1$), nennen wir Kardinalzahl-Terme.

Als Variable für diese benutzen wir ebenfalls $k, l, \ldots$, wobei im Term vorkommende Variable in Klammern hinzugefügt werden können (z. B. $l(k)$ für $k+1+1$).

Die Gleichheitsrelation $=$ definieren wir für Kardinalzahlen durch

$$1 = 1, \quad k = l \to k+1 = l+1,$$

entsprechend $\neq$ durch

$$k+1 \neq 1, \quad 1 \neq k+1, \quad k \neq l \to k+1 \neq l+1,$$

die Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ durch

$$k_1 + k_2 = l \to k_1 + (k_2 + 1) = l + 1,$$
$$k \cdot 1 = k, \quad k_1 \cdot k_2 = l \wedge l + k_1 = k_3 \to k_1 \cdot (k_2 + 1) = k_3.$$

Bei letzteren handelt es sich um 3-stellige Relationen, so daß zunächst z. B. $+(k_1, k_2, k_3)$ statt $k_1 + k_2 = k_3$ geschrieben werden müßte.

Da aber

$$+(k_1, k_2, k_3') \wedge +(k_1, k_2, k_3'') \to k_3' = k_3''$$

beweisbar ist, können die Zeichen $k_1 + k_2$ — alles gilt entsprechend für $k_1 \cdot k_2$ — als Terme behandelt werden, d. h. die Benutzung des Gleichheitszeichens ist widerspruchsfrei. In dieser Schreibweise erübrigt es sich $+(k, 1, k+1)$ zu definieren, da $k+1 = k+1$ über $l = l$ beweisbar ist.

Mit $\varrho, \sigma \ldots$ als Variable für Relationen (vgl. Einleitung) haben diese Definitionen die Form

$$A_1 \to \varrho(k_{11}, \ldots, k_{1\lambda})$$
$$\vdots$$
$$A_\varkappa \to \varrho(k_{\varkappa 1}, \ldots, k_{\varkappa\lambda}),$$

wobei $A_1, \ldots, A_\varkappa$ Aussagen sind, die aus den einfachen Aussagen (einschl. $\varrho(k_1, \ldots, k_\lambda)$) mithilfe der logischen Verknüpfungen $\to$, $\wedge$ $\wedge_k$, $\vee$, $\vee_k$, $\neg$ zusammengesetzt sind.

Einige der $A_1, \ldots, A_\varkappa$ können fehlen; dann lassen wir auch $\to$ weg. Für jedes solches System von Regeln bilden wir das Zeichen

$$\mathfrak{l}_\varrho (A_1 \to \varrho(k_{11}, \ldots, k_{1\lambda}), \ldots, A_\varkappa \to \varrho(k_{\varkappa 1}, \ldots, k_{\varkappa\lambda}))$$

und nennen es eine Relation.

Das System der Regeln nennen wir die induktive Definition dieser Relation.

Schon die Zeichen $=, \neq, +, \cdot$ stehen hiernach nur zur Abkürzung, nämlich z. B. $=$ für

$$\mathfrak{l}_\varrho (\varrho(1, 1), \varrho(k, l) \to \varrho(k+1, l+1)),$$

daher auch $1 = 1$ für: $= (1, 1)$, d. h.

$$\mathfrak{l}_\varrho (\varrho(1, 1), \varrho(k, l) \to \varrho(k+1, l+1))\,(1, 1).$$

Ist ϱ nach seiner Definition eine λ-stellige Relation, so nennen wir $\varrho(k_1, \ldots, k_\lambda)$ eine einfache Aussage im Gegensatz zu den mithilfe der logischen Operatoren zusammengesetzten Aussagen.

Für Aussagen verwenden wir die Variablen $A, B, \ldots$. In einer Aussage vorkommende Terme werden durch Klammern angefügt; z. B. steht $A(k)$ für eine Aussage, in der k frei vorkommt (d. h. nicht durch die Operatoren $\wedge_k$, $\vee_k$ gebunden). Wichtig ist, daß bei Zusammensetzung der Aussagen nicht Operatoren wie $\wedge_\varrho$, $\vee_\varrho$, $\wedge_A$, $\vee_A$ verwendet werden, z. B. wäre

$$\mathfrak{l}_\varrho (\wedge_\sigma (\sigma(k) \leftrightarrow \sigma(l)) \to \varrho(k, l))$$

keine Relation. Selbst wenn die Zulassung dieser Operatoren widerspruchsfrei sein sollte, wäre sie hier zwecklos, denn der Variabilitätsbereich der $\varrho, \sigma, \ldots$ bzw. $A, B, \ldots$ soll ja gerade erst konstruiert werden.

Neben den Variablen $k, l \ldots$ führen wir noch Variable $\bar{k}, \bar{l}, \ldots$ für Systeme von Kardinalzahlen (vgl. Einleitung) ein. Mit diesen lassen sich z. B. Aussagen $\varrho(\bar{k})$ durch

$$\varrho(1)$$

$$\varrho(1, \ldots, k) \to \varrho(1, \ldots, k, k+1)$$

definieren. (Naiv würde man stattdessen wohl von der Menge $\{(1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots\}$ reden.)

2) Wir gehen jetzt von den Kardinalzahlen zu den rationalen Zahlen über — etwa auf dem üblichen Wege, der zunächst die ganzen Zahlen $k - l$ konstruiert (für diese benutzen wir die Variablen $p, q, \ldots$) und dann die rationalen Zahlen $\frac{p}{k}$ (Variable $r, s, \ldots$).

Nach Definition der Gleichheit

$$\frac{k_1 - k_2}{l} = \frac{k_1' - k_2'}{l'} \leftrightarrow k_1 l' + k_2' l = k_1' l + k_2 l'$$

heißt jede Aussage $A(k_1, k_2, l)$ mit

$$\frac{k_1 - k_2}{l} = \frac{k_1' - k_2'}{l'} \wedge A(k_1, k_2, l) \to A(k_1', k_2', l')$$

eine ‚Aussage über rationale Zahlen'.

Wir definieren Addition und Multiplikation, und auch die Ordnungsrelationen $<$, $\leqq$, $>$, $\geqq$ wie üblich für rationale Zahlen.

3) Die rationalen Zahlen $r, s, \ldots$ und Systeme $\bar{r}, \bar{s}, \ldots$ von rationalen Zahlen nennen wir jetzt ‚Individuen der 0. Schicht'. Unter ihnen kommen die Kardinalzahlen $k = \frac{k' + 1 - 1}{1}$ und die ganzen Zahlen $p = \frac{p}{1}$ vor.

Die Individuen der 0. Schicht und alle bisher definierten Aussagen, sowie Systeme von diesen, nennen wir ‚Individuen der 1. Schicht'.

Entsprechend zu den Regeln, nach denen wir die Aussagen der 1. Schicht über den rationalen Zahlen konstruiert haben, konstruieren wir jetzt ‚Aussagen der 2. Schicht' über den Individuen der 1. Schicht.

Zu den Relationen der 2. Schicht gehört die (semiotische) Gleichheit $\equiv$ zwischen den Individuen der 1. Schicht.

Da die Aussagen der 1. Schicht nach einem System von Regeln konstruierte Zeichen sind, gibt es unter den Relationen der 2. Schicht ferner eine ‚Abzählung', d. h. eine Relation ϱ, so daß für Aussagen A der 1. Schicht gilt:

$$\vee_k \varrho(A, k)$$

$$\vee_A \varrho(A, k)$$

und außerdem $\varrho(A, k)$ eindeutig bzgl. A und k ist, d. h.

$$\varrho(A_1, k) \wedge \varrho(A_2, k) \to A_1 \equiv A_2$$

$$\varrho(A, k_1) \wedge \varrho(A, k_2) \to k_1 = k_2.$$

Auf die — etwas umständliche — Definition dieser Abzählung können wir hier verzichten.

Unter den Aussagen der 2. Schicht kommen nicht nur Aussagen über Aussagen der 1. Schicht vor, sondern auch wieder Aussagen über rationale Zahlen. Bei der Zusammensetzung von Aussagen der 2. Schicht sind neben den Operatoren $\wedge_k$, $\vee_k$ (bzw. $\wedge_{\bar{k}}$, $\vee_{\bar{k}}$) auch $\wedge_A$, $\vee_A$, $\wedge_\varrho$, $\vee_\varrho$ zugelassen, wenn hierin A und ϱ auf die 1. Schicht beschränkt werden. Wir schreiben dann $\bigwedge_1 A$, $\bigvee_1 A$, $\bigwedge_1 \varrho$, $\bigvee_1 \varrho$ — dadurch vermeiden wir die Einführung von verschiedenen Variablen für die einzelnen Schichten.

Nennen wir wieder die Individuen der 1. Schicht und die Aussagen der 2. Schicht, nebst Systemen von diesen, ‚Individuen der 2. Schicht', so lassen sich die Aussagen der 3. Schicht konstruieren, usw. Wir bezeichnen die Schichten mit $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, ... In mengentheoretischer

Formulierung gilt also $\mathfrak{S}_0 < \mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2 < \cdots\cdots$. $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ entsteht aus $\mathfrak{S}_\varkappa$, indem Systeme von Aussagen der $\varkappa+1$-ten Schicht über den Individuen der $\varkappa$-ten Schicht konstruiert werden.

4) Wir haben damit eine Konstruktionsregel für Individuen beliebiger (endlicher) Schicht. Alle hiernach zu konstruierenden Zeichen nennen wir auch ‚Individuen der 0. Hyperschicht'. Mengentheoretisch ist die 0. Hyperschicht also die Vereinigung aller Schichten. Entsprechend zu der Konstruktion der 1. Schicht über der 0. Schicht läßt sich jetzt die 1. Hyperschicht über der 0. Hyperschicht konstruieren — und anschließend können auch höhere Hyperschichten konstruiert werden. Wie weit die Konstruktion fortgesetzt wird, ist für uns unwesentlich, da wir die Konstruktion nie als „abgeschlossen" betrachten werden, d. h. Redeteile wie „für alle Hyperschichten" nie in Prämissen benutzen werden. Die Individuen der Hyperschichten sind Systeme von ‚Hyperaussagen'.

Während jede Schicht abzählbar ist (es gibt eine Abzählungsrelation in der nächsthöheren Schicht), ist schon die 0. Hyperschicht nicht mehr abzählbar, sondern nur hyperabzählbar, d. h. es gibt nur eine abzählende Hyperrelation, aber keine abzählende Relation.

5) Wir benutzen weiterhin $A, B, \ldots$ als Variable für Aussagen und Hyperaussagen. Wenn es erforderlich ist, werden wir den Variabilitätsbereich im Text hinzufügen. Bei den Quantoren bedeute

$\bigwedge_\varkappa A$ für alle Aussagen A der $\varkappa$-ten Schicht,

$\bigvee_\varkappa A$ für eine Aussage A der $\varkappa$-ten Schicht.

Unter den Aussagen $A(x)$ (mit einer freien Variablen x — z. B. k_0, r_1 oder B) sind besonders diejenigen wichtig, die eindeutig bzgl. x sind, d. h.

$$A(x_1) \wedge A(x_2) \to x_1 = x_2,$$

also

$$A(x_0) \to \wedge_x (A(x) \to x = x_0).$$

Schreiben wir $B(\mathsf{T}_x A(x))$ statt $\wedge_x (A(x) \to B(x))$, so erhalten wir

$$A(x_0) \to \mathsf{T}_x A(x) = x_0$$

und außerdem

$$\mathsf{T}_x A(x) = x_0 \wedge B(x_0) \to B(\mathsf{T}_x A(x)).$$

Gilt $\vee_x A(x)$ so sagen wir, daß $\mathsf{T}_x A(x)$ ‚existiert', — wir schreiben dann $\exists\, \mathsf{T}_x A(x)$.

Unter dieser Voraussetzung gilt auch

$$\mathsf{T}_x A(x) = x_0 \wedge B(\mathsf{T}_x A(x)) \to B(x_0).$$

Wir behandeln daher die ‚Terme' $\mathsf{T}_x A(x)$ (vgl. Einleitung) wie die Individuen des Variabilitätsbereiches von x.

Nach dem Prinzip der kleinsten Zahl gilt für Aussagen über Kardinalzahlen

$$A(k) \rightarrow \vee_{k_0}(A(k_0) \wedge \wedge_k (A(k) \rightarrow k_0 \leqq k)).$$

Da

$$A(k_0) \wedge \wedge_k (A(k) \rightarrow k_0 \leqq k)$$

eindeutig bzgl. k_0 ist, folgt aus $\vee_k A(k)$, daß $\mathsf{T}_{k_0}(A(k_0) \wedge \wedge_k (A(k) \rightarrow k_0 \leqq k))$ existiert. Wir bezeichnen diesen Term kurz durch $\mathop{\mathsf{T}}_{0}_{k} A(k)$ (gelesen etwa: das kleinste k mit $A(k)$).

6) Wir definieren jetzt Mengen und Funktionen (vgl. Einleitung). Gilt für zwei Aussagen $A_1(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ und $A_2(x_1, \ldots, x_\varkappa)$

$$\wedge_{x_1, \ldots, x_\varkappa}(A_1(x_1, \ldots, x_\varkappa) \leftrightarrow A_2(x_1, \ldots, x_\varkappa)),$$

so schreiben wir

$$\mathsf{M}_{x_1, \ldots, x_\varkappa} A_1(x_1, \ldots, x_\varkappa) = \mathsf{M}_{x_1, \ldots, x_\varkappa} A_2(x_1, \ldots, x_\varkappa).$$

Die Zeichen $\mathsf{M}_{x_1, \ldots, x_\varkappa} A(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ heißen $\varkappa$-stellige Mengen.

Als Variable für Mengen benutzen wir $M, N, \ldots$; für

$$M = \mathsf{M}_{x_1, \ldots, x_\varkappa} A(x_1, \ldots, x_\varkappa)$$

sagen wir, daß die Aussage $A(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ die Menge M ‚darstelle'. Wir schreiben $x_1, \ldots, x_\varkappa \in M$ statt $A(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ und $x_1, \ldots, x_\varkappa \overline{\in} M$ statt $\neg A(x_1, \ldots, x_\varkappa)$.

Gilt für zwei Terme $y_1(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ und $y_2(x_1, \ldots, x_\varkappa)$

$$\wedge_{x_1, \ldots, x_\varkappa}(y_1(x_1, \ldots, x_\varkappa) = y_2(x_1, \ldots, x_\varkappa)),$$

so schreiben wir $\Phi_{x_1, \ldots, x_\varkappa} y_1(x_1, \ldots, x_\varkappa) = \Phi_{x_1, \ldots, x_\varkappa} y_2(x_1, \ldots, x_\varkappa)$. Die Zeichen $\Phi_{x_1, \ldots, x_\varkappa} y(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ heißen $\varkappa$-stellige Funktionen. Als Variable für Funktionen benutzen wir $f, g, \ldots$; für $f = \Phi_{x_1, \ldots, x_\varkappa} y(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ schreiben wir $f(x_1, \ldots, x_\varkappa) = y_0$ statt $y(x_1, \ldots, x_\varkappa) = y_0$. Wir sagen, daß der Term $y(x_1, \ldots, x_\varkappa)$ die Funktion f ‚darstelle'.

Aussagen bzw. Terme verschiedener Schichten können dieselbe Menge bzw. Funktion darstellen. Eine Menge bzw. Funktion, die durch eine Aussage bzw. einen Term der Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ dargestellt wird, nennen wir ‚zu $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehörig'.

7) Von den induktiven Definitionen von Relationen werden wir im folgenden nur noch die induktiven Definitionen von Funktionen, d. h. genauer von Relationen $\varrho(x_1, \ldots, x_\varkappa)$, die für mindestens eine Stelle eindeutig sind, benutzen.

Ist $A(x)$ eindeutig und gilt $\exists\, \mathsf{T}_x A(x)$ (d. h. $\vee_x A(x)$), so folgt

$$A(x_0) \leftrightarrow \mathsf{T}_x A(x) = x_0,$$

ferner

$$\mathsf{T}_x A(x) = x_0 \leftrightarrow \vee_x (A(x) \wedge x = x_0)$$

$$\mathsf{T}_x A(x) \neq x_0 \leftrightarrow \vee_x (A(x) \wedge x \neq x_0).$$

Wegen $x = x_0 \vee x \neq x_0$ folgt auch

$$\mathsf{T}_x A(x) = x_0 \vee \mathsf{T}_x A(x) \neq x_0.$$

Durch die Beschränkung auf induktive Funktionen können wir daher das tertium non datur stets anwenden (vgl. [1]).

Ist $\varrho(x_1, \ldots, x_\varkappa, x)$ eindeutig bzgl. x und setzen wir

$$f = \Phi_{x_1, \ldots, x_\varkappa} \mathsf{T}_x \varrho(x_1, \ldots, x_\varkappa, x),$$

so gilt

$$f(x_1, \ldots, x_\varkappa) = x \leftrightarrow \varrho(x_1, \ldots, x_\varkappa, x).$$

Die induktive Definition von ϱ läßt sich dann als ein System von Gleichungen für f schreiben. Am wichtigsten sind die rekursiven Definitionen für Funktionen von Kardinalzahlen.

8) Für den Spezialfall von Termen $y(k_1, \ldots, k_\varkappa)$, in denen Kardinalzahlen vorkommen, schreiben wir auch $y^{(k_1, \ldots, k_\varkappa)}$. Die Funktionen $\Phi_k y^{(k)}$ nennen wir Folgen. Wir benutzen für diese die — etwas ungenaue — Bezeichnung y^*, z. B.

$$x_0^* = \Phi_k x_0^{(k)}$$

oder auch [3])

$$x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots\ldots$$

Den Wertbereich $\mathsf{M}_x(\vee_k x^{(k)} = x)$ bezeichnen wir kurz durch $\mathsf{M}(x^*)$, oder auch durch $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\ldots\}$. Eine Folge x^* heißt schlicht, wenn

$$k \neq l \rightarrow x^{(k)} \neq x^{(l)}.$$

Für eine schlichte Folge x^* ist $\mathsf{M}(x^*)$ unendlich (vgl. Einleitung).

9) Aus der Abzählbarkeit jeder Schicht folgt, daß jede Menge M (aber keine Hypermenge) abzählbar ist. Gehört M zur Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ und ist ϱ eine Abzählung von $\mathfrak{S}_\varkappa$, dann erhält man eine Abzählung von M, indem zunächst eine Kardinalfolge k_0^* (d. h. eine echt aufsteigende Folge von Kardinalzahlen $l_1 < l_2 \rightarrow k_0^{(l_1)} < k_0^{(l_2)}$) definiert wird durch

$$k_0^{(1)} = \mathsf{T}_0^k \vee_x^x (\varrho(x, k) \wedge x \in M)$$

$$k_0^{(l+1)} = \mathsf{T}_0^k \vee_x^x (\varrho(x, k) \wedge x \in M \wedge k > k_0^{(l)}).$$

Durch $\sigma(x, l) \leftrightarrow \varrho(x, k_0^{(l)})$ wird dann eine Abzählung von M definiert.

Noch einfacher ergibt sich das Auswahlprinzip:

Zu jeder Menge N von Mengen von nichtleeren Mengen M gibt es eine Funktion f über N mit $f(M) \in M$.

Gehört N zur Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$, dann auch alle $M \in N$ und alle $x \in M$ für $M \in N$. Ist ϱ eine Abzählung von $\mathfrak{S}_\varkappa$, dann ist daher

$$\Phi_M \mathsf{T}_x \varrho(x, \mathsf{T}_0^k \vee_x^x (\varrho(x, k) \wedge x \in M))$$

eine Auswahlfunktion. (In naiver Redeweise: das in der Abzählung ϱ erste Element von M liefert als Funktion von M eine Auswahlfunktion.)

[3]) Hier stehen fünf Punkte, als ob unendlich viele Glieder folgen sollten.

10) Aus der Konstruktion der Schichten folgt, daß jede Schicht $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ Aussagen enthält, die nicht auch schon in $\mathfrak{S}_\varkappa$ liegen. Erst das übliche ‚Diagonalverfahren' zeigt aber, daß nicht alle Mengen, die zu $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ gehören, schon zu $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehören. Sogar unter den Mengen von Kardinalzahlen, die zu $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ gehören, gibt es solche, die nicht zu $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehören. Gehen wir nämlich von einer — in $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ liegenden — Relation ϱ aus, die alle zu $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehörigen Mengen abzählt, so liefert $\sigma(k) \leftrightarrow k \in \mathsf{T}_M \varrho(M, k)$ eine Relation σ von $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ mit $\mathsf{M}_k \sigma(k) \neq M$ für alle zu $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehörigen Mengen M.

Das Diagonalverfahren liefert also eine Konstruktion von Mengen beliebig hoher Schicht — es beweist aber nicht die Existenz absolut-überabzählbarer Mengen.

§ 2.

Reelle Zahlen.

Nachdem wir in § 1 den Aussagebegriff — und damit auch ‚Menge' und ‚Funktion' — definiert haben, ist der weitere Aufbau der Analysis im wesentlichen schon festgelegt. Wir definieren zunächst die reellen Zahlen durch eine Gleichheitsrelation zwischen Mengen von rationalen Zahlen — die anderen üblichen Definitionen durch Mengenpaare (Schnitte), Folgen oder Folgenpaare (Intervallschachtelungen) ließen sich ebenfalls verwenden.

Ist M eine Menge von rationalen Zahlen, so heißt r_0 ‚untere Schranke von M', wenn

$$\wedge_r (r \in M \to r_0 \leqq r)$$

gilt. Wir schreiben dafür: $\underset{r \in M}{\wedge_r} r_0 \leqq r$ oder kurz $r_0 \leqq M$.

Gilt für zwei Mengen M_1, M_2 von rationalen Zahlen

$$\wedge_{r_0}(r_0 \leqq M_1 \to r_0 \leqq M_2),$$

dann schreiben wir $\underline{\text{fin}}\, M_1 \leqq \underline{\text{fin}}\, M_2$ ($\underline{\text{fin}}$: untere Grenze).

Gilt $\underline{\text{fin}}\, M_1 \leqq \underline{\text{fin}}\, M_2$, $\underline{\text{fin}}\, M_2 \leqq \underline{\text{fin}}\, M_1$, dann schreiben wir $\underline{\text{fin}}\, M_1 = \underline{\text{fin}}\, M_2$. Wir definieren $r = \underline{\text{fin}}\, \{r\}$.

Damit ist eine Gleichheitsrelation zwischen allen Zeichen $\underline{\text{fin}}\, M$ und rationalen Zahlen definiert. Wir nennen die Zeichen $\underline{\text{fin}}\, M$ mit dieser Gleichheitsrelation ‚reelle Zahlen'. (Für nicht nach unten beschränktes M bzw. für die leere Menge M erhält man die ‚unendlichen' Zahlen $-\infty, +\infty$.)

Für Hypermengen von rationalen Zahlen erhielte man analog ‚hyperreelle Zahlen' — wir werden von diesen jedoch keinen Gebrauch machen.

Auf die Definition der elementaren Relationen, wie Addition, Multiplikation und Ordnung (einschl. untere Grenze $\underline{\text{fin}}$ und obere Grenze $\overline{\text{fin}}$) brauchen wir hier nicht einzugehen — das kann wörtlich aus der naiven Theorie übernommen werden.

Von jetzt ab benutzen wir $x, y, \ldots$ als Variable für reelle Zahlen.

Die Ausschließung der hyperreellen Zahlen rechtfertigt sich dadurch, daß durch diese Beschränkung auf Schichten das Vollständigkeitsprinzip der klassischen Analysis gültig wird: Zu jeder Menge von reellen Zahlen gibt es eine reelle Zahl als untere Grenze (und eine reelle Zahl als obere Grenze).

Ist nämlich $M = \mathsf{M}_x A(x)$, wobei $A(x)$ eine Aussage der Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ ist, dann ist

$$M_0 = \mathsf{M}_r \underset{x}{\vee} (A(x) \wedge x \leqq r)$$

eine Menge von rationalen Zahlen, die zu $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ gehört. Für die reelle Zahl $x_0 = \underline{\text{fin}}\, M_0$ gilt $x_0 = \underline{\text{fin}}\, M$, denn

$$r_0 \leqq M \to r_0 \leqq M$$

wegen

$$x \in M \wedge r_0 > x \to \vee_r r_0 > r \geqq x$$

$$\underset{x \in M}{\vee_x} r_0 > x \to \underset{r \in M_0}{\vee_r} r_0 > r$$

(d. h. ausführlicher: $\vee_x (x \in M \wedge r_0 > x) \to \vee_r (r \in M_0 \wedge r_0 > r)$) und

$$r_0 \leqq M \to r_0 \leqq M_0$$

wegen

$$\underset{x \in M}{\wedge_x} r_0 \leqq x \to \underset{r \in M_0}{\wedge_r} r_0 \leqq r.$$

Die obere Grenze $\overline{\text{fin}}\, M$ ist entsprechend zu konstruieren.

Die in diesem Beweis konstruierte reelle Zahl x_0 könnte selbstverständlich schon zu $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehören (z. B. auch rational sein) — wir haben sie nur mithilfe einer Aussage von $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ dargestellt. Nach dem Diagonalverfahren (vgl. § 1. 10) läßt sich aber zeigen, daß zu jeder Schicht reelle Zahlen gehören, die zu keiner niederen Schicht gehören. Die Hypermenge aller reellen Zahlen ist also keine Menge, insbesondere auch nicht abzählbar (nur hyperabzählbar).

§ 3.

Mengen und Folgen reeller Zahlen.

Wir beschränken uns von jetzt ab auf endliche reelle Zahlen.

Definition 1. Für eine Folge x^* heißt x ein *Häufungswert* von x^*, wenn

$$\wedge_\iota \wedge_{k_0} \vee_k (k > k_0 \wedge |x^{(k)} - x| < \varepsilon).$$

Hierbei benutzen wir — wie auch stets im folgenden — δ, ε, ... als Variable für positive rationale Zahlen.

Satz 1. *Zu jeder beschränkten Folge reeller Zahlen gibt es eine reelle Zahl als Häufungswert.*

Beweis. x^* sei eine beschränkte Folge, d. h.

$$\vee_{r_1, r_2} \wedge_k r_1 < x^{(k)} < r_2.$$

Wir konstruieren eine Menge rationaler Zahlen durch

$$M = \mathsf{M}_r \wedge_{k_0} \vee_k (k > k_0 \frown x^{(k)} \leqq r).$$

Gehört x^* zur Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$, dann auch M. Wegen der Beschränktheit von x^* ist M nicht leer und nach unten beschränkt. Daher ist $x_0 = \underline{\text{fin}}\, M$ eine (endliche) reelle Zahl.

x_0 ist Häufungswert von x^* wegen

$$\begin{aligned}
&1)\ \wedge_\varepsilon \vee_r (r \in M \frown r < x_0 + \varepsilon)\\
1 \to 2)\ &\wedge_{k_0} \vee_k (k > k_0 \frown x^{(k)} < x_0 + \varepsilon)\\
&3)\ \wedge_\varepsilon \vee_r (r \overline{\in} M \frown r \geqq x_0 - \varepsilon)\\
3 \to 4)\ &\vee_{k_1} \wedge_k (k > k_1 \to x^{(k)} > x_0 - \varepsilon)\\
2, 4 \to 5)\ &\wedge_{k_0} \vee_k (k > k_0 \frown |x^{(k)} - x_0| < \varepsilon).
\end{aligned}$$

Für jeden Häufungswert x von x^* gilt darüber hinaus $x \geqq x_0$ d. h. x_0 ist der ‚untere Limes' von x^*:

$$x_0 = \underline{\lim}\, x^* = \underline{\lim_{k=\infty}}\, x^{(k)}.$$

Ebenso läßt sich für jede beschränkte Folge die Existenz des ‚oberen Limes' $\overline{\lim}\, x^*$ beweisen.

Definition 2. Eine Folge x^* heißt konvergent, wenn $\underline{\lim}\, x^* = \overline{\lim}\, x^*$. Der gemeinsame Wert heißt der Grenzwert $\lim x^*$.

Satz 2. (Konvergenzkriterium von Cauchy.)

$$\exists \lim x^* \longleftrightarrow \wedge_\varepsilon \vee_{k_0} \wedge_{k_1, k_2} (k_1 > k_0 \frown k_2 > k_0 \to |x^{(k_1)} - x^{(k_2)}| < \varepsilon).$$

Beweis. 1) Konvergiert x^*, dann folgt die rechte Seite trivialerweise.

2) Aus der rechten Seite folgt sofort

$$\underline{\lim}\, x^* = \overline{\lim}\, x^*.$$

Definition 3. Eine Menge reeller Zahlen heißt kompakt, wenn es zu jeder Folge x^* aus M (d. h. $\mathsf{M}(x^*) < M$) eine konvergente Teilfolge gibt.

Satz 3. (Kompaktheitskriterium von Bolzano-Weierstrass.) *Eine Menge M reeller Zahlen ist genau dann kompakt, wenn M beschränkt ist.*

Beweis. 1) Ist M nicht beschränkt, dann gilt — falls M zu $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehört —

$$\wedge_k \underset{x}{\vee} (x \in M \frown |x| > k).$$

Nach dem Auswahlprinzip gibt es eine Folge x^* mit

$$\wedge_k (x^{(k)} \in M \frown |x^{(k)}| > k).$$

Für jede Teilfolge $x_0^* = x^{(l^*)}$ (l^* Kardinalfolge) von x^* gilt

$$|x_0^{(k)}| = |x^{(l^{(k)})}| > l^{(k)} \geqq k.$$

x_0^* ist nicht konvergent, denn für jedes x gilt

$$\wedge_{k_0} \vee_k (k > k_0 \frown |x^{(k)} - x| > 1).$$

2) Ist M beschränkt, dann ist auch jede Folge x^* aus M beschränkt. Es gibt daher nach Satz 1 einen Häufungswert x von x^*. Für eine Nullfolge ε^* $\left(\text{z. B. } \varepsilon^{(k)} = \frac{1}{k}\right)$ gilt

$$\wedge_{k_0} \vee_k |x^{(k)} - x| < \varepsilon^{(k_0)}.$$

Wir konstruieren eine Kardinalfolge k_0^* durch

$$k_0^{(1)} = \mathsf{T}_k |x^{(k)} - x| < \varepsilon^{(1)}$$

$$k_0^{(l+1)} = \mathsf{T}_k (|x^{(k)} - x| < \varepsilon^{(l+1)} \frown k > k_0^{(l)}).$$

k_0^* gehört zur selben Schicht wie x^*, ebenso $x_0^* = x^{(k_0^*)}$. x_0^* ist konvergent mit dem Grenzwert x.

Satz 4. (Cantorsches Diagonalverfahren.) *Ist M eine kompakte Menge reeller Zahlen, so gibt es zu jeder Doppelfolge $x^{**} = \Phi_{k,l} x^{k,l}$ aus M eine Kardinalfolge l^*, so daß alle Folgen $x^{(k,l^*)}$ konvergieren.*

Beweis. Mit einer Nullfolge ε^* konstruieren wir aus der Doppelfolge x^{**} eine Folge von Kardinalfolgen $l_1^*(k_0)$. Zunächst konstruieren wir $l_1^*(1)$ durch

$$l_1^{(1)}(1) = \mathsf{T}_l |x^{(1,l)} - \underline{\lim}\, x^{(1,*)}| < \varepsilon^{(1)}$$

$$l_1^{(k+1)}(1) = \mathsf{T}_l (|x^{(1,l)} - \underline{\lim}\, x^{(1,*)}| < \varepsilon^{(k+1)} \frown l > l_1^{(k)}(1)).$$

Wir setzen ferner

$$l_1^*(k_0 + 1) = l_1^{(l_0^*(k_0+1))}(k_0),$$

wobei $l_0^*(k_0 + 1)$ definiert wird durch

$$l_0^{(1)}(k_0 + 1) = \mathsf{T}_l |x^{(k_0+1,\, l_1^{(l)}(k_0))} - \underline{\lim}\, x^{(k_0+1,\, l_1^*(k_0))}| < \varepsilon^{(1)}$$

$$l_0^{(k+1)}(k_0 + 1) = \mathsf{T}_l (|x^{(k_0+1,\, l_1^{(l)}(k_0))} - \underline{\lim}\, x^{(k_0+1,\, l_1^*(k_0))}| < \varepsilon^{(k+1)} \frown l > l_0^{(k)}(k_0 + 1)).$$

Für die Diagonalfolge $l^* = \Phi_k l_1^{(k)}(k)$ sind dann alle Folgen $x^{(k_0, l^*)}$ konvergent, denn $\Phi_k x^{(k_0,\, l_1^{(k)}(k))}$ ist für $k > k_0$ eine Teilfolge von $x^{(k_0,\, l_1^*(k_0))}$. Aus der Konstruktion von $l_1^*(k_0)$ folgt aber

$$\lim x^{(1,\, l_1^*(1))} = \underline{\lim}\, x^{(1,*)}$$

$$\lim x^{(k_0+1,\, l_1^*(k_0+1))} = \underline{\lim}\, x^{(k_0+1,\, l_1^*(k_0))}.$$

§ 4.

Intervalle.

Da wir x als Variable für alle reellen Zahlen (nicht für die reellen Zahlen einer festen Schicht) benutzen, ist z. B. das Intervall $[0, 1] = \mathsf{M}_x\,(0 \leqq x \leqq 1)$ keine Menge, sondern eine Hypermenge. Da „Intervall" zu den Begriffen der klassischen Analysis gehört, behandeln wir auch diese Hypermengen.

Wir nennen ein Paar x, x' von reellen Zahlen eine Strecke, wenn $x < x'$. Jede Strecke definiert ein abgeschlossenes Intervall $[x, x']$, ein offenes Intervall (x, x') und die halboffenen Intervalle $[x, x')$, $(x, x']$.

Definition 4. Eine Menge N von Strecken heißt eine offene Überdeckung einer Menge (oder Hypermenge) M, wenn

$$M < \bigcup_{x, x' \in N} (x, x').$$

Satz 5. (Überdeckungssatz von Heine-Borel.) *Jede offene Überdeckung eines abgeschlossenen Intervalls enthält eine endliche Untermenge, die ebenfalls eine offene Überdeckung des Intervalls ist.*

Beweis. Es sei N eine offene Überdeckung von $[y_0, y_1]$. Wir betrachten Systeme $\overline{x, x'} = x_1, x_1'; x_2, x_2'; \ldots$ von Strecken. Durch die Aussage $A(r)$

$$\vee_{x_1, x_1';\, x_2, x_2';\ldots} (\{x_1, x_1';\, x_2, x_2';\ldots\} < N \frown [y_0, r] < (x_1, x_1') \cup (x_2, x_2') \cup \cdots)$$

wird eine Menge $M = \mathsf{M}_r A(r)$ und eine reelle Zahl $y = \overline{\text{fin}}\, M$ definiert.

Zum Beweis des Satzes genügt es $y > y_1$ zu zeigen. Dazu folgern wir aus $y \in [y_0, y_1]$ einen Widerspruch:

1) $y \in [y_0, y_1]$

$1 \rightarrow 2)$ $\vee_{x_1, x_1'} (x_1, x_1' \in N \frown y \in (x_1, x_1'))$

3) $y \in (x_1, x_1') \rightarrow \vee_{r_1, r_1'} x_1 < r_1 < y < r_1' < x_1'$

4) $r_1 < y \rightarrow r_1 \in M$

5) $r_1 \in M \rightarrow \vee_{x_2, x_2';\ldots} (\{x_2, x_2';\ldots\} < N \frown [y_0, r_1] < (x_2, x_2') \cup \cdots)$

$2, \ldots, 5 \rightarrow 6)$ $\vee_{r_1'} \vee_{x_1, x_1';\ldots} (\{x_1, x_1';\ldots\} < N \frown$
$[y_0, r_1'] < (x_1, x_1') \cup (x_2, x_2') \cup \cdots \frown y < r_1')$

$6 \rightarrow 7)$ $\vee_{r_1'} (r_1' \in M \frown y < r_1')$

$7 \rightarrow 8)$ $\overline{\text{fin}}\, M > y$ (Widerspruch).

Definition 5. Eine Menge N von Strecken heißt ein abgeschlossener Filter, wenn für jedes System $\overline{x, x'} = x_1, x_1'; \ldots; x_\lambda, x_\lambda'$ aus N gilt

$$[x_1, x_1'] \frown \cdots \frown [x_\lambda, x_\lambda'] \neq 0.$$

Satz 6. (Durchschnittssatz von Cantor.) *Jeder abgeschlossene Filter N hat einen nichtleeren Durchschnitt:*

$$\bigcap_{x,x' \in N} [x, x'] \neq 0.$$

Beweis. N sei eine Menge von Strecken und es sei

$$\bigcap_{x,x' \in N} [x, x'] = 0.$$

Für ein $x_0, x_0' \in N$ bilden wir ein rationales Intervall $(r_0, r_0') > [x_0, x_0']$. Dann gilt

$$\bigcup_{x,x' \in N} ((r_0, r_0') - [x, x']) > [x_0, x_0'].$$

Da die auftretenden Differenzen $(r_0, r_0') - [x, x']$ eine Vereinigung von höchstens zwei offenen Intervallen sind, gibt es nach Satz 5 ein System $\overline{x, x'} = x_1, x_1'; \ldots$ aus N mit

$$((r_0, r_0') - [x_1, x_1']) \cup ((r_0, r_0') - [x_2, x_2']) \cup \cdots > [x_0, x_0'].$$

Hieraus folgt sofort $[x_0, x_0'] \frown [x_1, x_1'] \frown \cdots = 0$, d. h. N ist kein abgeschlossener Filter.

Definition 6. Eine Hypermenge M heißt offen[4]), wenn es eine Menge N von Strecken gibt mit

$$M = \bigcup_{x,x' \in N} (x, x').$$

Der Übersichtlichkeit halber benutzen wir für Strecken eigene Variable $u, v, \ldots$ (Umgebungen). Die zugehörigen Intervalle bezeichnen wir entsprechend durch $[u]$, (u), $[u)$, $(u]$. Zwei Strecken u, v heißen kernfremd, wenn

$$(u) \frown (v) = 0.$$

Satz 7. (Struktursatz.) *Zu jeder offenen Hypermenge M gibt es eine paarweise gleich oder kernfremde Folge u^* von Strecken mit*

$$M = \bigcup (u^*) = \bigcup_k (u^{(k)}).$$

Beweis. Es sei $M = \bigcup_{u \in N} (u)$. Mit einer schlichten Folge r^*, die alle rationalen Zahlen als Glieder enthält, bilden wir

$$M_0^{(k)} = \mathsf{M}_{r_0} ([r_0, r^{(k)}] < M)$$
$$M_1^{(k)} = \mathsf{M}_{r_1} ([r^{(k)}, r_1] < M).$$

Die Aussage $[r_0, r^{(k)}] < M$ ist nach Satz 5 äquivalent mit

$$\vee_{u_1, u_2, \ldots} (\{u_1, u_2, \ldots\} \leq N \frown [r_0, r^{(k)}] < (u_1) \cup (u_2) \cup \cdots),$$

[4]) Diese Definition ist in der klassischen Analysis mit der üblichen gleichwertig. Hier ist wesentlich, daß N eine Menge ist — das kommt in der klassischen Definition selbstverständlich nicht zum Ausdruck.

also mit einer Aussage der Schicht, zu der N gehört. Daher ist $M_0^{(k)}$ eine Menge. Ebenso ist $M_1^{(k)}$ eine Menge.

Durch $x_0^{(k)} = \underline{\text{fin}}\, M_0^{(k)}$ und $x_1^{(k)} = \overline{\text{fin}}\, M_1^{(k)}$ werden also reelle Zahlen definiert. Wir setzen $v^{(k)} = x_0^{(k)}, x_1^{(k)}$. Es ist $\bigcup(v^*) = M$, denn zunächst folgt $(v^{(k)}) < M$, andererseits gilt aber für jedes $u \in N$

$$\vee_k r^{(k)} \in (u)$$

und

$$r^{(k)} \in (u) \to (u) < (v^{(k)}).$$

Für $k_1 \neq k_2$ und $v^{(k_1)} \neq v^{(k_2)}$ ist $(v^{(k_1)}) \frown (v^{(k_2)}) = 0$. Ist nämlich $v^{(k_1)} \neq v^{(k_2)}$ (etwa $x_0^{(k_1)} < x_0^{(k_2)}$) und $(v^{(k_1)}) \frown (v^{(k_2)}) \neq 0$, so folgt $x_0^{(k_2)} < x_1^{(k_1)}$, also $(x_0^{(k_1)}, r^{(k_2)}) < M$ im Widerspruch zur Definition von $x_0^{(k_2)}$. v^* und (falls $M(v^*)$ unendlich ist) die Folge u^* der verschiedenen Glieder von v^* — definiert als Teilfolge $v^{(l_0^*)}$ mit

$$l_0^{(1)} = 1$$
$$l_0^{(k+1)} = \mathop{\mathsf{T}}_{0\,l} (\wedge_{k_0} (k_0 \leqq l_0^{(k)} \to v^{(k_0)} \neq v^{(l)}))$$

— erfüllen die Bedingung von Satz 7.

Als Grundlage für die Borel-Lebesguesche Maßtheorie beweisen wir noch

Satz 8. *Gilt für zwei Streckenfolgen u^*, v^* — von denen u^* paarweise kernfremd sei — $\bigcup(u^*) < \bigcup[v^*]$, dann ist*

$$\sum |u^*| \leqq \sum |v^*|.$$

Hierbei ist für eine Strecke x, x' gesetzt

$$|x, x'| = x' - x$$

und für eine Folge x^* reeller Zahlen — wie üblich —

$$\sum x^* = \sum_k x^{(k)} = \lim_{l=\infty} \sum_{k=1}^{l} x^{(k)}.$$

Beweis. Wir werden $\sum |u^*| > \sum |v^*|$ mit den Prämissen des Satzes zum Widerspruch führen. Zunächst folgt die Existenz eines k_0 mit

$$\sum_{k=1}^{k_0} |u^{(k)}| > \sum |v^*|.$$

Wir ersetzen jedes der $u^{(1)}, \ldots, u^{(k_0)}$ durch ein geeignetes (etwa rationales) $u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(k_0)}$ mit $[u_0^{(k)}] < (u^{(k)})$, so daß aber noch $\sum_{k=1}^{k_0} |u_0^{(k)}| > \sum |v^*|$ gilt. Wir ersetzen ferner jedes $v^{(l)}$ durch ein geeignetes $v_1^{(l)}$ mit $(v_1^{(l)}) > [v^{(l)}]$, so daß immer noch

$$\sum_{k=1}^{k_0} |u_0^{(k)}| > \sum |v_1^*|$$

gilt. (Das ist mit einer Folge ε^* mit

$$\sum \varepsilon^* \leqq \sum_{k=1}^{k_0} |u_v^{(k)}| - \sum |v^*|$$

leicht möglich, da dann nur $|v_1^{(l)}| - |v^{(l)}| < \varepsilon^{(l)}$ erfüllt zu werden braucht.)

Wegen

$$\bigcup_{k=1}^{k_0} [u_v^{(k)}] \leq \bigcup_{l} (v_1^{(l)})$$

gibt es nach Satz 5 ein l_0 mit

$$\bigcup_{k=1}^{k_0} [u_v^{(k)}] \leq \bigcup_{l=1}^{l_0} (v_1^{(l)}).$$

Hieraus folgt mit

$$\sum_{k=1}^{k_0} |u_v^{(k)}| > \sum_{l=1}^{l_0} |v_1^{(l)}|$$

elementar ein Widerspruch, da die $u_v^{(1)}, \ldots, u_v^{(k_0)}$ paarweise kernfremd sind.

§ 5.

Reelle Funktionen.

Da eine Funktion f durch einen Term $y(x_1, \ldots, x_\lambda)$ dargestellt wird, und ein Term durch eine Aussage

$$y(x_1, \ldots, x_\lambda) = \mathsf{T}_x A(x_1, \ldots, x_\lambda, x),$$

ist der ‚Existenzbereich' von f, d. h. $\mathsf{M}(\exists f) = \mathsf{M}_{x_1, \ldots, x_\lambda} \exists f(x_1, \ldots, x_\lambda)$ stets eine Menge. Es können daher nur Hyperfunktionen über einem Intervall (also einer Hypermenge) existieren. Schon Addition und Multiplikation gehören zu den Hyperfunktionen, denn sie lassen sich für alle reellen Zahlen definieren, z. B. durch

$$x_1 + x_2 = \mathsf{T}_{x_3} \vee_{M_1, M_2} (x_1 = \underline{\text{fin}}\, M_1 \wedge x_2 = \underline{\text{fin}}\, M_2 \wedge x_3 = \underline{\text{fin}}\, (M_1 + M_2)).$$

(Hierbei ist für Mengen M_1, M_2 rationaler Zahlen definiert

$$M_1 + M_2 = \mathsf{M}_{r_3} \vee_{r_1, r_2} (r_1 \in M_1 \wedge r_2 \in M_2 \wedge r_3 = r_1 + r_2).)$$

Für die reellen Zahlen x_1, x_2 einer Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ können in dieser Definition auch die Mengen M_1, M_2 auf $\mathfrak{S}_\varkappa$ eingeschränkt werden. Bezeichnen wir für jede Hyperfunktion f die ‚Vorbeschränkung von f auf $\mathfrak{S}_\varkappa$' mit $\overset{\varkappa}{f}$, d. h.

$$\overset{\varkappa}{f} = \Phi_{x_1, \ldots, x_\lambda} \mathsf{T}_x (f(x_1, \ldots, x_\lambda) = x \wedge x_1 \in \mathfrak{S}_\varkappa \wedge \cdots \wedge x_\lambda \in \mathfrak{S}_\varkappa),$$

so gehören also Addition und Multiplikation zu denjenigen Hyperfunktionen f, für die jedes $\overset{\varkappa}{f}$ eine Funktion ist.

Definition 8. Eine Hyperfunktion f heißt Quasifunktion, wenn für jedes $\overset{\varkappa}{x}$ $\overset{\varkappa}{f}$ eine Funktion ist.

Wir beschränken uns im folgenden auf Quasifunktionen, deren Existenzbereich ein abgeschlossenes Intervall $[u_0]$ ist.

Definition 9. Es gelte $\lim\limits_{x=x_0} f(x) = y_0$ genau dann, wenn für jedes $\varkappa$:

$$\bigwedge_{y_0 \overset{0}{\in} (v)}^{v} \bigvee_{x_0 \overset{0}{\in} (u)}^{u} \bigwedge_{\overset{\varkappa}{x}} x \; (x_0 \neq x \in (u) \rightarrow f(x) \in (v)).$$

(Die 0 unter den beiden ersten Quantoren bedeutet, daß u, v aus der 0. Schicht, also rational sind[5].)

Die Bedingung von Definition 9 ist selbstverständlich äquivalent mit

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \bigwedge_{\overset{\varkappa}{x}} x \; (0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon).$$

Dieser Limesbegriff für Quasifunktionen läßt sich auf den Limesbegriff für Folgen zurückführen.

Satz 9.

$$\lim_{x=x_0} f(x) = y_0 \longleftrightarrow \wedge_{x^*} (\exists f(x^*) \wedge \lim x^* = x_0 \rightarrow \lim f(x^*) = y_0).$$

(x^* braucht hier nur alle Folgen von reellen Zahlen zu durchlaufen, keine Hyperfolgen.)

Beweis. 1) Gilt $\lim\limits_{x=x_0} f(x) = y_0$, dann ist

$$\exists f(x^*) \wedge \lim x^* = x_0 \rightarrow \lim f(x^*) = y_0$$

trivial.

2) Gilt $\lim\limits_{x=x_0} f(x) = y_0$ nicht, dann folgt für eine Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$:

$$\vee_\varepsilon \wedge_\delta \bigvee_{\overset{\varkappa}{x}} x \; (0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - y_0| \geqq \varepsilon).$$

Mit einer Nullfolge δ^* folgt für ein ε:

$$\wedge_k \bigvee_{\overset{\varkappa}{x}} x \, (0 < |x - x_0| < \delta^{(k)} \wedge |f(x) - y_0| \geqq \varepsilon).$$

Nach dem Auswahlprinzip folgt hieraus die Existenz einer — zu $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ gehörigen — Folge x^* mit

$$\wedge_k (0 < |x^{(k)} - x_0| < \delta^{(k)} \wedge |f(x^{(k)}) - y_0| \geqq \varepsilon).$$

Für x^* gilt $\lim x^* = x_0$, aber nicht $\lim f(x^*) = y_0$.

Definition 10. f heißt in x_0 stetig, wenn $\lim\limits_{x=x_0} f(x) = f(x_0)$. f ist also genau dann in x_0 stetig, wenn $\exists f(x_0)$ und für jedes $\varkappa$:

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \bigwedge_{\overset{\varkappa}{x}} x \; (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

---

[5]) Man könnte einen Limesbegriff z. B. auch definieren durch

$$\bigwedge_{y_0 \overset{0}{\in} (v)}^{v} \bigvee_{x_0 \overset{0}{\in} (u)}^{u} \wedge_x (x_0 \neq x \in (u) \rightarrow f(x) \in (v)).$$

Das wäre klassisch nicht zu unterscheiden von Definition 3, es würden jedoch im folgenden einige Sätze modifiziert werden müssen.

Definition 11. f heißt in $[u_0]$ stetig, wenn f in x_0 stetig ist für alle $x_0 \in [u_0]$.

Satz 10. (Satz der gleichmäßigen Stetigkeit.) *f ist genau dann in $[u_0]$ stetig, wenn*

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \underset{\{x_1, x_2\} \subset [u_0]}{\wedge_{x_1, x_2}} (|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Beweis. 1) Ist die Bedingung erfüllt, dann ist f trivialerweise in $[u_0]$ stetig.

2) Ist f in $[u_0]$ stetig, dann folgt

$$\wedge_\varepsilon \underset{x_0 \in [u_0]}{\wedge_{x_0}} \underset{x_0 \in (u)}{\vee_u} \wedge_x \left(x \in (u) \to |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

also

$$\wedge_\varepsilon \underset{x_0 \in [u_0]}{\wedge_{x_0}} \underset{x_0 \in (u)}{\vee_u} \wedge_{x_1, x_2} (\{x_1, x_2\} \leq (u) \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Hiernach ist die Menge $N = \mathsf{M}_u \wedge_{x_1, x_2} (\{x_1, x_2\} \leq (u) \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$ eine offene Überdeckung von $[u_0]$. Nach Satz 5 gibt es ein System $u_1, u_2, \ldots$ aus N, das ebenfalls $[u_0]$ offen überdeckt.

Zu diesem System gibt es eine Zahl δ, so daß

$$\underset{\{x_1, x_2\} \subset [u_0]}{\wedge_{x_1, x_2}} (|x_1 - x_2| < \delta \to \{x_1, x_2\} \leq (u_1) \vee \{x_1, x_2\} \leq (u_2) \vee \cdots).$$

Also folgt

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \underset{\{x_1, x_2\} \subset [u_0]}{\wedge_{x_1, x_2}} (|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Satz 11. (Zwischenwertsatz.) *Jede in einem abgeschlossenen Intervall $[x_0, x_2]$ stetige Quasifunktion f nimmt jeden Wert zwischen $f(x_0)$ und $f(x_2)$ an.*

Beweis. Es sei $f(x_0) < y_1 < f(x_2)$. Wir definieren

$$M = \mathsf{M}_r (\overset{\circ}{f}(r) < y_1 \wedge r \in [x_0, x_2]).$$

Da $\overset{\circ}{f}$ eine Funktion ist, ist M eine Menge. Also ist

$$x_1 = \overline{\text{fin}}\, M$$

eine reelle Zahl. Es gibt eine Folge r^* aus M mit $\overline{\lim}\, r^* = x_1$, also auch (vgl. den Beweis von Satz 3) eine Teilfolge r_0^* mit $\lim r_0^* = x_1$. Aus $f(r_0^{(k)}) < y_1$ und $\lim f(r_0^*) = f(x_1)$ folgt $f(x_1) \leqq y_1$.

Wäre $f(x_1) < y_1$, so würde aus der Stetigkeit folgen

$$\vee_\delta \wedge_r (|r - x_1| < \delta \to f(r) < y_1),$$

also

$$\underset{r \in [x_0, x_2]}{\vee_r} (x_1 < r \wedge f(r) < y_1)$$

im Widerspruch zu $\overline{\text{fin}}\, M = x_1$. Damit ist $f(x_1) = y_1$ bewiesen.

Satz 12. (Satz vom Maximum.) *Jede in einem abgeschlossenen Intervall stetige Quasifunktion nimmt einen maximalen Wert an.*

Beweis. Es sei f in $[u_0]$ stetig. Wir definieren[6])

$$y = \overline{\text{fin}}_{r \in [u_0]} f(r).$$

Gehört $\overset{0}{f}$ zu $\mathfrak{S}_\varkappa$, dann y zu $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$. Es gibt eine Folge r^* (zu $\mathfrak{S}_{\varkappa+1}$ gehörig) mit $y = \lim f(r^*)$. Da es ferner nach Satz 3 eine konvergente Teilfolge r_0^* von r^* gibt, folgt für $x = \lim r_0^*$ aus der Stetigkeit $f(x) = y$.

§ 6.

Mengen und Folgen von reellen Funktionen.

Beim Übergang von der Analysis der reellen Zahlen zur Analysis der rellen Funktionen tritt nichts wesentlich Neues auf. Am Beispiel des „Kompaktheitskriterium für Mengen reeller Funktionen" werden wir zeigen, daß sich die klassische Analysis ohne Schwierigkeit auf die Quasifunktionen übertragen läßt.

Wir haben dazu Hypermengen und Hyperfolgen von Quasifunktionen zu betrachten. Für eine Hyperfunktion f hatten wir $\overset{\varkappa}{f}$ definiert als die Vorbeschränkung von f auf $\mathfrak{S}_\varkappa$. Für eine Hypermenge M von Hyperfunktionen sei $\overset{\varkappa}{M}$ definiert durch

$$\overset{\varkappa}{M} = \mathsf{M}_g \vee_f (f \in M \frown \overset{\varkappa}{f} = g).$$

Für eine Hyperfolge f^* setzen wir entsprechend $\overset{\varkappa}{f^*} = \Phi_k \overset{\varkappa}{f}^{(k)}$.

Definition 12. Eine Hypermenge M bzw. Hyperfolge f^* heißt Quasimenge bzw. Quasifolge, wenn für jedes $\varkappa$ $\overset{\varkappa}{M}$ bzw. $\overset{\varkappa}{f^*}$ eine Menge bzw. Folge ist.

Wir beschränken uns im folgenden auf Quasimengen und Quasifolgen von Quasifunktionen — und setzen außerdem voraus, daß alle betrachteten Quasifunktionen über einem festen abgeschlossenen Intervall $[u_0]$ existieren. Es gilt zunächst in Analogie zum Vollständigkeitsprinzip:

Satz 13. *Zu jeder Quasimenge von Quasifunktionen gibt es eine Quasifunktion als untere Grenze.*

---

[6]) Bisher ist nur $\overline{\text{fin}}\, M$ definiert. Wie üblich steht hier z. B. $\overline{\text{fin}}_{r \in [u_0]} f(r)$ als Abkürzung für

$$\overline{\text{fin}}\, \mathsf{M}_x (\cdot \vee_r f(r) = x).$$
$$r \in [u_0]$$

Entsprechend auch im folgenden.

Beweis. Sei M eine Quasimenge. Gehört x zur Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$, dann gilt $f(x) = {}^{\varkappa}f(x)$. Da ${}^{\varkappa}M$ eine Menge ist, ist $\underset{f \overline{\in} M}{\text{fin}}\, f(x) = \underset{g \overline{\in} {}^{\varkappa}M}{\text{fin}}\, g(x)$ eine reelle Zahl und $g_0 = \underset{\varkappa}{\Phi_x} \underset{g \overline{\in} {}^{\varkappa}M}{\text{fin}}\, g(x)$ eine Funktion. Die Hyperfunktion $f_0 = \underset{\varkappa}{\Phi_x} \underset{f \overline{\in} M}{\text{fin}}\, f(x)$ ist daher eine Quasifunktion.

Bezüglich der Ordnungsrelation für Quasifunktionen (definiert durch $f_1 \leqq f_2 \leftrightarrow \wedge_x (f_1(x) \leqq f_2(x))$) gilt

$$f_0 = \underline{\text{fin}}\, M.$$

Definition 13. Eine Quasimenge M von Quasifunktionen heißt gleichgradig stetig in x_0, wenn für jedes $\varkappa$:

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \underset{f \in M}{\wedge_f} \underset{\varkappa}{\wedge_x} (|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Definition 14. Eine Quasimenge M bzw. Quasifolge f^* heißt gleichgradig stetig in $[u_0]$, wenn M bzw. $\mathsf{M}(f^*)$ gleichgradig stetig in x_0 für alle $x_0 \in [u_0]$ ist.

Entsprechend zu Satz 10 erhält man:

Satz 14. *Eine Quasimenge M von Quasifunktionen ist genau dann gleichgradig stetig in $[u_0]$, wenn für jedes $\varkappa$:*

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \underset{f \in M}{\wedge_f} \underset{\{x_1, x_2\} \subset [u_0]}{\underset{\varkappa}{\wedge_{x_1, x_2}}} (|x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Definition 15: Eine Quasifolge f^* von Quasifunktionen heißt gleichmäßig konvergent in $[u_0]$ mit dem Grenzwert f, wenn für jedes $\varkappa$:

$$\wedge_\varepsilon \vee_{k_0} \underset{\varkappa}{\wedge_x} \wedge_k (k > k_0 \to |f^{(k)}(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Satz 15. *Ist f^* eine in $[u_0]$ gleichmäßig konvergente Quasifolge und sind alle $f^{(k)}$ stetig in $[u_0]$, dann ist $\lim f^*$ eine in $[u_0]$ stetige Quasifunktion.*

Beweis. Aus der Stetigkeit der $f^{(k)}$ in $x_0 \in [u_0]$ folgt

$$\vee_\delta \underset{\varkappa}{\wedge_x} \left(|x - x_0| < \delta \to |f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}\right). \tag{1}$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von f^* und $\lim f^* = f$ folgt

$$\vee_k \underset{\varkappa}{\wedge_x} |f^{(k)}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Aus (1)—(2) folgt $\vee_\delta \underset{\varkappa}{\wedge_x} (|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$ q. e. d.

Satz 16. *Ist f^* eine in $[u_0]$ gleichmäßig konvergente Quasifolge und ist $f = \lim f^*$ stetig in $[u_0]$, dann gilt für jede Folge x^* und jedes $x_0 \in [u_0]$*

$$\lim x^* = x_0 \to \lim_{k = \infty} f^{(k)}(x^{(k)}) = f(x_0).$$

Beweis. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von f^* und $\lim f^* = f$ folgt

$$\wedge_\varepsilon \vee_{k_0} \underset{x}{\wedge} x \wedge_k \left(k > k_0 \to |f^{(k)}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

also

$$(1) \qquad \vee_{k_0} \wedge_k \left(k > k_0 \to |f^{(k)}(x^{(k)}) - f(x^{(k)})| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Aus $\lim x^* = x_0$ folgt

$$\vee_{k_1} \wedge_k (k > k_1 \to |x^{(k)} - x_0| < \delta),$$

und aus der Stetigkeit von f in x_0:

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \underset{x}{\wedge} x \left(|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

also

$$(2) \qquad \vee_{k_1} \wedge_k \left(k > k_1 \to |f(x^{(k)}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Aus (1)—(2) folgt

$$\vee_{k_2} \wedge_k (k > k_2 \to |f^{(k)}(x^{(k)}) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad \text{q. e. d.}$$

Mit Hilfe von Satz 14—16 ergibt sich jetzt

Satz 17. (Kompaktheitskriterium.) *Eine Quasimenge M von in $[u_0]$ stetigen Quasifunktionen ist genau dann kompakt (d. h. zu jeder Quasifolge aus M gibt es eine in $[u_0]$ gleichmäßig konvergente Teilquasifolge), wenn M in $[u_0]$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt ist (d. h. für jedes z: $\vee_k \underset{x \in [u_0]}{\underset{x}{\wedge}} x \quad \wedge_{f \in M} |f(x)| < k$).*

Beweis. 1) M sei in $[u]$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. f^* sei eine Quasifolge aus M, also ebenfalls in $[u_0]$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt.

Mit einer schlichten Folge r^* aller rationalen Zahlen aus $[u_0]$ bilden wir die Doppelfolge $f^*(r^*)$. Da der Wertbereich $\mathsf{M}(f^*(r^*))$ beschränkt ist, gibt es nach Satz 3. 4 eine Kardinalfolge k^*, so daß alle Quasifolgen $f^{(k^*)}(r^{(l)})$ konvergieren. (k^* ist Folge, keine Hyperfolge, da f^* eine Folge ist.) Für die Teilquasifolge $f_0^* = f^{(k^*)}$ konvergiert also $f_0^*(r)$ für jedes $r \in [u_0]$, d. h.

$$\wedge_\varepsilon \underset{r \in [u_0]}{\underset{r}{\wedge}} \vee_{k_0} \wedge_{k_1, k_2} \left(k_1 > k_0 \frown k_2 > k_0 \to |f_0^{(k_1)}(r) - f_0^{(k_2)}(r)| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Aus der gleichgradigen Stetigkeit von f_0^* folgt nach Satz 14:

$$\wedge_\varepsilon \vee_\delta \underset{x}{\wedge} x_1, x_2 \wedge_k \left(|x_1 - x_2| < \delta \to |f_0^{(k)}(x_1) - f_0^{(k)}(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Nun gibt es zu jedem δ ein System $\bar{r} = r_1, r_2, \ldots$ mit

$$\underset{x \in [u_0]}{\underset{x}{\wedge}} x \; (|x - r_1| < \delta \frown |x - r_2| < \delta \frown \ldots).$$

Setzen wir

$$k_{\omega\lambda} = \mathsf{T}_{\upsilon k} \wedge_{k_1, k_2} \left(k_1 > k \wedge k_2 > k \to |f_\upsilon^{(k_1)}(r_\lambda) - f_\upsilon^{(k_2)}(r_\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

und

$$k_\upsilon = \max(k_{\upsilon 1}, k_{\upsilon 2}, \ldots),$$

so folgt

$$\bigwedge_{x \in [u_0]} x \; \wedge_{k_1, k_2} (k_1 > k_\upsilon \wedge k_2 > k_0 \to |f_\upsilon^{(k_1)}(x) - f_\upsilon^{(k_2)}(x)| < \varepsilon).$$

Nach Satz 2 folgt $\exists \lim f_\upsilon^*(x)$ für jedes $x \in [u_\upsilon]$. Für $f_0 = \lim f_\upsilon^*$ gilt

$$\vee_{k_0} \bigwedge_{x \in [u_\upsilon} x \; \wedge_k (k > k_0 \to |f_\upsilon^{(k)}(x) - f_0(x)| < \varepsilon),$$

d. h. f_υ^* konvergiert gleichmäßig in $[u_\upsilon]$. Da f_0^* eine Quasifolge ist, ist nach Satz 13 und nach dem Beweis von Satz 1 auch f_0 eine Quasifunktion.

2. 1) M sei nicht gleichmäßig beschränkt in $[u_\upsilon]$. Für eine Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ gilt also:

$$\wedge_k \bigvee_{x \in [u_\upsilon]} x \; \vee_{f \in M} |f(x)| > k.$$

Da M eine Menge ist, ist das Auswahlprinzip anwendbar. Es gibt daher eine Folge x^* aus $[u_0]$ und eine Quasifolge f^* aus M mit

$$\wedge_k |f^{(k)}(x^{(k)})| > k.$$

Es gibt nach Satz 3 eine Kardinalfolge k^*, so daß $x_\upsilon^* = x^{(k^*)}$ konvergiert. Wir setzen $f_\upsilon^* = f^{(k^*)}$. Zu f_0^* gibt es keine in $[u_0]$ gleichmäßig konvergente Teilquasifolge. Ist nämlich g^* eine gleichmäßig konvergente Teilquasifolge: $g^* = f_\upsilon^{(l^*)}$, dann folgt für $y^* = x_\upsilon^{(l^*)}$

$$\lim y^* = \lim x_\upsilon^*, \quad \text{aber} \quad \wedge_k |g^{(k)}(y^{(k)})| > k,$$

d. h. $\lim\limits_{k=\infty} |g^{(k)}(y^{(k)})| = +\infty$ im Widerspruch zu Satz 15, 16, nach denen $\lim g^*$ in $[u_0]$ stetig ist.

2. 2) M sei nicht gleichgradig stetig für ein $x_0 \in [u_0]$. Für eine Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ und ein ε gilt also

$$\wedge_\delta \bigvee_{f \in M} \bigvee_{x \in [u_\upsilon]} x \; (|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geqq \varepsilon).$$

Mit einer Nullfolge δ^* folgt hieraus nach dem Auswahlprinzip die Existenz einer Folge x^* aus $[u_0]$ und einer Quasifolge f^* aus M mit

$$\wedge_k (|x^{(k)} - x_0| < \delta^{(k)} \wedge |f^{(k)}(x^{(k)}) - f^{(k)}(x_0)| \geqq \varepsilon).$$

Zu f^* gibt es keine in $[u_0]$ gleichmäßig konvergente Teilquasifolge. Ist nämlich $g^* = f^{(l^*)}$ gleichmäßig konvergent, dann gilt für $y^* = x^{(l^*)}$:

$$\lim y^* = x_0, \quad \text{aber} \quad |g^{(k)}(y^{(k)}) - g^{(k)}(x_0)| \geqq \varepsilon$$

im Widerspruch zu Satz 16.

(Eingegangen am 15. Juli 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 1, S. 25–26 (1951).

Einfacher Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes.

Von

L. Rédei in Szeged (Ungarn).

Wir teilen einen Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes mit, der vieles mit dem dritten GAUSS'schen Beweise gemeinsam hat, aber in einiger Hinsicht einfacher ist als dieser.

Lemma. *Die Diophantische Gleichung*

$$px+qy=k \quad (p, q \text{ Primzahlen};\ p, q \neq 2;\ (p, q)=1;\ k \geqq 0) \tag{1}$$

hat genau

$$N_k = 1+\left[\frac{q'k}{p}\right]+\left[\frac{p'k}{q}\right] (\geqq 0) \tag{2}$$

Lösungen x, y $(\geqq 0)$, *wobei* $[z]$ *die größte ganze Zahl* $\leqq z$ *und* p', q' *ganze Zahlen mit*

$$pp'+qq'=1 \tag{3}$$

bezeichnen. Dabei folgt $N_k \geqq 0$ *direkt aus* (3)[1].

Offenbar sind nämlich die genannten Lösungen x, y die

$$p'k+qt,\ q'k-pt \geqq 0 \qquad (t \text{ ganz}).$$

Diese Ungleichungen lassen sich als

$$-t \leqq \frac{p'k}{q}, \quad t \leqq \frac{q'k}{p}$$

schreiben. In beiden darf rechts „[ ]" ausgesetzt werden, und dann lassen sich beide in

$$-\left[\frac{p'k}{q}\right] \leqq t \leqq \left[\frac{q'k}{p}\right]$$

vereinigen. Die Anzahl dieser t ist eben (2), womit das Lemma bewiesen ist.

Hilfssatz. *Die Diophantische Ungleichung*

$$px+qy<pq \tag{4}$$

hat genau $\frac{1}{4}(p+1)(q+1)$ *Lösungen* x, y $(\geqq 0)$ *mit* $2 \nmid x+y$.

[1] Obiges Lemma samt Beweis behält seine Gültigkeit für beliebige teilerfremde natürliche Zahlen p, q. Dieses Lemma war uns neu und ist gewiß von selbständigem Interesse. Auf weitere Anwendungen kommen wir ein andermal zurück.

Man beachte stets, daß die Bedingung $2 \mid x+y$ damit äquivalent ist, daß die linke Seite von (4) gerade ist.

Die gewünschten Lösungen von (4) kommen unter den Paaren

$$x = 0, \ldots, q;\ y = 0, \ldots, p \qquad (2 \mid x+y)$$

vor, deren Zahl $\frac{1}{2}(p+1)(q+1)$ ist, es genügt also zu zeigen, daß genau die Hälfte dieser Paare (4) befriedigen. Hierzu fassen wir unsere Paare x, y zu zweien als

$$x, y;\ q-x,\ p-y$$

zusammen. Da die entsprechenden Werte

$$px+qy,\ p(q-x)+q(p-y)$$

der linken Seite von (4) gerade sind und $2pq$ zur Summe haben, also der eine $< pq$ der andere $> pq$ ist, so haben wir den Hilfssatz bewiesen.

Dieser läßt sich nach obiger Bemerkung auch als

$$\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(pq-1)} N_{2k} = \tfrac{1}{4}(p-1)(q-1)$$

schreiben. Setzt man (2) ein und verwendet die Abkürzung $\mathfrak{S} f(p,p',q,q') = f(p,p',q,q') + f(q,q',p,p')$, so hat man

$$(5) \qquad \mathfrak{S} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(pq-1)} \left[\frac{2q'k}{p}\right] = \tfrac{1}{4}(p+1)(q+1) - \tfrac{1}{2}(pq+1) = -\tfrac{1}{4}(p-1)(q-1).$$

Für ganze x definiere man $x_p = 1, 0$, je nachdem der absolut kleinste Rest von $x \bmod p$ negativ bzw. nichtnegativ ist. Dann gilt $x_p \equiv \left[\frac{2x}{p}\right] \pmod 2$, somit folgt aus (5)

$$\mathfrak{S} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(pq-1)} (q'k)_p \equiv \tfrac{1}{4}(p-1)(q-1) \pmod 2.$$

In der Summe durchläuft k die Werte $0, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)$, außerdem noch genau $\frac{1}{2}(q-1)$ volle Restsysteme $\bmod p$. Die letzteren k liefern zur Summe den Beitrag $\frac{1}{2}(q-1)\cdot\frac{1}{2}(p-1)$, also gilt (nach Streichung von $k=0$)

$$(6) \qquad \mathfrak{S} \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} (q'k)_p \equiv \tfrac{1}{4}(p-1)(q-1) \pmod 2.$$

Wird die Summe hier mit A bezeichnet, so besagt das Lemma von Gauss $(-1)^A = \left(\frac{q'}{p}\right)$. Deshalb ergibt (6) sofort

$$\left(\frac{q'}{p}\right)\left(\frac{p'}{q}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}.$$

Hier dürfen die Striche „$'$“ nach (3) weggelassen werden, womit der quadratische Reziprozitätssatz bewiesen ist.

(Eingegangen am 30. Oktober 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 1, S. 27–33 (1951).

Über die eindeutige Bestimmbarkeit der Elemente einer endlichen Menge durch zweifache Einteilung.

Von

R. Sprague in Berlin.

Einleitung.

Für eine Menge von n Elementen liege eine Einteilung in elementfremde, nicht-leere Klassen vor. Die Anzahl der Klassen mit genau k Elementen sei a_k. Höchstens für *ein* Element liefert die Einteilung eine nur auf dieses zutreffende Kennzeichnung, nämlich im Fall $a_1 = 1$ für *das in seiner Klasse allein auftretende Element* die soeben kursiv gesetzte. Werden dagegen zwei Einteilungen derselben Menge betrachtet, so kann es sein, daß sie zusammen, auf eine in § 1 zu erläuternde Art, die eindeutige Beschreibung *jedes* Elementes ermöglichen. Genau in diesem Fall existiert außer der identischen keine Permutation der Elemente, die von beiden Einteilungen zugelassen wird.

Nun ist die Frage, ob zwei Permutationsgruppen, die je eine Einteilung invariant lassen, teilerfremd sind, wegen des starken Anwachsens ihrer Ordnungen schon für mäßige Werte von n nicht mehr durch unmittelbaren Vergleich zu entscheiden. Daraus erwächst die Aufgabe, solche elementbestimmende Paare von Einteilungen zu bilden und zu untersuchen. Diese Aufgabe ist für jedes $n > 5$ lösbar (§ 2). Überraschenderweise gibt es sogar Einteilungspaare, deren sämtliche Klassen gleich viel Elemente enthalten und die trotzdem jedes Element eindeutig charakterisieren (§ 5). Die drei folgenden, wesentlich äquivalenten Ausdrucksweisen für diese Tatsache bringen den Fragenkreis in andere Zusammenhänge:

(1) Es existieren reguläre paare Graphen[1]) vom Symmetriegrad 1.

(2) Es gibt Matrizen, die in jeder Reihe gleich viel Einsen enthalten, sonst nur Nullen, und bei keiner Vertauschung der Reihen (einschließlich Transponierens) außer der identischen in sich selbst übergehen.

(3) In manchen symmetrischen Gruppen läßt sich ein System der Imprimitivität derart aufstellen, daß die zugehörige Permutationsgruppe zu einer ihrer konjugierten Gruppen teilerfremd ausfällt.

---

[1]) Terminologie nach D. Kœnig, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

§ 1.

Definitionen und Beispiele.

Die Zahlengruppe $(a_1, a_2, \ldots)$ werde „Typ" der betreffenden Einteilung genannt. Liegen zwei bestimmte Einteilungen E_1, E_2 vor, so bedeute die „zweifache Einteilung $E_{1,2}$" das aus ihnen gebildete Paar; es kann geordnet oder ungeordnet sein. Die Elemente werden mit den Zahlen von 1 bis n bezeichnet, die Klassen durch eckige Klammern. „Benachbart" heißen in $E_{1,2}$ zwei Elemente, wenn es eine Klasse gibt, die beide enthält; zwei Klassen, wenn es ein Element gibt, das beide enthalten. Die Elemente ein-, zwei-, dreigliedriger Klassen mögen bzw. singulär, binär, ternär genannt werden.

1. Beispiel. $n = 4$, E_1: [1] [2] [3, 4],
E_2: [1] [4] [2, 3].

Die Elemente sind eindeutig bestimmt: 1 als beidemal singulär, 2 singulär nur in E_1, 4 ebenso in E_2, 3 bleibt übrig. Hier muß $E_{1,2}$ als geordnetes Paar gelten; sonst lassen sich die Elemente 2 und 4 nicht unterscheiden, weil die Transposition (2, 4) E_1 mit E_2 vertauscht.

2. Beispiel. $n = 6$, E_1: [1] [2] [3, 4] [5, 6],
E_2: [3] [1, 5] [2, 4, 6].

Nur 2 ist singulär und ternär, 3 in der Einteilung, welche die dreigliedrige Klasse enthält, singulär; weiter ist 4 zu 3, 6 zu 2 und 4, 5 zu 6, 1 zu 5 benachbart. Immer wird ein neues Element durch frühere bestimmt. Wenn E_1 und E_2 verschiedene Typen haben, ist die Bezugnahme auf die Indizes ersichtlich vermeidbar.

3. Beispiel. $n = 7$, E_1: [1, 2] [3, 4] [5, 6, 7],
E_2: [1, 5] [4, 6] [2, 3, 7].

Beide Einteilungen lassen das Transpositionenprodukt (1, 4) (2, 3) (5, 6) zu und kennzeichnen daher keins dieser sechs Elemente.

4. Beispiel. $n = 8$, E_1: [1] [2, 3] [4, 5] [6, 7, 8],
E_2: [6] [1, 2] [5, 7] [3, 4, 8].

Die Elemente lassen sich eindeutig charakterisieren: 8 ist beidemal ternär, 6 ternär und singulär, 7 zu 6 und 8 benachbart, 5 zu 7, 4 zu 5, 3 zu 4 und 8, 2 zu 3, 1 zu 2 benachbart. Trotz Gleichheit der Typen von E_1 und E_2 bestimmt $E_{1,2}$ als ungeordnetes Paar alle Elemente.

Hiernach zerfallen die zweifachen Einteilungen in drei getrennte Kategorien Δ_0, Δ_1, Δ_2, je nachdem die eindeutige Bestimmung sämtlicher Elemente allein auf Grund von Klassenumfängen und Nachbarschaftsbeziehungen

Δ_0: nicht möglich ist, weil eine nicht-identische Permutation existiert, die von E_1 und E_2 zugelassen wird (3. Beispiel);

Δ_1: möglich ist, jedoch nur bei geordnetem Paar $E_{1,2}$. Die zu E_1 bzw. E_2 gehörenden Permutationsgruppen sind zwar teilerfremd, aber es gibt eine Permutation, die E_1 mit E_2 vertauscht; hierfür ist Gleichheit der Typen notwendig (1. Beispiel);

Δ_2: ohne diese Einschränkung gelingt (2. und 4. Beispiel).

Die Vereinigungsmenge von Δ_1 und Δ_2 werde mit Δ bezeichnet. In Worten könnte man die (zweifachen) Einteilungen als „nicht-", „halb-" und „volldeskriptiv" unterscheiden und die beiden letzten Kategorien „deskriptiv" nennen.

§ 2.

Graphen.

Jede zweifache Einteilung $E_{1,2}$ läßt sich durch einen Streckenkomplex, einen Graphen, veranschaulichen. Man ordnet in umkehrbar eindeutiger Art jeder Klasse von E_1 (E_2) einen „weißen" („schwarzen") Punkt zu und verbindet je zwei ungleichfarbige Punkte genau dann durch eine „Kante", wenn die zugehörigen Klassen benachbart sind. Diese Kante stellt das gemeinsame Element dar und führe denselben Namen.

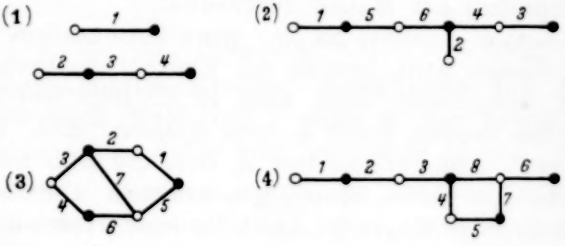

Fig. 1.

Fig. 1 zeigt die Graphen der Beispiele.

Man sieht, daß (3) schon durch „Spiegelung" an der Kante 7 in sich übergeht (Δ_0), daß dagegen (1) erst bei Vertauschung von weiß und schwarz in sich übergeht (Δ_1) und die Graphen (2) und (4) auch dann nicht (Δ_2). (2) veranschaulicht das Paar $E_{1,2}$ aus Δ_2 mit kleinstem n, (4) dasjenige mit überdies gleichem Typ.

Um zu beliebigem $n > 5$ eine zweifache Einteilung der Kategorie Δ_2 herzustellen, braucht man nur an den weißen Endpunkt der Kante 1 von (2) einen Streckenzug von $n-6$ Kanten anzuhängen mit alternierenden Farben der Punkte. Die Beschreibung zu (2) wäre dann so zu ergänzen: es ist 7 zu 1, 8 zu 7 usw. benachbart. Damit ist eine neuerdings gestellte rekreative Aufgabe [2]) gelöst, die in der hier gebrauchten Ausdrucksweise eine deskriptive zweifache Einteilung zu $n = 100$ verlangt.

[2]) „Archimedes", Heft 2 (April 1949), S. 10, Aufgabe (29).

§ 3.

Matrizen.

Jeder zweifachen Einteilung $E_{1,2}$ läßt sich eine „E-Matrix" zuordnen, deren Zeilen (Spalten) den Klassen von E_1 (E_2) entsprechen und deren Felder je durch eine Null (oder die betreffende Elementnummer) bezeichnet sind, wenn die einander schneidenden Reihen zu benachbarten Klassen gehören, sonst etwa durch ein Kreuz. Haben zwei Klassen mehr als ein Element gemeinsam, so ist die Kategorie ersichtlich Δ_0; von diesem Fall werde abgesehen. Da die Zuordnung der Klassen zu den Reihen der Matrix innerhalb der angegebenen Regel willkürlich bleibt, stellen alle E-Matrizen, die durch Umordnung von Reihen einschließlich (ausschließlich) Transponierens ineinander übergeführt werden können, dieselbe zweifache Einteilung als ungeordnetes (geordnetes) Paar E_1, E_2 dar.

Überträgt man die Kategorien $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ von den zweifachen Einteilungen auf ihre Matrizen, so gilt folgendes:

Die Δ_0- (Δ_1-)Matrizen sind genau diejenigen, welche durch Reihenvertauschungen ohne (nicht ohne) Transponieren in sich übergeführt werden können. Die Δ_2-Matrizen bilden den Rest.

Beweis. Die Klassen von E_1 (E_2) seien in der Reihenfolge numeriert, wie sie hingeschrieben sind, und den entsprechenden Zeilen (Spalten) der Matrix zugeordnet.

a) $E_{1,2}$ gehöre zu Δ_0. Eine Permutation ϱ, die von E_1 und E_2 zugelassen wird, ersetze das Element x durch $y \neq x$. Sind x und y in E_1 benachbart, dann nicht in E_2; dort werden daher Klassen versetzt. Also werden durch ϱ stets Klassen, d. h. in der Matrix Reihen versetzt. Andererseits hat x, dem die Null auf dem Feld a_{ik} entsprach, nur den neuen Namen y bekommen. Dort steht demnach wieder eine Null; die Matrix ist durch Reihenvertauschungen (ohne Transponieren) in sich selbst übergegangen. Umgekehrt gibt eine solche Matrix, wenn sie beidemal mit Elementnummern statt Nullen geschrieben wird, eine Permutation der Elemente an, die von E_1 und E_2 zugelassen wird.

b) $E_{1,2}$ gehöre zu Δ_1. Werden E_1 und E_2 durch die Permutation σ vertauscht, so wird σ^2 von beiden zugelassen, ist also die identische Permutation. Daher ist σ ein Produkt elementfremder Transpositionen, darunter etwa (x, y). Durch Umnumerieren der Klassen läßt sich erreichen, daß in E_1 die Klassen mit x bzw. y dieselben Nummern bekommen wie in E_2 die Klassen mit y bzw. x. Dies werde für alle Faktoren von σ durchgeführt; es läuft in der Matrix auf Zeilenvertauschungen hinaus. Für die neue Matrix bedeutet σ einfach den Übergang zu ihrer transponierten, welcher nach der Schlußweise von a) die ursprüngliche Matrix wieder herstellt. Umgekehrt entspricht den Reihenvertauschungen mit obligatem Transponieren eine Permutation der Elemente, die E_1 und E_2 vertauscht, ohne von beiden zugelassen

zu werden (w. z. b. w.). Jede A_1-Matrix kann also durch Reihenvertauschung symmetrisch gemacht werden und keine symmetrische eine A_2-Matrix sein. Matrizen zu den früheren Beispielen sind

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} + & 0 & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} + & 0 & + & + \\ + & 0 & + & 0 \\ + & + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

§ 4.

Reguläre deskriptive zweifache Einteilungen.

Ein Graph heißt „regulär vom Grade g", wenn in jedem Punkt genau g Kanten zusammentreffen. Auf zweifache Einteilungen angewandt, bedeute „regulär" analog die Gleichheit der Umfänge aller Klassen und „Grad" die Anzahl g der Elemente jeder Klasse. Ebenso heiße eine E-Matrix „regulär", wenn jede Reihe die gleiche Anzahl von Nullen aufweist; reguläre Matrizen sind quadratisch.

In deskriptiven regulären zweifachen Einteilungen müssen die Elementbeschreibungen anders lauten als in § 1, wo die Ungleichheit der Klassenumfänge dienlich war.

Seien x_0 und y zwei nicht notwendig verschiedene Elemente und es existiere eine „Kette"

$$[x_0, x_1, \ldots]\,[x_1, x_2, \ldots] \ldots [x_{p-1}, y, \ldots] \qquad (p \geqq 1)$$

paarweis verschiedener benachbarter Klassen, deren erste aus E_i ($i = 1$ oder 2) stammt. Ist nach Wahl von i dann p_i der kleinste Wert von p, zu dem es eine solche Kette gibt, so werde $p_1 = \overline{x_0, y}$, $p_2 = \overline{\overline{x_0, y}}$ gesetzt. Für $x_0 = y$ stimmen wegen der Umkehrbarkeit der Kette beide Zahlen überein; dann soll $\overline{x_0, x_0}$ die „Periode" von x_0 genannt werden. Die Periode ist stets eine gerade Zahl $\geqq 4$.

Diese Begriffe haben für Graphen und E-Matrizen sehr einfache anschauliche Bedeutungen. Beim Graphen (4) wird $\overline{4, 6} = 3$, man muß die Kante 4 über ihren weißen Endpunkt verlassen: 4, 5, 7, 6; $\overline{\overline{4, 6}} = 2$, über den schwarzen Endpunkt: 4, 8, 6; das gibt rückwärts $\overline{6, 4} = 2$; $\overline{\overline{6, 4}}$ existiert nicht. Die Perioden sind $\overline{4, 4} = \overline{5, 5} = \overline{7, 7} = \overline{8, 8} = 4$. Entsprechend findet man in der Matrix M_4, mit Elementnummern statt Nullen:

$$M_4 = \begin{bmatrix} + & 1 & + & + \\ + & 2 & + & 3 \\ + & + & 5 & 4 \\ 6 & + & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

für $\overline{4, 6}$, von 4 waagerecht ausgehend und immer abwechselnd einer Zeile und einer Spalte folgend, die Kette 4, 5, 7, 6, also $\overline{4, 6} = 3$,

dagegen in 4 senkrecht beginnend, die Kette 4, 8, 6, d. h. $\overline{\overline{4, 6}} = 2 = \overline{\overline{6, 4}}$. Von 6 aus ist in senkrechter Richtung kein besetztes Feld zu erreichen. Das Periodenviereck 4, 5, 7, 8 ist deutlich genug.

Die $\overline{x, y}$- und $\overline{\overline{x, y}}$-Ketten sind in der Matrix offene Züge von randparallelen Strecken, die Periodenketten sind geschlossen. Jede Strecke verbindet zwei besetzte Felder. Treten Schnittpunkte auf, so fallen sie in leere (Kreuz-)Felder der Matrix, sonst ließe sich die Kette entgegen ihrer Definition verkürzen. Jede Reihe trägt höchstens eine Strecke, außerdem gegebenenfalls eine den Anfangspunkt. Das Wesentliche der Zahlen $\overline{x, x}$, $\overline{\overline{x, x}}$, $\overline{x, y}$ und $\overline{\overline{x, y}}$ ist ihre Invarianz gegenüber Reihenvertauschungen; beim Transponieren wechseln $\overline{x, y}$ und $\overline{\overline{x, y}}$ nur gegenseitig ihre Werte aus.

Es folgt nun eine deskriptive reguläre zweifache Einteilung.

5. Beispiel. $n = 24$, $g = 3$, Kategorie Δ_1.

$$E_1: [1, 2, 3]\ [4, 5, 6] \ldots [19, 20, 21]\ [22, 23, 24],$$
$$E_2: [1, 4, 7]\ [2, 10, 22]\ [3, 11, 13]\ [5, 8, 16]\ [9, 17, 19]\ [12, 14, 20]\ [15, 18, 23]\ [6, 21, 24].$$

Zum Nachweis der Kategorie operiert man am bequemsten mit der Matrix M_5; man ermittelt dann die Periode jedes Elements und trägt sie an dessen Stelle in eine neue Matrix P_5 ein:

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & + & + & + & + & + \\ 4 & + & + & 5 & + & + & + & 6 \\ 7 & + & + & 8 & 9 & + & + & + \\ + & 10 & 11 & + & + & 12 & + & + \\ + & + & 13 & + & + & 14 & 15 & + \\ + & + & + & 16 & 17 & + & 18 & + \\ + & + & + & + & 19 & 20 & + & 21 \\ + & 22 & + & + & + & + & 23 & 24 \end{pmatrix}, \qquad P_5 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & + & + & + & + & + \\ 4 & + & + & 4 & + & + & + & 6 \\ 4 & + & + & 4 & 4 & + & + & + \\ + & 4 & 4 & + & + & 4 & + & + \\ + & + & 4 & + & + & 4 & 6 & + \\ + & + & + & 4 & 4 & + & 6 & + \\ + & + & + & + & 6 & 6 & + & 6 \\ + & 6 & + & + & + & + & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Jetzt kann man ein Element x_0 durch folgende Aussage eindeutig beschreiben: x_0 hat die Periode 6 und ist nur zu Elementen der Periode 4 benachbart. x_0 ist das Element 1. Für $x_0 = 1$ bilde man die Matrizen zu $\overline{x_0, y}$ und $\overline{\overline{x_0, y}}$, die gleich in einer Matrix $M_5(x_0)$ vereinigt werden mögen: Die linke Zahl jedes Feldes sei $\overline{x_0, y}$.

$$M_5(x_0) = \begin{pmatrix} 6{,}6 & 1{,}5 & 1{,}6 & + & + & + & + & + \\ 5{,}1 & + & + & 5{,}2 & + & + & + & 4{,}2 \\ 6{,}1 & + & + & 6{,}2 & 6{,}2 & + & + & + \\ + & 2{,}5 & 2{,}6 & + & + & 3{,}5 & + & + \\ + & + & 2{,}6 & + & + & 3{,}5 & 3{,}5 & + \\ + & + & + & 5{,}3 & 5{,}3 & + & 4{,}4 & + \\ + & + & + & + & 5{,}3 & 4{,}4 & + & 4{,}3 \\ + & 2{,}4 & + & + & + & + & 3{,}4 & 3{,}3 \end{pmatrix}.$$

Da keine zwei Reihen in allen drei Zahlenpaaren übereinstimmen, sind alle Felder der Matrix eindeutig bestimmt. Wegen ihrer Symmetrie zur Hauptdiagonale kann die Matrix nicht der Kategorie $\mathfrak{A}_2$, sondern nur $\mathfrak{A}_1$ angehören.

§ 5.

Konstruktion beliebig vieler regulärer zweifacher Einteilungen der Kategorie $\mathfrak{A}_2$.

Hierfür werden zuerst aus M_5 zwei verschiedene Elemente l und m gewählt, die folgende Voraussetzungen erfüllen: 1) $\overline{l, m} > 2$, $\overline{\overline{l, m}} > 2$; 2) $\overline{l, l} > 4$, $\overline{m, m} > 4$; 3) weder l noch m liegen auf der Hauptdiagonale, noch beide zu ihr symmetrisch. Alles dies leisten z. B. die Elemente $l = 6$ und $m = 15$. Die weiteren Schritte werden durchsichtiger bei der Betrachtung eines Teils des zugehörigen Graphen. Es seien L und M (L' und M') die weißen (schwarzen) Endpunkte von l bzw. m. Man schalte auf LL' die Punkte $L_1, \ldots, L_{2t}$ ein, in den Farben abwechselnd, ebenso $M_1, \ldots, M_{2t}$ auf $M'M$. Dann verbinde man L_i mit M_i ($i = 1, 2, \ldots, 2t$) durch eine Kante. Fig. 2 veranschaulicht den Fall $t = 2$.

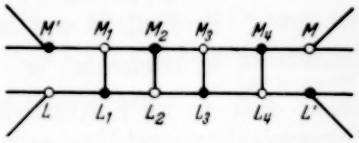

Fig. 2.

So entsteht ein $4t$-Eck

$$L_1, \ldots, L_{2t}\, M_{2t}, \ldots, M_1,$$

dessen Seiten sämtlich die Periode 4 haben und je nur einem Viereck angehören. Dagegen haben LL_1, $L_{2t}L'$, $M'M_1$ und $M_{2t}M$ wegen 1) höhere Perioden, das Vieleck ist also gleichsam isoliert.

Man kann nun t so groß wählen, daß die soeben durch das Polygon angegebene Kette paarweis verschiedener benachbarter Elemente, deren jedes die Periode 4 hat, länger ausfällt als jede solche Kette des ursprünglichen Graphen. (Für das 5. Beispiel genügt $t \geqq 2$). Ist t in dieser Weise gewählt, so muß jede Abbildung des Graphen auf sich selbst auch das $4t$-Eck auf sich selbst abbilden, und zwar so, daß diagonale Kanten wie L_2M_2 und L_3M_3, die im Gegensatz zu den Seiten je zwei Vierecken angehören, wieder in solche Kanten übergehen. Im ganzen werden also die Kanten l und m entweder je auf sich selbst oder aber aufeinander abgebildet, wenn man jetzt den Zustand vor dem Einschalten wieder herstellt. Die zweite Möglichkeit widerspricht der Voraussetzung 3), bei der ersten handelt es sich um die identische Abbildung. Daher gehört der Graph mit den eingeschalteten Punkten und Kanten der Kategorie $\mathfrak{A}_2$ an.

(Eingegangen am 24. Oktober 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 1, S. 34—51 (1951).

Abhängigkeit von Funktionen.

Von

Martin Kneser in Berlin.

Einleitung.

Grob gesagt heißen m Funktionen $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ von n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ abhängig, wenn es eine nicht identisch verschwindende Funktion $F(y_1, \ldots, y_m)$ gibt, so daß

$$F(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$$

ist. Diesen Begriff haben K. Knopp und R. Schmidt [1]) genau gefaßt und exakt bewiesen, daß bei stetig differenzierbaren Funktionen im Falle $m = n$ dafür notwendig und hinreichend ist, daß die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|$ identisch verschwindet. Die entsprechende Bedingung im Fall $m < n$ lautet: Der Rang der Funktionalmatrix $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ ist höchstens $m - 1$. Daß dies notwendig ist, ist leicht zu sehen; daß es auch hinreichend ist, bewies unter ziemlich starken Differenzierbarkeitsvoraussetzungen A. B. Brown [2]). Offen blieb die Frage, ob diese Voraussetzungen nötig sind. Hier soll gezeigt werden, daß man mit erheblich weniger auskommt. Andererseits wird an Beispielen gezeigt, daß sich die neuen Voraussetzungen nicht mehr verringern lassen. Der Grundgedanke des Beweises ist der gleiche wie bei Brown; die Verbesserung wird dadurch erzielt, daß an die Stelle der gewöhnlichen Differenzierbarkeit in einer offenen Menge die auf einer beliebigen Menge tritt, die mit Hilfe der Taylorschen Formel erklärt wird. § 1 enthält zwei Sätze darüber. § 2 bringt den Hauptschritt des Beweises; er enthält zwei Hilfssätze, die schon bei Brown stehen; der leichteren Lesbarkeit halber sind auch für diese die Beweise angeführt. § 3 bringt die Ergebnisse und § 4 Beispiele.

§ 1.

Im Folgenden haben wir es mit Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ von n reellen Veränderlichen zu tun. Das n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ fassen wir als

[1]) K. Knopp und R. Schmidt, Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen, Math. Z. **25** (1926) 373—381.

[2]) A. B. Brown, Functional dependance, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935) 379—394.

Punkt eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes E_n auf und schreiben dafür kürzer x. Sind x und x' zwei Punkte des E_n, so sei mit $|x'-x|$ ihr Abstand bezeichnet.

Es sei nun $k>0$ eine ganze Zahl und A eine Menge des E_n, auf der die Funktionen $f(x)=f_{0,\dots,0}(x)$ und $f_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n}(x)$ erklärt sind; dabei durchlaufe $(\varkappa_1,\dots,\varkappa_n)$ alle n-tupel von nicht negativen ganzen Zahlen, deren Summe höchstens k ist. Mit Hilfe dieser Funktionen bilden wir für irgend zwei Punkte x und x' aus A die Restglieder $R_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n}(x,x')$ aus den Entwicklungen

$$(1)\qquad f_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n}(x') = \sum_{\substack{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n+\lambda_1+\cdots+\lambda_n\leqq k\\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\geqq 0}} \frac{1}{\lambda_1!\dots\lambda_n!} f_{\varkappa_1+\lambda_1,\dots,\varkappa_n+\lambda_n}(x)(x_1'-x_1)^{\lambda_1}\dots(x_n'-x_n)^{\lambda_n} + R_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n}(x,x').$$

Wir sagen, $f(x)$ sei in A k-mal stetig differenzierbar mit den Ableitungen

$$(2)\qquad \frac{\partial^{\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n} f}{\partial x_1^{\varkappa_1}\dots\partial x_n^{\varkappa_n}} = f_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n},$$

wenn es zu jedem Punkt $x^0\in A$ und $\varepsilon>0$ eine Umgebung U_A von x^0 in A gibt, so daß für irgend zwei Punkte x, $x'\in U_A$ die Ungleichungen

$$(3)\qquad |R_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n}(x,x')| \leqq \varepsilon\,|x'-x|^{k-(\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n)}$$

gelten [3]).

Die Funktionen $f_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_n}(x)$ sind durch diese Forderungen im allgemeinen nicht eindeutig festgelegt. Wenn z. B. $n=2$, A die x_1-Achse und $k=1$ ist, so kann für $\frac{\partial f}{\partial x_2}=f_{0,1}$ eine beliebige stetige Funktion gewählt werden. Für einen isolierten Punkt von A sind alle Ableitungen beliebig.

Zur Vereinfachung ersetzen wir jetzt den Index $(\varkappa_1,\dots,\varkappa_n)$ durch $\varkappa$ und schreiben $|\varkappa|=\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n$. Mit kleinen griechischen Buchstaben sollen im Folgenden immer solche n-tupel nicht negativer ganzer Zahlen bezeichnet werden. In leicht verständlicher Abkürzung lauten die Formeln (1) bis (3) dann folgendermaßen.

$$(1')\qquad f_\varkappa(x') = \sum_{|\varkappa+\lambda|\leqq k} \frac{1}{\lambda!} f_{\varkappa+\lambda}(x)(x'-x)^\lambda + R_\varkappa(x,x')$$

$$(2')\qquad \frac{\partial^\varkappa f}{\partial x^\varkappa} = f_\varkappa$$

$$(3')\qquad |R_\varkappa(x,x')| \leqq \varepsilon\,|x'-x|^{k-|\varkappa|}.$$

[3]) Dieser Begriff und der Beweis des Hilfssatzes 1 für den Fall $k=l$ finden sich bei H. Whitney, Differentiable functions defined in arbitrary subsets of euclidean space, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936) 309—317.

Für $|\varkappa| = k$ lautet die Formel (1') einfach

$$R_\varkappa(x, x') = f_\varkappa(x') - f_\varkappa(x)$$

und die Ungleichung (3') besagt, daß $f_\varkappa$ auf A stetig ist. Daraus folgt, daß alle Ableitungen $f_\varkappa$ stetig und sogar $(k - |\varkappa|)$-mal stetig differenzierbar sind, und daß für $i < k$ die Funktion $f(x)$ auf A auch i-mal stetig differenzierbar ist.

Für den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ist die Forderung (3') äquivalent zu der folgenden: Es gibt für $|\varkappa| \leqq k$ und $|\varkappa + \lambda| = k$ Funktionen $f_{\varkappa,\lambda}(x, x')$, so daß in U_A die Beziehungen

$$(4) \qquad f_\varkappa(x') = \sum_{|\varkappa+\lambda|<k} \frac{1}{\lambda!} f_{\varkappa+\lambda}(x)\,(x'-x)^\lambda + \sum_{|\varkappa+\lambda|=k} \frac{1}{\lambda!} f_{\varkappa,\lambda}(x, x')\,(x'-x)^\lambda$$

$$(5) \qquad |f_{\varkappa,\lambda}(x, x') - f_{\varkappa+\lambda}(x)| \leqq \varepsilon$$

gelten.

Daß aus (4) und (5) bis auf einen konstanten Faktor die Ungleichung (3') folgt ist klar. Ist umgekehrt (3') erfüllt, und ist etwa $|x_1' - x_1|$ der größte unter den Beträgen $|x_i' - x_i|$, so setze man

$$f_{\varkappa,\lambda}(x, x') = \begin{cases} f_{\varkappa+\lambda}(x) + \dfrac{\lambda!}{(x'-x)^\lambda} R_\varkappa(x, x') & \text{für} \quad \lambda = (k - |\varkappa|, 0, \ldots, 0) \\ f_{\varkappa+\lambda}(x) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt die Gleichung (4) und es wird

$$|f_{\varkappa,\lambda}(x, x') - f_{\varkappa+\lambda}(x)| \leqq \frac{\lambda!}{|(x'-x)^\lambda|} |R_\varkappa(x, x')| \leqq \lambda! \left(\frac{|x'-x|}{|x_1'-x_1|}\right)^{k-|\varkappa|} \cdot \varepsilon \leqq k!\, \sqrt{n}^k\, \varepsilon.$$

Ist A eine offene Menge, so geht unsere Definition auf Grund der Taylorschen Formel gerade in die übliche über, was die Bezeichnung rechtfertigt.

Im Folgenden treten öfters m Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ von n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ auf; wir fassen diese dann zu einer Abbildung $y = g(x)$ eines Teiles des E_n in den E_m auf. Mit dieser Bezeichnung gilt der

Hilfssatz 1. *Es sei $k \geqq l \geqq 1$; die Funktionen $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ seien auf der Menge A des E_n l-mal stetig differenzierbar; auf der Bildmenge $B = g(A)$ sei die Funktion $f(y)$ k-mal stetig differenzierbar, und alle ihre Ableitungen erster bis $(k-l)$ter Ordnung seien dort null*[4]*). Dann ist die Funktion $h(x) = f(g(x))$ auf A k-mal stetig differenzierbar mit den Ableitungen $h_\varkappa(x)$, die durch die Formel (12) gegeben sind, und die für $1 \leqq |\varkappa| \leqq k - l$ verschwinden.*

Beweis. Es sei x^0 ein Punkt aus A und $y^0 = g(x^0)$ sein Bild in B. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung V_B

[4]) Daraus folgt nicht etwa, daß $f(y)$ konstant ist; das sieht man z. B. an den Beispielen des § 4, aber auch an einfacheren.

von y^0 in B und Funktionen $f_{\varkappa,\lambda}(y, y')$, so daß die Beziehungen

$$(6) \qquad f_\varkappa(y') = \sum_{|\varkappa+\lambda|<k} \frac{1}{\lambda!} f_{\varkappa+\lambda}(y)\,(y'-y)^\lambda + \sum_{|\varkappa+\lambda|=k} \frac{1}{\lambda!} f_{\varkappa,\lambda}(y, y')\,(y'-y)^\lambda$$

$$(7) \qquad |f_{\varkappa,\lambda}(y, y') - f_{\varkappa+\lambda}(y)| \leqq \varepsilon$$

gelten, falls nur y und y' in V_B liegen. U_A sei eine Umgebung von x^0 in A, deren Bild $g(U_A)$ ganz in V_B liegt und deren Durchmesser höchstens ε ist; außerdem können wir U_A so klein wählen, daß für $x, x' \in U_A$ die Beziehungen

$$(8) \qquad g_\lambda(x') = \sum_{|\lambda+\mu|<l} \frac{1}{\mu!} g_{\lambda+\mu}(x)(x'-x)^\mu + \sum_{|\lambda+\mu|=l} \frac{1}{\mu!} g_{\lambda,\mu}(x, x')\,(x'-x)^\mu$$

$$(9) \qquad |g_{\lambda,\mu}(x, x') - g_{\lambda+\mu}(x)| \leqq \varepsilon$$

mit gewissen Funktionen $g_{\lambda,\mu}(x, x')$ gelten. Dabei sind die Entwicklungen der einzelnen Funktionen $g_i(x)$ zu einer Entwicklung des Vektors $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$ zusammengefaßt. Dann sind in U_A die Funktionen $g_\lambda(x)$ und $g_{\lambda,\mu}(x, x')$ und in V_B die Funktionen $f_\varkappa(y)$ und $f_{\varkappa,\lambda}(y, y')$ beschränkt.

In die Gleichung (6) setzen wir $y = g(x)$, $y' = g(x')$ und $\varkappa = 0$ ein. Das ergibt

$$f(g(x')) = \\ = \sum_{|\lambda|<k} \frac{1}{\lambda!} f_\lambda(g(x))\,(g(x') - g(x))^\lambda + \sum_{|\lambda|=k} \frac{1}{\lambda!} f_{0,\lambda}(g(x), g(x'))\,(g(x') - g(x))^\lambda.$$

Hierin setzen wir (8) ($\lambda = 0$) ein und ordnen nach Potenzen von $x' - x$. Alle Summanden höherer als k-ter Ordnung fassen wir zu einem Restglied $R_1(x, x')$ zusammen und schätzen sie durch

$$\text{const}\,|x' - x|^{k+1} \leqq \text{const}\,\varepsilon\,|x' - x|^k$$

ab; die in dieser und allen folgenden Abschätzungen auftretenden Konstanten sind aus oberen Schranken für die Ableitungen von $g(x)$ in U_A und von $f(y)$ in V_B zusammengesetzt und vergrößern sich daher bei Verkleinerung von U_A nicht. Im übrigen Teil der Summe kommen die Koeffizienten $f_{0,\lambda}(g(x), g(x'))$ nur in den Gliedern k-ter Ordnung vor, denn jeder von ihnen ist mit k Faktoren der Form $g_i(x') - g_i(x)$, also mit mindestens k Faktoren $x_i' - x_i$ multipliziert; das gleiche gilt aber auch von den Größen $g_{0,\mu}(x, x')$, denn jede von ihnen ist zunächst in der Entwicklung (8) ($\lambda = 0$) mit l Faktoren $x_i' - x_i$ multipliziert, und dann, da die Entwicklung von $f(y') - f(y)$ erst mit den Gliedern $(k - l + 1)$ter Ordnung anfängt, noch mit $k - l$ anderen Faktoren $g_i(x') - g_i(x)$; im ganzen stehen also bei jedem der Koeffizienten $g_{0,\mu}(x, x')$ mindestens $l + (k - l) = k$ Faktoren der Form $x_i' - x_i$, d. h. er kommt nur in den Gliedern k-ter Ordnung vor. Ersetzen wir nun in unserer Summe $f_{0,\lambda}(g(x), g(x'))$ durch $f_\lambda(g(x))$ und $g_{0,\mu}(x, x')$ durch $g_\mu(x)$, so ändert sie sich um einen Betrag $R_2(x, x')$, der sich wegen (7) und (9)

durch $\text{const}\,\varepsilon|x'-x|^k$ abschätzen läßt. Bezeichnen wir die Koeffizienten der veränderten Summe mit $\frac{1}{\varkappa!}h_\varkappa(x)$ und setzen wir $R_1(x,x')-R_2(x,x')=R(x,x')$, so gilt

$$h(x')=f(g(x'))=\sum_{|\varkappa|\leqq k}\frac{1}{\varkappa!}h_\varkappa(x)\,(x'-x)^\varkappa+R(x,x') \tag{10}$$

$$|R(x,x')|\leqq \text{const}\,\varepsilon|x'-x|^k. \tag{11}$$

Dabei sind die Funktionen $h_\varkappa(x)$ gewisse Polynome in den Ableitungen $f_\lambda(g(x))$ und $g_\lambda(x)$, die für $|\varkappa|\leqq k-l$ identisch verschwinden und deren Bauart wir bestimmen wollen.

Wir bilden mit unbestimmten Koeffizienten $F_\varkappa$, G_λ die Polynome

$$F(Y)=\sum_{|\varkappa|\leqq k}\frac{1}{\varkappa!}F_\varkappa Y^\varkappa,\quad G(X)=\sum_{1\leqq|\lambda|\leqq l}\frac{1}{\lambda!}G_\lambda X^\lambda$$

und deren Ableitungen

$$F_\varkappa(Y)=\sum_{|\varkappa+\lambda|\leqq k}\frac{1}{\lambda!}F_{\varkappa+\lambda}Y^\lambda,\quad G_\lambda(X)=\sum_{1\leqq|\lambda+\mu|\leqq l}\frac{1}{\mu!}G_{\lambda+\mu}X^\mu.$$

Dabei steht wieder Y für $Y_1,\ldots,Y_m$, X für $X_1,\ldots,X_n$ und $G(X)$ für $G_1(X),\ldots,G_m(X)$. Durch Einsetzen der Polynome $G(X)$ in $F(Y)$ erhalten wir

$$H(X)=F(G(X))=\sum_\varkappa\frac{1}{\varkappa!}H_\varkappa X^\varkappa,$$

wo $H_\varkappa=A_\varkappa(F_\lambda,G_\lambda)$ gewisse Polynome mit positiven Koeffizienten in den Unbestimmten F_λ mit $|\lambda|\leqq|\varkappa|$ und G_λ sind. Insbesondere kommen diejenigen F_λ, für die $|\lambda|=k$ ist nur in den Polynomen $A_\varkappa$ mit $|\varkappa|\geqq k$ vor. Ersetzen wir das Polynom $F(Y)$ durch

$$F^0(Y)=\sum_{k-l<|\varkappa|\leqq k}\frac{1}{\varkappa!}F_\varkappa Y^\varkappa,$$

so erhalten wir ein anderes Polynom $H^0(X)=F^0(G(X))$, dessen Koeffizienten $H^0_\varkappa=A^0_\varkappa(F_\lambda,G_\lambda)$ andere Polynome sind, die aus $A_\varkappa(F_\lambda,G_\lambda)$ entstehen, indem man $F_\lambda=0$ setzt für $|\lambda|\leqq k-l$. Da $F^0(Y)$ nur Glieder $(k-l+1)$ter und höherer Ordnung enthält, $G(X)$ außerdem kein Absolutglied hat, so kommen die Koeffizienten G_λ mit $|\lambda|=l$ nur in denjenigen Polynomen $A^0_\varkappa$ vor, für die $|\varkappa|\geqq k$ ist.

Setzen wir jetzt $F_\varkappa=f_\varkappa(y)$ und $Y=y'-y$, so wird $F(Y)=F^0(Y)$ gerade die rechte Seite der Gleichung (6) ($\varkappa=0$), nur daß $f_{0,\lambda}(y,y')$ durch $f_\lambda(y)$ ersetzt ist; entsprechend wird $G(X)$ die rechte Seite der Gleichung (8) ($\lambda=0$) mit $g_{l,\mu}(x)$ statt $g_{0,\mu}(x,x')$, wenn wir $G_\lambda=g_\lambda(x)$ und $X=x'-x$ setzen. Mit $y=g(x)$ und $y'=g(x')$ wird schließlich $H(X)=H^0(X)$ bis auf Glieder höherer als k-ter Ordnung der Hauptteil der Entwicklung von $h(x')-h(x)$ aus (10). Daraus ergibt sich für $1\leqq|\varkappa|\leqq k$ die Gleichung

$$h_\varkappa(x)=A_\varkappa(f_\lambda(g(x)),g_\lambda(x))=A^0_\varkappa(f_\lambda(g(x)),g_\lambda(x)). \tag{12}$$

Wir bilden nun das Polynom $H(X+Z)$ in den zwei Variablenreihen X und Z. Einerseits ist

$$(13) \qquad H(X+Z) = \sum_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} H_\varkappa(X)\, Z^\varkappa = \sum_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} \Big(\sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda!} H_{\varkappa+\lambda}\, X^\lambda \Big) Z^\varkappa,$$

andererseits

$$H(X+Z) = F(G(X+Z)) = F\Big(G(X) + \sum_{1 \leqq |\lambda| \leqq l} \frac{1}{\lambda!} G_\lambda(X)\, Z^\lambda\Big)$$

$$= \sum_{|\varkappa| \leqq k} \frac{1}{\varkappa!} F_\varkappa(G(X)) \Big(\sum_{1 \leqq |\lambda| \leqq l} \frac{1}{\lambda!} G_\lambda(X)\, Z^\lambda \Big)^\varkappa.$$

Dieses Polynom in Z hat gerade die Gestalt von $H(Z)$, nur daß die Unbestimmten $F_\varkappa$ und G_λ durch $F_\varkappa(G(X))$ und $G_\lambda(X)$ ersetzt sind. Also gilt

$$H(X+Z) = \sum_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} A_\varkappa(F_\lambda(G(X)),\, G_\lambda(X))\, Z^\varkappa.$$

Vergleich mit (13) ergibt die Identität in den Unbestimmten F_μ, G_μ und X

$$A_\varkappa(F_\lambda(G(X)),\, G_\lambda(X)) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda!} A_{\varkappa+\lambda}(F_\mu, G_\mu)\, X^\lambda.$$

Hierin setzen wir $F_\mu = 0$ für $|\mu| \leqq k-l$ und erhalten so

$$(14) \qquad A_\varkappa(F_\lambda^0(G(X)),\, G_\lambda(X)) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda!} A^0_{\varkappa+\lambda}(F_\mu, G_\mu)\, X^\lambda.$$

Auf der rechten Seite kommen die Unbestimmten F_μ mit $|\mu| = k$ und G_μ mit $|\mu| = l$ nur in solchen Gliedern vor, für die $|\varkappa + \lambda| \geqq k$ ist, die also in X mindestens den Grad $k - |\varkappa|$ haben. Da die Polynome $F_\lambda^0(Y)$ und $G_\lambda(X)$ — aufgefaßt als Polynome in den Unbestimmten F_μ, G_μ, Y und X — ebenso wie die Polynome $A_\varkappa$ positive Koeffizienten haben, können sich beim Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der linken Seite der Gleichung (14) keine Glieder wegheben. Wenn wir daher links

$$G_\lambda(X) = \sum_{1 \leqq |\lambda+\mu| \leqq l} \frac{1}{\mu!} G_{\lambda+\mu}\, X^\mu$$

durch

$$\bar{G}_\lambda(X) = \sum_{1 \leqq |\lambda+\mu| < l} \frac{1}{\mu!} G_{\lambda+\mu}\, X^\mu + \sum_{|\lambda+\mu| = l} \frac{1}{\mu!} G_{\lambda,\mu}\, X^\mu$$

und

$$F_\lambda^0(Y) = \sum_{k-l < |\lambda+\mu| \leqq k} \frac{1}{\mu!} F_{\lambda+\mu}\, Y^\mu$$

durch

$$\bar{F}_\lambda(Y) = \sum_{k-l < |\lambda+\mu| < k} \frac{1}{\mu!} F_{\lambda+\mu}\, Y^\mu + \sum_{|\lambda+\mu| = k} \frac{1}{\mu!} F_{\lambda,\mu}\, Y^\mu$$

ersetzen, also für die Unbestimmten $G_\mu (|\mu| = l)$ und $F_\mu (|\mu| = k)$ an verschiedenen Stellen verschiedene neue Unbestimmte $G_{\lambda,\mu}$ und $F_{\lambda,\mu}$

einsetzen, so wirkt sich das auf der rechten Seite nur in den Gliedern aus, in denen diese G_μ und F_μ vorher vorkamen, die also in X mindestens den Grad $k-|\varkappa|$ haben. Wir erhalten so die Gleichung

$$(15)\quad \begin{aligned} &A_\varkappa(\overline{F}_\lambda(\overline{G}(X)),\ \overline{G}_\lambda(X)) \\ &= \sum_{|\varkappa+\lambda|<k} \frac{1}{\lambda!} A^0_{\varkappa+\lambda}(F_\mu, G_\mu) X^\lambda + \sum_{|\varkappa+\lambda|\geqq k} \frac{1}{\lambda!} \overline{A}_{\varkappa,\lambda}(F_\mu, G_\mu, F_{\mu,\nu}, G_{\mu,\nu}) X^\lambda \end{aligned}$$

mit neuen Polynomen $\overline{A}_{\varkappa,\lambda}$, die für $F_{\mu,\nu}=F_{\mu+\nu}$, $G_{\mu,\nu}=G_{\mu+\nu}$ in $A^0_{\varkappa+\lambda}$ übergehen. In die Gleichung (15) setzen wir jetzt $F_\mu = f_\mu(g(x))$, $F_{\mu,\nu}=f_{\mu,\nu}(g(x), g(x'))$, $G_\mu = g_\mu(x)$, $G_{\mu,\nu}=g_{\mu,\nu}(x,x')$ und $X=x'-x$ ein. Dann wird auf Grund der Gleichungen (8) und (6)

$$\overline{G}(X) = g(x')-g(x),\quad \overline{G}_\lambda(X)=g_\lambda(x') \text{ für } |\lambda|\geqq 1,$$
$$\overline{F}_\lambda(\overline{G}(X)) = \overline{F}_\lambda(g(x')-g(x)) = f_\lambda(g(x')).$$

Wegen (12) folgt dann aus (15) die Gleichung

$$(16)\qquad h_\varkappa(x') = \sum_{|\varkappa+\lambda|\leq k} \frac{1}{\lambda!} h_{\varkappa+\lambda}(x)(x'-x)^\lambda + R_\varkappa(x,x')$$

mit

$$R_\varkappa(x,x') = \sum_{|\varkappa+\lambda|>k} \frac{1}{\lambda!} \overline{A}_{\varkappa,\lambda}(x'-x)^\lambda + \sum_{|\varkappa+\lambda|=k} \frac{1}{\lambda!}(\overline{A}_{\varkappa,\lambda}-A^0_{\varkappa+\lambda})(x'-x)^\lambda.$$

Hier läßt sich die erste Summe durch

$$\text{const}\,|x'-x|^{k-|\varkappa|+1} \leqq \text{const}\,\varepsilon\,|x'-x|^{k-|\varkappa|}$$

und die zweite wegen (7) und (9) durch $\text{const}\,\varepsilon\,|x'-x|^{k-|\varkappa|}$ abschätzen. Im Ganzen erhalten wir also

$$(17)\qquad |R_\varkappa(x,x')| \leqq \text{const}\,\varepsilon\,|x'-x|^{k-|\varkappa|}.$$

Da wir ε beliebig klein machen können, besagen (16) und (17) in Verbindung mit (10) und (11) gerade die Differenzierbarkeit von $h(x)$ mit den Ableitungen $h_\varkappa(x)$.

Hilfssatz 2. *Die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ sei auf der Menge A des E_n k-mal stetig differenzierbar und verschwinde auf der Teilmenge B. Ist x^0 ein Punkt aus B, in dem $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$ ist, so gibt es eine Umgebung V_B von x^0 in B mit folgender Eigenschaft: Ist U die Projektion von V_B auf den Teilraum $x_n=0$, so gibt es eine in U eindeutige und k-mal stetig differenzierbare Funktion $g(x_1,\ldots,x_{n-1})$, so daß für jeden Punkt $(x_1,\ldots,x_n)$ aus V_B die Gleichung $x_n = g(x_1,\ldots,x_{n-1})$ gilt.*

Beweis. Der Einfachheit halber soll der Beweis hier nur für den Fall $n=2$ geführt werden; im allgemeinen Fall verläuft er ganz entsprechend. Statt x_1, x_2 schreiben wir x, y, für die Ableitungen $\frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k} = f_{i,k}$ oder auch $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$. Für $f(x,y)$ setzen

wir die Entwicklung erster Ordnung

$$f(x', y') - f(x, y) = f_x(x, y)(x' - x) + f_y(x, y)(y' - y) + R(x, y, x', y')$$

an und wählen V_B so klein, daß dort die Ungleichungen

$$|f_y(x,y)| \geqq \tfrac{2}{3}|f_y(x^0, y^0)| \text{ und } |R(x,y,x',y')| \leqq \tfrac{1}{3}|f_y(x^0, y^0)|\,(|x' - x| + |y' - y|)$$

gelten und sämtliche Ableitungen von $f(x, y)$ beschränkt sind. Für (x, y) und (x', y') in V_B gilt dann wegen $f(x, y) = f(x', y') = 0$ die Ungleichung

$$|y' - y| = \left|\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}(x' - x) + \frac{R(x, y, x', y')}{f_y(x, y)}\right| \leqq \text{const}\,|x' - x| + \frac{1}{2}|y' - y|$$

oder

$$|y' - y| \leqq \text{const}\,|x' - x|. \tag{18}$$

Insbesondere folgt aus $x = x'$ auch $y = y'$; die Gleichung $f(x, y) = 0$ ist also eindeutig nach y auflösbar durch eine auf der Projektion U von V_B definierte Funktion $y = g(x)$. Um ihre Differenzierbarkeit nachzuweisen schreiben wir die volle Entwicklung von $f(x, y)$ hin,

$$f(x', y') = \sum_{i+j \leqq k} \frac{1}{i!\,j!} f_{i,j}(x, y)(x' - x)^i (y' - y)^j + R(x, y, x', y')$$

und wählen $U' < U$ so klein, daß der Durchmesser von U' höchstens ε ist und

$$|R(x, y, x', y')| \leqq \varepsilon\,(|x' - x| + |y' - y|)^k \tag{19}$$

wird für (x, y) und (x', y') in U'. Wir setzen jetzt $y = g(x)$ und $y' = g(x')$ ein, dividieren durch f_y und bringen $g(x') - g(x)$ auf die linke Seite. Das ergibt

$$g(x') - g(x) = \frac{1}{f_y(x, g(x))} P(f_{i,j}(x, g(x)),\, x' - x,\, g(x') - g(x)) + \frac{R(x, g(x), x', g(x'))}{f_y(x, g(x))}.$$

Dabei ist P ein Polynom in den angegebenen Größen, in dem $g(x') - g(x)$ nur in solchen Gliedern auftritt, die in $x' - x$ und $g(x') - g(x)$ von mindestens zweiter Ordnung sind. Diese Entwicklung setzen wir in das Polynom P ein und erhalten so eine ähnliche Entwicklung, in der $g(x') - g(x)$ nur in den Gliedern mindestens dritter Ordnung vorkommt. So fahren wir fort und gelangen schließlich zu einer Gleichung

$$g(x') = \sum_{i \leqq k} \frac{1}{i!} g_i(x)(x' - x)^i + Q(x' - x, g(x') - g(x), R(x, g(x), x', g(x'))), \tag{20}$$

wo alle Glieder von Q entweder ein Restglied R enthalten oder von höherem als dem k-ten Grad in $x' - x$ und $g(x') - g(x)$ sind. Aus (18) und (19) folgt dann

$$|Q| \leqq \text{const}\,\varepsilon\,|x' - x|^k, \tag{21}$$

wo const ε durch geeignete Wahl von U' beliebig klein gemacht werden

kann. Die Ableitungen sind gewisse rationale Funktionen

$$g_i(x) = A_i(f_{j,l}(x, g(x)))$$

der Ableitungen $f_{j,l}(x, g(x))$, in deren Nenner nur Potenzen von f_y vorkommen. Insbesondere ist

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))} = h(x).$$

Durch zweimalige Anwendung des Hilfssatzes 1 ergibt sich, daß $h(x)$ $(k-1)$ mal stetig differenzierbar ist mit Ableitungen $h_i(x)$, die gewisse rationale Funktionen in $f_{j,l}(x, g(x))$ und $g_j(x)$, also rationale Funktionen $B_i(f_{j,l}(x, g(x)))$ sind. Es bleibt nun noch nachzuweisen, daß $h_i(x) = g_{i+1}(x)$ ist. Dazu halten wir x und y fest und betrachten das Polynom

$$F(x', y') = \sum_{i+j \leq k} \frac{1}{i!\, j!} f_{i,j}(x, y)(x' - x)^i (y' - y)^j.$$

Die Gleichung $F(x', y') = 0$ lösen wir auf durch eine Funktion $G(x')$, die im üblichen Sinne k-mal stetig differenzierbar ist mit den Ableitungen $G_i(x') = A_i(F_{j,l}(x', G(x')))$. Außerdem bilden wir die Ableitungen $H_i(x') = B_i(F_{j,l}(x', G(x')))$ von

$$H(x') = G'(x') = -\frac{F_x(x', G(x'))}{F_y(x', G(x'))}.$$

Nun stimmen für $x' = x$ die Funktionen $g(x')$ und $G(x')$ überein, ebenso $f_{j,l}(g(x'))$ und $F_{j,l}(x', G(x'))$, also auch die Werte $g_i(x)$ und $G_i(x)$ und auch $h_i(x)$ und $H_i(x)$. Von $G(x)$ als im gewöhnlichen Sinne differenzierbarer Funktion wissen wir aber, daß $H_i(x) = G_{i+1}(x)$ ist; also folgt auch $h_i(x) = g_{i+1}(x)$ wie behauptet.

§ 2.

Hilfssatz 3. *Es seien E und F zwei Euklidische Räume, $A \subset B$ zwei beschränkte abgeschlossene Mengen aus E, und f eine stetige Abbildung von B in F. Das Bild $f(A)$ sei nirgends dicht in F, und zu jedem Punkt aus $B - A$ existiere eine Umgebung U, so daß $f(U)$ in F nirgends dicht ist. Dann ist auch $f(B)$ nirgends dicht*[5]).

Beweis. Es sei V eine offene Menge aus F. Wir haben zu zeigen, daß es eine offene Menge $V' \subset V$ gibt, die $f(B)$ nicht trifft. Da $f(A)$ nirgends dicht ist, gibt es eine offene Menge $V'' \subset V$, die $f(A)$ nicht trifft. Ist x ein Punkt aus V'', so gibt es, da $f(A)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt ist, Umgebungen $V''' \subset V''$ von x und W' von $f(A)$, die punktfremd sind. Ist W'' eine offene Menge in E, die A enthält, und deren Bild $f(W')$ ganz in W liegt, so ist $B - W'$

[5]) Die Hilfssätze 3 und 4 finden sich a. a. O. [2]). Der Satz 3 gilt, wie aus dem Beweis hervorgeht, allgemeiner für kompakte Mengen in Hausdorffschen Räumen.

kompakt. Zu jedem Punkt aus $B - W'$ gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung, deren Bild nirgends dicht ist. Daraus folgt mit Hilfe des Überdeckungssatzes, daß auch $f(B - W')$ nirgends dicht ist. Also gibt es eine offene Menge $V' < V''$, die $f(B - W')$ nicht trifft. Da sie die Menge W, also auch $f(W')$ nicht trifft, ist der Durchschnitt $V' \cap f(B)$ leer und damit der Satz bewiesen.

Hilfssatz 4. *Es sei* $k \geqq \frac{n}{m}$; *die Funktionen*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

seien auf der kompakten Menge A *des* E_n k*-mal stetig differenzierbar und alle Ableitungen von der ersten bis zur* k*-ten seien Null. Dann ist das Bild* $f(A)$ *im* E_m *nirgends dicht*[5]).

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem Punkt aus A und $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_A in A, so daß für $x, x' \in U_A$ die Ungleichung

$$|f(x') - f(x)| \leqq \varepsilon |x' - x|^k$$

gilt. Die Funktion $\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|^k}$ ist also auf der Menge $A \times A$ in beiden Argumenten stetig, wenn man sie für $x' = x$ null setzt; da A kompakt ist, ist sie sogar gleichmäßig stetig; also gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß aus $|x' - x| \leqq \delta$ folgt $|f(x') - f(x)| \leqq \varepsilon |x' - x|^k$.

Es sei nun A ganz in einem Würfel W von der Kantenlänge L enthalten. Diesen zerlegen wir in r^n gleiche Teilwürfel W_i und wählen r so groß, daß $\frac{L}{r} \sqrt{n} \leqq \delta(\varepsilon)$ wird. In jedem Würfel W_i wählen wir einen Punkt x^i aus A, falls es einen solchen gibt. Alle anderen Punkte x aus W_i haben von x^i höchstens den Abstand $\frac{L}{r} \sqrt{n} \leqq \delta(\varepsilon)$; daher gilt

$$|f(x) - f(x^i)| \leqq \varepsilon |x - x^i|^k \leqq \varepsilon \left(\frac{L}{r} \sqrt{n}\right)^k.$$

Das Bild $f(W_i \cap A)$ liegt also ganz in einer m-dimensionalen Kugel um $f(x^i)$ mit dem Radius $\varepsilon \left(\frac{L}{r} \sqrt{n}\right)^k$ und hat daher höchstens den Inhalt $c \varepsilon^m \left(\frac{L}{r}\right)^{km}$, wo c eine nur von k, m und n, nicht von ε abhängige Zahl ist. Die ganze Bildmenge $f(A)$ hat also wegen $km \geqq n$ und $r \geqq 1$ höchstens den Inhalt $r^n c \varepsilon^m \left(\frac{L}{r}\right)^{km} \leqq c L^{km} \varepsilon^m$. Da ε beliebig war, ist der Inhalt null und die Menge daher nirgends dicht.

Hilfssatz 5. *Es sei* $k \geqq \frac{n}{m}$; *die Funktionen*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

seien auf der kompakten Menge A *des* E_n k*-mal stetig differenzierbar, und alle Ableitungen erster Ordnung seien dort null. Dann ist das Bild* $f(A)$ *im* E_m *nirgends dicht.*

Beweis. Wir halten m fest und beweisen den Satz durch Induktion nach n. Für $n \leqq m$ kann $k = 1$ gewählt werden. Der Satz geht dann in den Hilfssatz 4 über und ist daher bewiesen. Wir nehmen nun an, er sei schon für $n < N$ bewiesen und beweisen ihn für $n = N$.

Wir bezeichnen mit A_l die Menge der Punkte von A, in denen sämtliche Ableitungen erster bis l-ter Ordnung aller Funktionen $f_i(x)$ verschwinden. Die Mengen $A = A_1, A_2, \ldots, A_k$ bilden eine absteigende Folge kompakter Mengen. Das Bild $f(A_k)$ ist nach Hilfssatz 4 in E_m nirgends dicht. Ist x_0 ein Punkt von $A_{k-1} - A_k$, so ist in x^0 eine Ableitung k-ter Ordnung, etwa $f^i_\varkappa = \frac{\partial^\varkappa f_i}{\partial x^\varkappa}$ von null verschieden. Wir schreiben $f^i_\varkappa$ als Ableitung einer Ableitung $(k-1)$ter Ordnung, etwa $f^i_\varkappa = \frac{\partial f^i_\lambda}{\partial x_n}$. Dann ist f^i_λ auf A_{k-1} einmal stetig differenzierbar, und die Ableitung nach x_n ist in x^0 ungleich null. Nach Hilfssatz 2 gibt es also eine abgeschlossene Umgebung U von x^0 in A_{k-1}, so daß für alle Punkte aus U die Gleichung $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(\bar{x})$ gilt, wo $g(\bar{x})$ in der Projektion V von U auf den Teilraum $x_n = 0$ erklärt und einmal stetig differenzierbar ist. In die Funktionen $f(x)$ setzen wir $x_n = g(\bar{x})$ ein; dann sind gerade die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt. Daher sind die Funktionen $F(\bar{x}) = f(\bar{x}, g(\bar{x}))$ in V k-mal stetig differenzierbar und ihre Ableitungen erster Ordnung verschwinden dort. Nach Induktionsannahme ist das Bild $F(V) = f(U)$ in E_m nirgends dicht. Der Hilfssatz 3 — angewandt auf A_{k-1} und A_k — zeigt dann, daß auch $f(A_{k-1})$ nirgends dicht ist.

Wissen wir nun schon, daß $f(A_{k-l+1})$ nirgends dicht ist $(1 \leqq l < k)$, und ist x^0 ein Punkt aus $A_{k-l} - A_{k-l+1}$, so ist dort eine Ableitung $(k-l+1)$ter Ordnung, etwa $f^i_\varkappa = \frac{\partial f^i_\lambda}{\partial x_n}$ von null verschieden. Die Funktion f^i_λ verschwindet auf A_{k-l}, ist dort l-mal differenzierbar und ihre Ableitung nach x_n ist in x^0 ungleich null. Alle Punkte einer Umgebung U von x^0 in A_{k-l} genügen daher der Gleichung $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(\bar{x})$ mit einer l-mal differenzierbaren Funktion $g(\bar{x})$. Setzen wir $x_n = g(\bar{x})$ in die Funktionen $f(x)$ ein, so erhalten wir Funktionen $F(\bar{x})$, die nach Hilfssatz 1 k-mal stetig differenzierbar sind, und deren Ableitungen erster Ordnung in der Projektion V von U verschwinden. Nach der Induktionsannahme ist dann $f(U) = F(V)$ in E_m nirgends dicht, und daraus folgt auf Grund des Hilfssatzes 3, daß $f(A_{k-l})$ nirgends dicht ist.

So erhalten wir schließlich die Aussage, daß $f(A) = f(A_1)$ nirgends dicht ist, und das ist gerade die Behauptung.

Satz 1. *Es sei* $0 \leqq r < m$, $k \geqq \frac{n-r}{m-r}$ *und* $k \geqq 1$; *die Funktionen* $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ *seien auf der kompakten Menge* A *des* E_n k*-mal stetig differenzierbar und der Rang der Funktionalmatrix* $\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(f_1, \ldots, f_m)}$ *sei dort höchstens* r. *Dann ist das Bild* $f(A)$ *im* E_m *nirgends dicht.*

Beweis. Für $r = 0$ ist dies der Hilfssatz 5. Wir nehmen an, der Satz sei schon für $r < R$ und alle m und n bewiesen, und beweisen ihn dann für $r = R$.

Es sei B die Teilmenge von A, auf der der Rang der Funktionalmatrix höchstens $R-1$ ist; sie ist kompakt und wir können auf sie die Induktionsannahme anwenden, denn es ist

$$k \geqq \left\{ \begin{matrix} \frac{n-R}{m-R} \\ 1 \end{matrix} \right\} \geqq \frac{n-(R-1)}{m-(R-1)} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{matrix} n \geqq m \\ n \leqq m \end{matrix} \right\}.$$

Also ist die Menge $f(B)$ nirgends dicht. Auf Grund des Hilfssatzes 3 genügt es zu zeigen, daß es zu jedem Punkt aus $A-B$ eine Umgebung U gibt, so daß $f(U)$ nirgends dicht ist.

Es sei also x^0 ein Punkt aus $A-B$; dann ist dort der Rang der Funktionalmatrix $R \geqq 1$; also ist eine Ableitung, etwa $\frac{\partial f_m}{\partial x_n}$ von null verschieden. Durch die Gleichung $y = f_m(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Abbildung der Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ des E_n auf die Punkte $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ eines anderen n-dimensionalen Raumes E_n' gegeben, wobei der Punkt $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ in den Punkt $y^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, f_m(x^0))$ und die Menge A in eine Menge C übergeht. Nach Hilfssatz 2 — angewandt auf die Funktion $y - f_m(x_1, \ldots, x_n)$ — läßt sich diese in einer Umgebung V von y^0 in C umkehren durch eine k-mal stetig differenzierbare Funktion $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$, deren erste Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial f_m}{\partial x_i} : \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1 : \frac{\partial f_m}{\partial x_n}$$

sind. Das Bild von V ist dabei eine Umgebung U von x^0 in A; V und daher auch U können als kompakte Mengen angenommen werden und außerdem so klein gewählt werden, daß der Durchschnitt $U \cap A$ leer ist. Dann hat die Funktionalmatrix $\frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}$ in U stets den Rang R. Wir setzen jetzt $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ in die Funktionen $f_i(x)$ ein. So erhalten wir neue Funktionen

$$F_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y))$$

und es gilt $F_m(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = y$; sie sind nach Hilfssatz 1 k-mal stetig differenzierbar und nach den Regeln für die Bildung der Ableitungen ergibt sich wie bei gewöhnlichen differenzierbaren Funktionen $\frac{\partial F_m}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial F_m}{\partial y} = 1$ und die Matrizengleichung

$$\frac{\partial (F_1, \ldots, F_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)} = \frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial (x_1, \ldots, x_{n-1}, g)}{\partial (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)}.$$

Da

$$\left| \frac{\partial (x_1, \ldots, x_{n-1}, g)}{\partial (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)} \right| = \frac{\partial g}{\partial y} = 1 : \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \neq 0$$

ist, so ist der Rang der Matrix $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)}$ gleich dem der Matrix $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$, also R. Die erste hat folgende Gestalt:

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(F_1, \ldots, F_{m-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} & \frac{\partial(F_1, \ldots, F_{m-1})}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hat also $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_{m-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})}$ den Rang s, so hat die ganze Matrix den Rang $s+1$; daraus folgt $s = R - 1$.

Wäre nun die Menge $f(U) = F(V)$ nicht nirgends dicht im Raum E_m der Punkte $z = (z_1, \ldots, z_m)$, so enthielte sie als abgeschlossene Menge einen Würfel $|z_i - z_i^0| \leqq \delta$.

Setzen wir $y = z_m^0$ und bezeichnen mit V^0 den Durchschnitt von V mit der Hyperebene $y = z_m^0$, so wird V^0 durch die Funktionen

$$z_i = F_i^0(x_1, \ldots, x_{n-1}) = F_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, z_m^0) \quad (i = 1, \ldots, m-1)$$

auf den Durchschnitt von $F(V)$ mit der Hyperebene $z_m = z_m^0$ abgebildet. Dieser enthält den Würfel $|z_i - z_i^0| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Andererseits können wir auf die Funktionen $F_i^0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ die Induktionsannahme anwenden. Es sind $m-1$ Funktionen von $n-1$ Veränderlichen und der Rang der Funktionalmatrix ist, wie wir gesehen haben, höchstens $R-1$; weiter sind sie k-mal differenzierbar und es ist

$$k \geqq \frac{n-R}{m-R} = \frac{(n-1)-(R-1)}{(m-1)-(R-1)}.$$

Das Bild $F^0(V^0)$ müßte also in der Hyperebene $z_m = z_m^0$ nirgends dicht sein, entgegen der obigen Aussage. Also ist $f(U) = F(V)$ doch nirgends dicht und damit der Satz bewiesen.

§ 3.

Die Funktionen $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$ heißen auf der kompakten Menge A des E_n abhängig, wenn es eine stetig differenzierbare [6]) Funktion $F(y_1, \ldots, y_m)$ gibt, die in keinem Teilgebiet des E_m identisch verschwindet, so daß $F(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \equiv 0$ ist. Damit ist gleichwertig, daß das Bild $f(A)$ im E_m nirgends dicht ist [7]). Aus dem Satz 1 folgt dann der

Satz 2. *Es sei* $k = \max(n - m + 1, 1)$, *die Funktionen*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

seien auf der kompakten Menge A k-mal stetig differenzierbar und

[6]) Diese Bedingung kann auch durch die schärfere, daß die Funktion $F(y)$ beliebig oft stetig differenzierbar sei, oder die schwächere, daß sie stetig sei, ersetzt werden. Vgl. [2]).

[7]) S. [1]).

der Rang der Funktionalmatrix $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ *sei dort höchstens* $m-1$. *Dann sind die Funktionen* $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ *auf* A *abhängig.*

Für $n \leqq m$ liefert das die bekannte Tatsache, daß m stetig differenzierbare Funktionen von weniger als m Veränderlichen stets abhängig sind, m Funktionen von m Veränderlichen sicher dann, wenn ihre Funktionaldeterminante verschwindet.

Wir nennen die Funktionen $f_i(x)$ in der offenen Menge G abhängig, wenn sie es in jeder kompakten Teilmenge sind. Dann gilt der

Satz 3. *Es sei* $k \geqq \max\left(\frac{n-m+2}{2}, 1\right)$, *die Funktionen*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

seien in der offenen Menge G k*-mal stetig differenzierbar; sie sind dann und nur dann in* G *abhängig, wenn der Rang der Funktionalmatrix* $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ *dort höchstens* $m-1$ *ist.*

Beweis. Ist in einem Punkt $x^0 \in G$ der Rang der Funktionalmatrix m, so ist dort eine m-reihige Unterdeterminante, etwa $\left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|$ von null verschieden. In einer Umgebung des Punktes $f(x^0)$ können wir daher die Gleichungen $f_i(x) = y_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ nach $x_1, \ldots, x_m$ auflösen. Ist nun U eine Umgebung von x^0, so enthält $f(U)$ eine Umgebung von $f(x^0)$, ist also nicht nirgends dicht. Da wir U kompakt wählen können, sind die Funktionen $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ in G unabhängig.

Ist nun umgekehrt der Rang der Funktionalmatrix in G höchstens $m-1$ und ist A eine kompakte Teilmenge von G, so haben wir zu zeigen, daß die Funktionen $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ auf A abhängig sind, das Bild $f(A)$ also nirgends dicht ist. Dazu sei B die Menge der Punkte aus A, in denen die Funktionalmatrix höchstens den Rang $m-2$ hat; sie ist wieder kompakt und ihr Bild ist nach Satz 1 nirgends dicht. Nach Hilfssatz 3 haben wir nur noch zu zeigen, daß es zu jedem Punkt $x^0 \in A - B$ eine Umgebung U gibt, so daß $f(U)$ nirgends dicht ist. Da in x^0 der Rang der Funktionalmatrix $m-1$ ist, so gibt es eine $(m-1)$ reihige Unterdeterminante, etwa $\left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{m-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m-1})}\right|$, die von null verschieden ist. In einem Würfel W: $|y_i - f_i(x^0)| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, m-1)$, $|x_i - x_i^0| \leqq \delta$ $(i = m, \ldots, n)$ können wir daher die Gleichungen $f_i(x) = y_i$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ nach $x_1, \ldots, x_{m-1}$ auflösen. Wir erhalten gewisse Funktionen $x_i = g_i(y_1, \ldots, y_{m-1}, x_m, \ldots, x_n)$, die eine eineindeutige Abbildung von W auf eine Umgebung U von x^0 vermitteln. Wir setzen sie in die Funktionen $f_i(x)$ ein und erhalten so neue Funktionen $F_i(y_1, \ldots, y_{m-1}, x_m, \ldots, x_n)$. Da die Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1}, x_m, \ldots, x_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_n)}\right| = \left|\frac{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{m-1})}\right| \neq 0$$

ist, ändert sich dabei der Rang der Funktionalmatrix nicht: Es ist

$$\text{Rang}\,\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_{m-1},x_m,\ldots,x_n)} = \text{Rang}\,\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = m-1.$$

Die erste Matrix hat aber wegen $F_i(y,x) = y_i$ für $i = 1,\ldots,m-1$ die Gestalt

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_{m-1},x_m,\ldots,x_n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & . & . & 0 \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial(y_1,\ldots,y_{m-1})} & & & & & \dfrac{\partial F_m}{\partial(x_m,\ldots,x_n)} & & & \end{pmatrix}.$$

Da ihr Rang $m-1$ ist, verschwinden die Ableitungen $\frac{\partial F_m}{\partial x_i}$ in W. Also ist $F_i(y_1,\ldots,y_{m-1},x_m,\ldots,x_n) = F_i(y_1,\ldots,y_{m-1},x_m^0,\ldots,x_n^0)$, d. h. die Funktionen $F_i(y,x)$ haben den gleichen Wertvorrat wie die m Funktionen $F_i(y,x^0)$ von $m-1$ Veränderlichen; diese sind aber abhängig, also $F(W) = f(U)$ nirgends dicht, wie behauptet.

§ 4.

Es sei $f(x)$ eine für $-\infty < x < \infty$ unbeschränkt differenzierbare Funktion, die für $|x| \geqq 1$ verschwindet und für $|x| \leqq q < 1$ identisch eins ist, z. B.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq |x| \leqq q \\ c^{-1}\int\limits_{|x|}^{1} g(t)\,dt & q \leqq |x| \leqq 1 \\ 0 & 1 \leqq |x| \end{cases},$$

wo $g(t) = \exp\frac{1}{(t-1)(t-q)}$ und $c = \int\limits_q^1 g(t)\,dt$ ist. Daraus bilden wir die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1)\ldots f(x_n)$; sie ist eins im Würfel $|x_i| \leqq q$, null außerhalb des Würfels $|x_i| < 1$ und unbeschränkt differenzierbar. Mit $f^{(l)}$ bezeichnen wir das Maximum der Beträge aller Ableitungen l-ter Ordnung von $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Nun sei Q ein achsenparalleler Würfel mit der Kantenlänge $2a$ und dem Mittelpunkt $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Wir setzen

$$f_Q(x_1,\ldots,x_n) = f\left(\frac{x_1-x_1^0}{a},\ldots,\frac{x_n-x_n^0}{a}\right).$$

Für das Maximum $f_Q^{(l)}$ der Beträge der l-ten Ableitungen von $f_Q(x)$ gilt dann

$$f_Q^{(l)} = a^{-l} f^{(l)}.$$

Wir zerlegen jetzt den Würfel Q in 2^n gleiche Teilwürfel $Q_0, \ldots, Q_{2^n-1}$ und setzen

$$g_Q(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} i f_{Q_i}(x).$$

Die Funktion $g_Q(x)$ verschwindet außerhalb von Q und hat den Wert i in einem zu Q_i konzentrischen Teilwürfel $Q^{(i)}$ von der Kantenlänge qa; sie ist unbeschränkt differenzierbar und für die Beträge ihrer Ableitungen gilt mit der entsprechenden Bezeichnung wie oben die Gleichung

$$g_Q^{(l)} = (2^n - 1)\, 2^l a^{-l} f^{(l)}. \tag{22}$$

Wir nehmen jetzt für Q den Würfel $|x_i| \leqq 1$ und setzen $h_1(x) = g_Q(x)$. Diese Funktion hat den Wert i in dem Würfel $Q^{(i)}$ von der Kantenlänge q. Weiter setzen wir $h_2(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} g_{Q^{(i)}}(x)$. $h_2(x)$ hat in gewissen Würfeln $Q^{(i_1, i_2)}$ $(i_1, i_2 = 0, \ldots, 2^n - 1)$ von der Kantenlänge $2\left(\frac{q}{2}\right)^2$ den Wert i; dabei liegt $Q^{(i_1, i_2)}$ ganz in $Q^{(i_1)}$. Sind allgemein die Funktion $h_k(x)$ und die Würfel $Q^{(i_1, \ldots, i_k)}$ schon erklärt, so setzen wir

$$h_{k+1}(x) = \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} g_{Q^{(i_1, \ldots, i_k)}}(x).$$

Diese Funktion hat den Wert i_{k+1} $(i_{k+1} = 0, \ldots, 2^n - 1)$ in gewissen Würfeln $Q^{(i_1, \ldots, i_{k+1})}$, wo $Q^{(i_1, \ldots, i_{k+1})}$ ganz in $Q^{(i_1, \ldots, i_k)}$ liegt und die Kantenlänge $2\left(\frac{q}{2}\right)^{k+1}$ hat. Da die Würfel $Q^{(i_1, \ldots, i_k)}$ paarweise punktfremd sind, so folgt aus (22) mit $a = \left(\frac{q}{2}\right)^k$ die Gleichung

$$h_{k+1}^{(l)} = (2^n - 1)\, 2^{(k+1)l} q^{-kl} f^{(l)}. \tag{23}$$

Bezeichnen wir nun mit A_k die Vereinigung aller Würfel $Q^{(i_1, \ldots, i_k)}$, setzen $B_k = A_{k-1} - A_k$ und $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, so ist $Q = C \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Die Funktion $h_k(x)$ ist null außerhalb A_{k-1} und konstant in jedem Würfel von A_k. Also verschwinden sämtliche Ableitungen von $h_k(x)$ außerhalb B_k, insbesondere in C.

Erstes Beispiel. Wir wählen $q < 1$ so groß, daß $p = 2\, q^{n-1} > 1$ ist, und bilden die Funktion

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-nk} h_k(x). \tag{24}$$

Nach (23) gilt für $l \leqq n - 1$ die Abschätzung

$$2^{-nk} h_k^{(l)} = (2^n - 1)\, 2^{kl - nk} q^{-(k-1)l} f^{(l)} \leqq (2^n - 1)\, q^l f^{(l)} (2\, q^{n-1})^{-k} = C\, p^{-k}.$$

Also konvergiert jede Reihe von l-ten Ableitungen von (24) gleichmäßig; $h(x)$ ist also $(n-1)$ mal stetig differenzierbar und alle Ableitungen verschwinden auf C. Andererseits nimmt $h(x)$ auf C alle Werte des Intervalles $(0, 1)$ an, denn in dem gemeinsamen Punkt $x^{(i_1, i_2, \ldots)}$ der Würfel $Q^{(i_1)}$, $Q^{(i_1, i_2)}$, ... hat $h(x)$ den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} i_k 2^{-nk}$ und in dieser Form läßt sich jede Zahl zwischen 0 und 1 darstellen.

Es sei nun $n > m$. Wir ersetzen unser obiges n durch $n-m+1$ und betrachten die Funktionen

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_{n-m+1})$$
$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_{n-m+i} \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Ist C die oben erklärte Untermenge des E_{n-m+1} und W der Würfel $|x_i| \leqq 1$ des durch $x_1 = \cdots = x_{n-m+1} = 0$ erklärten Unterraumes, so sind die Funktionen in dem Produkt $C \times W$ $(n-m)$ mal stetig differenzierbar und ihre Funktionalmatrix

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Rang $m-1$. Trotzdem enthält das Bild $f(C \times W)$ den Einheitswürfel $0 \leqq y_i \leqq 1$ im E_m. Im Satz 2 war von den Funktionen $f_i(x)$ $(n-m+1)$ malige Differenzierbarkeit verlangt; unser Beispiel zeigt, daß die Zahl $n-m+1$ nicht durch eine kleinere ersetzt werden darf.

Zweites Beispiel. Um für $n > m$ ein entsprechendes Beispiel zum Satz 3 zu erhalten, wählen wir $q < 1$ so groß, daß $p = 2q^{2(n-1)} > 1$ ist und bilden die beiden Funktionen

$$i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn} h_{2k-1}(x), \quad j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kn} h_{2k}(x).$$

Da nach (23) für $2l \leqq n-1$ die Abschätzung

$$\max (2^{-kn} h_{2k-1}^{(l)}, 2^{-kn} h_{2k}^{(l)}) \leqq (2^n - 1)\, 2^{2kl-kn} q^{-(2k-1)l} f^{(l)}$$
$$\leqq (2^n - 1)\, q^l f^{(l)} (2 q^{2(n-1)})^{-k} = C p^{-k}$$

gilt, konvergieren die Reihen der l-ten Ableitungen gleichmäßig, die Funktionen $i(x)$ und $j(x)$ sind also l-mal stetig differenzierbar. Insbesondere können wir $l = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ wählen. Die Ableitungen von $i(x)$ sind nur in der Menge $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2k-1}$ von null verschieden, die von $j(x)$ nur in $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2k}$. Da beide Mengen punktfremd sind, ist in jedem Punkt

des Würfels Q: $|x_i| \leqq 1$ der Rang der Funktionalmatrix $\frac{\partial(i,j)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ höchstens eins. Trotzdem erfüllt das Bild von Q das ganze Einheitsquadrat $0 \leqq i, j \leqq 1$; denn in dem gemeinsamen Punkt $x^{(i_1,j_1,i_2,j_2,\ldots)}$ der Würfel $Q^{(i_1)}, Q^{(i_1,j_1)}, \ldots$ ist

$$i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} i_k 2^{-kn}, \quad j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} j_k 2^{-kn}$$

und das ergibt alle Punkte des Einheitsquadrates.

Ähnlich wie beim ersten Beispiel ersetzen wir jetzt n durch $n-m+2$ und bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\ldots,x_n) &= i(x_1,\ldots,x_{n-m+2}) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) &= j(x_1,\ldots,x_{n-m+2}) \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) &= x_{n-m+k} \qquad (k=3,\ldots,m). \end{aligned}$$

Sie sind $\left[\frac{n-m+1}{2}\right]$ mal stetig differenzierbar und ihre Funktionalmatrix

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(i,j)}{\partial(x_1,\ldots,x_{n-m+2})} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 \ \ldots \ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ \ldots \ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

hat höchstens den Rang $m-1$. Sie sind aber nicht abhängig, da das Bild des Würfels $|x_i| \leqq 1$ den Einheitswürfel $0 \leqq y_i \leqq 1$ enthält.

Da $\left[\frac{n-m+1}{2}\right]$ für $n > m$ die größte ganze Zahl ist, die kleiner als $\max\left\{\frac{n-m+2}{2}, 1\right\} = \frac{n-m+2}{2}$ ist, zeigt das zweite Beispiel, daß auch im Satz 3 die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nicht vermindert werden dürfen.

(Eingegangen am 27. Oktober 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 1, S. 52—64 (1951).

Über eine Modifikation der Riemannschen Geometrie.

Von

Gerhard Lyra in Göttingen.

Die vorliegende Untersuchung gibt einen Aufbau der Infinitesimalgeometrie auf Grund allgemeiner Eichinvarianz, genauer gesagt, die Grundzüge einer Geometrie der affin zusammenhängenden und der RIEMANNschen Räume bei konsequenter Verwendung des Bezugssystems, als einer Zusammenfassung von Koordinatensystem und Eichung. Dabei wird der Eichbegriff nicht mehr als Festlegung von Längeneinheiten verstanden, sondern schon im strukturlosen Raum als ein mit dem Koordinatensystem gleichberechtigter Bestandteil des Bezugssystems eingeführt. Bei Benutzung eines beliebigen Bezugssystems lauten die Komponenten des affinen Zusammenhangs $\Gamma^i_{ka} - \frac{1}{2}\,\delta^i_k \varphi_a$ anstatt Γ^i_{ka} mit willkürlichen φ_a. Im metrischen Teil des Aufbaus, wo die Metrik wie bei RIEMANN allein durch eine positiv-definite quadratische Form erklärt wird, ist der Zusammenhang zwischen den Γ^i_{ka}, φ_a und g_{ik} formal derselbe wie in der WEYLschen Geometrie, wo aber die φ_a Komponenten eines metrischen Zusammenhangs bedeuten. Trotz der Möglichkeit eines unmittelbaren Fernvergleichs der Vektorlängen liegt eine Erweiterung der RIEMANNschen Geometrie vor, die ebenso weit reicht wie die WEYLsche Geometrie. Wegen der Eichinvarianz des Volumenintegrals ist die hier vorgeschlagene Modifikation der RIEMANNschen Geometrie eine wirkliche Maßgeometrie, in welcher Inhalte von Linien-, Flächen-, ... und Raumstücken definiert sind. Es besteht eine so nahe innere Verwandtschaft des hier gegebenen Aufbaus der Infinitesimalgeometrie mit demjenigen WEYLS aus dem Jahre 1918, daß man ebensogut von einer Modifikation der WEYLschen Geometrie sprechen könnte. Daher ist eine vergleichende Betrachtung der WEYLschen Geometrie der Gegenstand des letzten Abschnitts.

1. Der modifizierte Tensor- und Tensordichtebegriff im strukturlosen Raum.

Die Wahl eines Koordinatensystems und einer Eichung. In einem beliebigen n-dimensionalen Raum beruht die Möglichkeit des Vektorbegriffs und die Gültigkeit der affinen Geometrie im Unendlichkleinen

bekanntlich auf der Voraussetzung, daß sich eine Umgebung jedes Punktes P nicht nur umkehrbar eindeutig und stetig auf das Kontinuum der möglichen Wertsysteme von n Koordinaten abbilden läßt, sondern daß in dieser Umgebung die den Übergang $x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ zu neuen Koordinaten $\bar{x}^i$ vermittelnden Funktionen auch stetige Ableitungen $\partial x^i/\partial \bar{x}^k$ besitzen, deren Determinante von Null verschieden ist. Relativ zu einem beliebigen Koordinatensystem x^i definieren wir aber die Komponenten des vom Punkte $P = (x^i)$ nach einem infinitesimal benachbarten Punkt $P' = (x^i + dx^i)$ weisenden Vektors $\overrightarrow{PP'}$ nicht durch die Koordinatendifferentiale dx^i selber, sondern durch Zahlen $\xi^i = x^0 dx^i$, worin der nicht verschwindende Faktor x^0 eine stetige Funktion des Ortes P ist. Indem wir diese Funktion festlegen, wählen wir eine *Eichung*. Dann kann von Komponenten eines Linienelements $\overrightarrow{PP'}$ nur relativ zu einem Koordinatensystem x^i *und* einer Eichung x^0 die Rede sein. Nach dem Vorbild von Weyl erweitern wir den Koordinatenbegriff, indem wir Koordinatensystem und Eichung zu einem *Bezugssystem* $(x^i; x^0)$ zusammenfassen. Der Übergang zu einem neuen Bezugssystem $(\bar{x}^i; \bar{x}^0)$ wird durch $n+1$ Funktionen $x^i = f^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; \bar{x}^0)$ und $x^0 = f^0(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; \bar{x}^0)$ vermittelt, welche stetige partielle Ableitungen besitzen, deren $(n+1)$-reihige Determinante nirgends verschwindet. Damit aber für jede beliebige stetig differenzierbare Funktion $\bar{x}^0(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) \neq 0$ auch die zum System $x^i = f^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; \bar{x}^0(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n))$ gehörige n-reihige Determinante

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial f^i}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial \bar{x}^k}\right) \neq 0 \tag{1}$$

ist, müssen alle $\partial f^i/\partial \bar{x}^0 = 0$ und $\det(\partial f^i/\partial \bar{x}^k) \neq 0$ sein. Denn wäre etwa $\partial f^1/\partial \bar{x}^0$ im Punkte P von Null verschieden, so wähle man $\bar{x}^0(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ derart, daß $\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial \bar{x}^k} = -\frac{\partial f^1}{\partial \bar{x}^k}\Big/\frac{\partial f^1}{\partial \bar{x}^0}$ in P ist, wodurch im Widerspruch zu (1) alle Elemente der ersten Zeile verschwinden. Der allgemeinste Übergang zu einem neuen Bezugssystem wird also durch Transformationsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) \\ x^0 &= f^0(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; \bar{x}^0(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)) \end{aligned} \tag{2}$$

vermittelt, worin $\partial x^0/\partial \bar{x}^0$ und die Determinante der $\partial x^i/\partial \bar{x}^k$ beide $\neq 0$ sind.

Die Untergruppe der Koordinatentransformationen besteht aus denjenigen Transformationen des Bezugssystems, für welche $f^0(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n; \bar{x}^0) \equiv \bar{x}^0$ ist, die Untergruppe $\mathfrak{E}$ der Eichtransformationen aus denjenigen, für welche $x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) \equiv \bar{x}^i$ ist. Offenbar ist $\mathfrak{E}$ ein Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{B}$ aller Transformationen des Bezugssystems und die Gruppe $\mathfrak{K}_n$ der Koordinatentransformationen der Faktorgruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{E}$ isomorph.

Tensoren und Tensordichten. Beim Übergang (2) zu einem neuen Bezugssystem $(\bar{x}^i; \bar{\tau}^0)$ erfahren die Komponenten ξ^i eines kontravarianten Vektors in P die Transformation

$$\bar{\xi}^i = \left(\frac{\tau^0}{\bar{\tau}^0}\right)_P \left(\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\right)_P \xi^k.$$

Hieraus ergibt sich unter der Voraussetzung, daß die Bestimmungszahl eines Skalars auch bei Umeichung ungeändert bleibt, die folgende Modifikation des Tensorbegriffs: Relativ zu einem Bezugssystem (= Koordinatensystem + Eichung) heißen die n^{r+s} Funktionen $T^{\varrho_1 \dots \varrho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s}$ der x^i die Komponenten eines r-fach kontravarianten und s-fach kovarianten Tensors, wenn sie sich beim Übergang zu neuen Koordinaten in der bekannten Weise transformieren, beim Übergang zu einer neuen Eichung aber mit der $(r-s)$-ten Potenz des Eichfaktors $\lambda = \bar{x}^0/x^0$ multiplizieren [1]). Die Tensoren sind also nach wie vor allein durch die Vielfachheit ihrer Kontravarianz und Kovarianz charakterisiert, oder — was jetzt auf dasselbe hinauskommt — durch ihre Stufenzahl $r+s$ und ihr Gewicht $r-s$.

Für die Komponenten einer Tensordichte, welche sich bekanntlich bei Koordinatentransformation mit dem absoluten Betrag der Funktionaldeterminante der $\partial x^i/\partial \bar{x}^k$ multiplizieren und sich im übrigen wie Tensorkomponenten verhalten, soll jetzt bei Übergang zu einer neuen Eichung das Transformationsgesetz

$$\bar{\mathfrak{T}}^{\varrho_1 \dots \varrho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_s} = \lambda^{r-s-n} \mathfrak{T}^{\varrho_1 \dots \varrho_r}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}$$

gelten. Dann ist das Raumintegral $\int \mathfrak{T}^{0 \dots}_{\sigma \dots} x^0 \, dx^1 \dots x^0 \, dx^n$ — worin das Integrationselement jetzt den Faktor $(x^0)^n$ erhält — eine Tensordichte, insbesondere das Integral einer skalaren Dichte eine Invariante. Offenbar sind alle gegenüber Koordinatentransformationen invarianten Operationen der Algebra der Tensoren und Tensordichten auch gegenüber Eichtransformationen invariant.

Aus einem Skalarfeld u entspringt durch die Differentialoperation $\frac{1}{x^0} \frac{\partial}{\partial x^i}$ ein kovariantes Vektorfeld, und mit der Einbettung $x^i = x^i(t)$ einer stetig differenzierbaren Kurve ist der kontravariante Vektor $\xi^i = x^0 \, dx^i/dt$ verbunden.

---

[1]) Beschränkt man sich einerseits in der Gruppe $\mathfrak{E}$ aller Eichtransformationen auf die Untergruppe der linear-homogenen $\bar{x}^0 = \lambda(x^1, \dots, x^n) \cdot x^0$ mit $\lambda \neq 0$, und erweitert andererseits das Transformationsgesetz für Tensoren und damit den Tensorbegriff auf beliebige, vom Kovarianzcharakter des Tensors unabhängige Gewichte, so erhält man die von Schouten schon 1929 im strukturlosen Raum eingeführten Pseudotensoren. Statt von Tensoren der p-ten Stufe und des Gewichts q spricht Schouten von Pseudoaffinoren der Valenz p und der Klasse q. Vgl. J. A. Schouten und V. Hlavaty: Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung, Math. Zeitschr. 30, S. 414—432.

2. Der Begriff des affin zusammenhängenden Raumes im weiteren Sinne.

Der Raum heißt affin zusammenhängend i. w. S., wenn in jedem seiner Punkte eine infinitesimale Übertragung der Vektoren erklärt ist. Die independente Definition lautet wie bei WEYL, nur tritt jetzt das Bezugssystem an Stelle des Koordinatensystems: Zu jedem Punkt P gibt es ein dessen Umgebung bedeckendes Bezugssystem (= Koordinatensystem $\bar{x}^i$ *und* Eichung $\bar{x}^0$) derart, daß irgend zwei von $P = (\bar{x}^i)$ und einem infinitesimal benachbarten Punkt $P' = (\bar{x}^i + d\bar{x}^i)$ aus aufgetragene Vektoren $\bar{\xi}^i$ und $\bar{\xi}^i + \delta\bar{\xi}^i$ gleich sind oder durch „infinitesimale Übertragung" auseinander hervorgehen, falls sie in diesem (in P „geodätischen") Bezugssystem gleiche Komponenten besitzen: $\delta\bar{\xi}^i = 0$. Dann ist bei Benutzung eines beliebigen Koordinatensystems x^i und einer beliebigen Eichung x^0 das System der totalen Differentialgleichungen

$$\delta\xi^i = -(\Gamma^i_{kx} - \tfrac{1}{2}\delta^i_k \varphi_x)\,\xi^k x^0\, dx^x \quad \text{mit} \quad \Gamma^i_{kx} = \Gamma^i_{xk} \tag{3}$$

der äquivalente Ausdruck für die independente Erklärung der infinitesimalen Übertragung. Denn ist in P relativ zu einem bestimmten Bezugssystem $\delta\bar{\xi}^i = 0$, so ist bei Übergang zu neuen Koordinaten x^i und neuer Eichung x^0 wegen $\xi^i = \lambda^{-1}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r}\bar{\xi}^r$:

$$\delta\xi^i = \left(\frac{1}{x^0}\frac{\partial^2 x^i}{\partial\bar{x}^s\,\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\bar{x}^l}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\delta^i_k\frac{1}{x^0}\frac{\partial \lg\lambda^2}{\partial x^\alpha}\right)\xi^k x^0\, dx^x.$$

Ist umgekehrt $\delta\xi^i = -(\Gamma^i_{kx} - \frac{1}{2}\delta^i_k\varphi_x)\,\xi^k x^0\, dx^x$, so wähle man für die Umgebung von $\overset{0}{P} = (\overset{0}{x}{}^i)$:

$$x^i - \overset{0}{x}{}^i = \bar{x}^i - \tfrac{1}{2}\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kx}\,\bar{x}^k\bar{x}^x$$

$$x^0/\overset{0}{x}{}^0 = \bar{x}^0\cdot e^{-\frac{1}{2}\overset{0}{\varphi}_\alpha\bar{x}^\alpha}$$

so wird wegen

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^k}\right)_0 = \delta^i_k, \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial\bar{x}^k\,\partial\bar{x}^\alpha} = -\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kx}, \quad \frac{\partial\lg\lambda^2}{\partial x^\alpha} = -\overset{0}{\varphi}_x:$$

$$\delta\bar{\xi}^i = 0.$$

Bei Übergang zu einem neuen Bezugssystem $(\bar{x}^i; \bar{x}^0)$ transformieren sich die Komponenten Γ^i_{kx} und φ_x des affinen Zusammenhangs i. w. S. nach den folgenden Gleichungen, wobei die der Koordinatentransformation und der Eichtransformation entsprechenden Gleichungen getrennt formuliert werden mögen:

$$\Gamma^i_{kx} = \frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x^k}\bar{\Gamma}_{lj} + \frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial^2\bar{x}^j}{\partial x^\alpha\,\partial x^k}; \quad \varphi_\alpha = \frac{\partial\bar{x}^s}{\partial x^\alpha}\bar{\varphi}_\beta, \tag{4}$$

$$\bar{\Gamma}^i_{kx} = \lambda^{-1}\Gamma^i_{kx}; \quad \bar{\varphi}_\alpha = \lambda^{-1}\left(\varphi_\alpha + \frac{1}{x^0}\frac{\partial\lg\lambda^2}{\partial x^\alpha}\right). \tag{5}$$

Danach haben die Γ^i_{kx} nur bei Eichtransformation, die φ_x nur bei Koordinatentransformation Tensorcharakter.

Der affine Zusammenhang i. w. S. ist dann und nur dann ein affiner Zusammenhang im Weylschen Sinne, wenn es ein Bezugssystem gibt, in bezug auf welches simultan für alle Punkte im Raum $\varphi_x = \frac{1}{x^0}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$, d. h. φ_x sich als Gradient aus einer Funktion φ ableiten läßt. Dann ist nach Umeichung mit dem Faktor $\lambda = e^{-\varphi/2}$ in bezug auf diese „Normaleichung" wegen (5) $\varphi_x = 0$.

Geodätische Linien. Nach (3) ist die infinitesimale Übertragung eines Vektors längs eines P_0 und P verbindenden Weges $x^i = x^i(s)$ durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma^i_{kx}\xi^k x^0 \frac{dx^\alpha}{ds} - \frac{1}{2}\varphi_x x^0 \frac{dx^\alpha}{ds}\xi^i = 0 \tag{6}$$

gegeben. Ist $\xi^i(s)$ deren eindeutig vorhandene Lösung mit gegebenen Anfangswerten $\xi^i(0)$, ferner $\eta^i(s)$ die Lösung der speziellen Gleichungen

$$\frac{d\eta^i}{ds} + \Gamma^i_{kx}\eta^k x^0 \frac{dx^\alpha}{ds} = 0$$

unter denselben Anfangsbedingungen $\eta^i(0) = \xi^i(0)$, so gilt offenbar

$$\xi^i(s) = e^{\frac{1}{2}\int_{P_0}^{P} \varphi_\alpha x^0 dx^\alpha}\,\eta^i(s).$$

Hieraus ergibt sich, daß der Bestandteil φ_x der Übertragung ohne Einfluß auf die Richtung des übertragenen Vektors $\xi^i(s)$ ist.

Die Gleichung einer geodätischen Linie $x^i = x^i(s)$, also derjenigen Linie, deren Tangentialvektoren $\xi^i = x^0 \dot{x}^i$ durch infinitesimale Übertragung auseinander hervorgehen, lautet jetzt:

$$x^0 \ddot{x}^i + \Gamma^i_{kx} x^0 \dot{x}^k \cdot x^0 \dot{x}^\alpha - \frac{1}{2}\left(\varphi_x - \frac{1}{x^0}\frac{\partial \lg (x^0)'}{\partial x^\alpha}\right) x^0 \dot{x}^\alpha x^0 \dot{x}^i = 0. \tag{7}$$

Offenbar ist die geodätische Linie als solche unabhängig vom Bestandteil φ_x des affinen Zusammenhangs i. w. S. Eine Abänderung der φ_x bewirkt lediglich eine Transformation des Parameters s. Ferner ist die Gleichung (7) der geodätischen Linie nicht nur koordinaten- und eichinvariant, sondern behält auch bei Parametertransformation ihre Form bei, wie eine einfache Rechnung zeigt.

Analysis der Tensoren und Tensordichten. Schließlich mögen noch einige koordinaten- und eichinvariante Differentialoperationen zusammengestellt werden, welche im affin zusammenhängenden Raum i. w. S. gelten. Sind zunächst u, u_i, u_{ik}, ... lineare Tensorfelder nullter, erster, zweiter, ... Stufe, dann sind

$$\begin{gathered}\frac{1}{x^0}\frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad \frac{1}{x^0}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^i} - \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_i u_k - \varphi_k u_i), \\ \frac{1}{x^0}\left(\frac{\partial u_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial u_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial u_{ik}}{\partial x}\right) + \varphi_i u_{kl} + \varphi_k u_{li} + \varphi_l u_{ik}, \ldots\end{gathered} \tag{8}$$

lineare Tensorfelder erster, zweiter, dritter, ... Stufe. Ersteres ist schon im strukturlosen Raum eine invariante Bildung. Sind ferner $\mathfrak{w}^i$, $\mathfrak{w}^{ik}$, ... lineare Tensordichtefelder erster, zweiter, ... Stufe, so sind

$$\frac{1}{x^0}\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x^i} + \frac{n-1}{2}\varphi_i \mathfrak{w}^i, \quad \frac{1}{x^0}\frac{\partial \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x^k} + \frac{n-2}{2}\varphi_k \mathfrak{w}^{ik}, \ \ldots \tag{9}$$

lineare Tensordichtefelder nullter, erster, ... Stufe. Es sind die Divergenzbildungen $\frac{\partial^* \mathfrak{w}^i}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^* \mathfrak{w}^{ik}}{\partial x^k}$, ... wo $\frac{\partial^*}{\partial x^i}$ die kovariante Ableitung bezeichnet. Setzt man in der Divergenz von $\mathfrak{w}^i$ speziell $\mathfrak{w}^i = \mathfrak{F}\xi^i$, wo ξ^i ein im betrachteten Punkt stationäres kontravariantes Vektorfeld ist, so findet man

$$\frac{\partial^* \mathfrak{F}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{x^0}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\nu}\mathfrak{F} + \frac{n}{2}\varphi_\alpha \mathfrak{F} \tag{10}$$

oder

$$= \frac{1}{x^0}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x^\alpha} - \tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\alpha}\mathfrak{F} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Gamma}^i_{k\alpha} = \Gamma^i_{k\alpha} - \frac{1}{2}\delta^i_k \varphi_\alpha .$$

Allgemein erhält man die kovariante Ableitung eines r-fach kontravarianten, s-fach kovarianten Tensorfeldes $T^{\varrho_1 \ldots \varrho_r}_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}$ aus den bekannten früheren Formeln, wenn man darin $\Gamma^i_{k\alpha}$ durch $\tilde{\Gamma}^i_{k\alpha} = \Gamma^i_{k\alpha} - \frac{1}{2}\delta^i_k \varphi_\alpha$ und die gewöhnliche Differentialoperation $\partial/\partial x^\alpha$ durch $\partial/x^0 \partial x^\alpha$ ersetzt:

$$\frac{\partial^* T^{\varrho_1 \ldots \varrho_r}_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{x^0}\frac{\partial T^{\ldots}_{\ldots}}{\partial x^\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{r} \Gamma^{\varrho_\lambda}_{\nu\alpha} T^{\ldots \nu \ldots}_{\ldots} - \sum_{\lambda=1}^{s} \Gamma^{\nu}_{\sigma_\lambda \alpha} T^{\ldots}_{\ldots \nu \ldots} - \frac{r-s}{2}\varphi_\alpha T^{\ldots}_{\ldots}. \tag{11}$$

Aus (10) ergibt sich für die koordinaten- und eichinvariante Ableitung einer Tensordichte:

$$\frac{\partial^* \mathfrak{T}^{\varrho_1 \ldots \varrho_r}_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{x^0}\frac{\partial \mathfrak{T}^{\ldots}_{\ldots}}{\partial x^\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{r} \Gamma^{\varrho_\lambda}_{\nu\alpha} \mathfrak{T}^{\ldots \nu \ldots}_{\ldots} - \sum_{\lambda=1}^{s} \Gamma^{\nu}_{\sigma_\lambda \alpha} \mathfrak{T}^{\ldots}_{\ldots \nu \ldots} - \frac{r-s-n}{2}\varphi_\alpha \mathfrak{T}^{\ldots}_{\ldots} - \Gamma^\nu_{\alpha\nu}\mathfrak{T}^{\ldots}_{\ldots}. \tag{12}$$

(11) und (12) stellen ein r-fach kontravariantes, $(s+1)$-fach kovariantes Tensor- bzw. Tensordichtefeld dar.

Der Krümmungstensor. Die Vektorübertragung (6) und damit das System der totalen Differentialgleichungen

$$\frac{1}{x^0}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} + \Gamma^i_{k\alpha}\xi^k - \frac{1}{2}\varphi_\alpha \xi^i = 0 \tag{13}$$

ist offenbar dann und nur dann integrabel, wenn derjenige Differentialausdruck identisch verschwindet, welcher aus dem Ausdruck für den Riemannschen Krümmungstensor hervorgeht, falls man darin die $\Gamma^i_{k\alpha}$

durch $x^0 \tilde{\Gamma}^i_{kx} = x^0(\Gamma^i_{kx} - \frac{1}{2}\delta^i_k \varphi_x)$ ersetzt. Zunächst setzen wir

$$f_{x\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta},$$

ferner

$$R^i_{kx\beta\gamma} = \frac{1}{x^0}\frac{\partial \Gamma^i_{k\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{x^0}\frac{\partial \Gamma^i_{k\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^i_{r\alpha}\Gamma^r_{k\beta} - \Gamma^i_{r\beta}\Gamma^r_{k\alpha}$$

und $\tilde{R}^i_{kx\beta\gamma} =$ demselben Ausdruck in den $\tilde{\Gamma}^i_{kx}$ anstelle der Γ^i_{kx}, so daß $\tilde{R}^i_{kx\beta\gamma} = R^i_{kx\beta\gamma} - \frac{1}{2}\delta^i_k f_{x\beta}$ wird. Dann lautet der modifizierte Krümmungstensor, dessen identisches Verschwinden die Integrabilitätsbedingung von (13) ist, folgendermaßen[2]):

$$K^i_{kx\beta\gamma} = \tilde{R}^i_{kx\beta\gamma} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^0}\frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\alpha}\tilde{\Gamma}^i_{k\beta} - \frac{1}{x^0}\frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\beta}\tilde{\Gamma}^i_{k\alpha}\right). \tag{14}$$

Ändert man nun die Komponenten $\tilde{\Gamma}^i_{kx}$ des affinen Zusammenhangs i. w. S. in der Weise, daß die projektive Beschaffenheit davon nicht berührt wird, so ist wie für den affinen Zusammenhang im Weylschen Sinne[3]) dafür notwendig und hinreichend, daß diese Änderung $[\tilde{\Gamma}^i_{kx}]$ von der Form $-\frac{1}{2}(\delta^i_k \psi_x + \delta^i_x \chi_k)$ ist. Bei dieser Änderung gehen aber die geodätischen Linien in sich über, da (7) in

$$x^0 \ddot{x}^i + \Gamma^i_{kx} x^0 \dot{x}^k \cdot x^0 \dot{x}^x - \frac{1}{2}\left(\varphi_x + \psi_x + \chi_x - \frac{1}{x^0}\frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\alpha}\right) x^0 x^x \cdot x^0 \dot{x}^i = 0$$

transformiert wird. Also werden alle Änderungen des affinen Zusammenhangs i. w. S., von welchen die geodätischen Linien nicht betroffen werden, durch alleinige Änderung der φ_x erhalten. Diesen projektiven Änderungen $[\tilde{\Gamma}^i_{kx}] = -\delta^i_k \psi_x$ des affinen Zusammenhangs i. w. S. entsprechen die Änderungen

$$[K^i_{kx\beta\gamma}] = -\frac{1}{2}\delta^i_k \frac{1}{x^0}\left(\frac{\partial \psi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\alpha}\psi_\beta - \frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\beta}\psi_\alpha\right)\right) \tag{15}$$

der Krümmungskomponenten. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das identische Verschwinden des projektiv transformierten Krümmungstensors $K^i_{kx\beta\gamma} + [K^i_{kx\beta\gamma}]$ besteht aber darin, daß der Tensor

$$P^i_{kx\beta\gamma} = K^i_{kx\beta\gamma} - \delta^i_k K_{x\beta\gamma}$$

identisch Null ist, wobei $K_{x\beta\gamma} = K^\nu_{x\nu\beta\gamma}$ gesetzt ist. Denn ist zunächst $-K^i_{kx\beta\gamma} = [K^i_{kx\beta\gamma}]$ von der Form (15), so ist $P^i_{kx\beta\gamma} = 0$. Ist umgekehrt

---

[2]) $K^i_{k\alpha\beta\gamma}$ ist ein Tensor in unserem modifizierten Sinne, nicht aber $\tilde{R}^i_{k\alpha\beta\gamma}$, was nur gegenüber Koordinatentransformation Tensorcharakter hat.

[3]) Vgl. H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Bln. 1923, Anhang 2, S. 64.

$P^i_{kx\beta} = 0$, so folgt wegen $K^\nu_{\nu x\beta} = n\, K_{x\beta}$:

$$K^i_{kx\beta} = \delta^i_k K_{x\beta} = \delta^i_k \frac{1}{n} K^\nu_{\nu x\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\delta^i_k \frac{1}{x^0}\left[\frac{\partial \frac{2}{n}\tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \frac{2}{n}\tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\alpha}\frac{2}{n}\tilde{\Gamma}^\nu_{\nu\beta} - \frac{\partial \lg (x^0)^2}{\partial x^\beta}\tilde{\Gamma}^\nu_{\nu x}\right)\right]$$

d. h., $-K^i_{kx\beta}$ ist von der Form (15) mit $\psi_x = \frac{2}{n}\tilde{\Gamma}^\nu_{\nu x}$. Also ist $P^i_{kx\beta}$ nur von der projektiven Beschaffenheit des mit einem affinen Zusammenhang i. w. S. ausgestatteten Raumes abhängig, und daher der Tensor der Projektivkrümmung.

3. Der metrische Raum.

Die Definition der Metrik lautet wie bei Riemann, nur tritt jetzt das Bezugssystem an Stelle des Koordinatensystems: Indem wir relativ zu einem Bezugssystem die Komponenten g_{ik} eines (0-fach kontravarianten, 2-fach kovarianten) Tensorfeldes von zweiter Stufe und vom Gewicht -2 vorgeben, erklären wir das Längenquadrat des von $P = (x^i)$ nach $P' = (x^i + d x^i)$ weisenden Vektors $\xi^i = x^0 d x^i$ durch die Invariante $g_{ik}\xi^i\xi^k$, welche wir als positiv-definit voraussetzen. Damit ist wie in der Riemannschen Geometrie ein unmittelbarer Fernvergleich der Vektorlängen möglich.

Weiter ergibt sich, daß im Gegensatz zur Riemannschen und Weylschen Geometrie nicht mehr der von Weyl als Grundtatsache bezeichnete Satz gilt, wonach es im metrischen Raum eine und nur eine infinitesimale Übertragung gibt, bei welcher die Vektorlängen ungeändert bleiben. Es gilt lediglich, daß im metrischen Raum die Γ^i_{kx} eindeutig bestimmt sind durch die g_{ik} und die φ_x, letztere aber von den g_{ik} unabhängig sind und noch willkürlich vorgeschrieben werden können.

Beweis. Die Forderung, daß das bei infinitesimaler Übertragung eines kontravarianten Vektors vom metrischen Feld induzierte Längenquadrat $g_{ik}\xi^i\xi^k$ ungeändert bleibt, nimmt jetzt die einfache Gestalt an

$$\delta(g_{ik}\xi^i\xi^k) = 0,$$

wobei die Änderungen der Vektorkomponenten durch $\delta\xi^i = -\tilde{\Gamma}^i_{kx}\xi^k x^0 d x^x$, die Änderungen der Komponenten des metrischen Feldes aber durch $\delta g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha} d x^x$ gegeben sind. Nach Ausführung der Differentiation erhält man

$$\frac{1}{x^0}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha} = g_{ir}\tilde{\Gamma}^r_{kx} + g_{rk}\tilde{\Gamma}^r_{ix} = g_{ir}\Gamma^r_{kx} + g_{rk}\Gamma^r_{ix} - g_{ik}\varphi_x.$$

Die Auflösung nach den Γ^i_{kx} ergibt schließlich

$$\Gamma^i_{kx} = \frac{1}{x^0}\begin{Bmatrix} i \\ k\alpha \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}(\delta^i_k \varphi_x - g_{kx}\varphi^i + \delta^i_x \varphi_k), \tag{16}$$

wobei $g^{ij}\varphi_j = \varphi^i$ gesetzt ist. Es besteht also — vom Faktor $1/x^0$ abgesehen — eine genaue formale Übereinstimmung der Formel (16) mit der bekannten entsprechenden Formel der Weylschen Geometrie. Jedoch sind die φ_x bei Weyl Bestandteile der Metrik, hier aber Bestandteile des affinen Zusammenhangs i. w. S. Durch Verjüngung nach i und k erhält man aus (16) noch die Darstellung

$$\varphi_x = \frac{2}{n}\Gamma^\nu_{\nu x} - \frac{1}{x^0}\frac{\partial \lg \sqrt[n]{g}}{\partial x^a}.$$

Es sei noch erwähnt, daß im metrischen Raum aus einem beliebigen Tensor durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$ eine Tensordichte desselben Kovarianzcharakters entsteht, da $\sqrt{g}$ offenbar eine skalare Dichte auch in unserem modifizierten Sinne ist. Insbesondere ist jetzt im metrischen Raum das Volumenintegral $\int \cdots \int \sqrt{g}\, x^0\, dx^1 \ldots x^0\, dx^n$ eine absolute Invariante.

4. Vergleichende Betrachtung der Weylschen Geometrie.

Schon aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß eine nahe innere Verwandtschaft besteht zwischen Weylscher Geometrie und der hier vorgenommenen Erweiterung der Riemannschen Geometrie. Um einen Vergleich beider noch deutlicher ziehen zu können, geben wir zunächst eine kurze Skizze der Weylschen Geometrie.

Bekanntlich ist im Riemannschen Raum unter den möglichen affinen Zusammenhängen ein einziger durch die Forderung ausgezeichnet, daß bei infinitesimaler Übertragung eines Vektors dessen vom metrischen Feld induzierte Länge ungeändert bleibt. Wie im affinen Raum besteht auch im Riemannschen Raum keine Möglichkeit zu einem unmittelbaren Fernvergleich der Vektoren, wohl aber der Vektorlängen. In dieser Grundvoraussetzung Riemanns sah Weyl, wenigstens in seinen früheren Schriften, eine Inkonsequenz, und forderte ein Prinzip der infinitesimalen Längenübertragung. Sollen die Längen von Vektoren in endlich voneinander entfernten Punkten ebenso wenig vergleichbar sein wie die Vektoren selber, dann darf das metrische Feld zunächst nur einen Längenvergleich der jeweils von ein und demselben willkürlichen Punkt aus aufgetragenen Vektoren ermöglichen. Zwei vom selben Punkt $P = (x^i)$ aus aufgetragene Vektoren ξ^i und ξ'^i haben also dann und nur dann gleiche Länge, wenn die metrische Fundamentalform im Punkte $P = (x^i)$ für beide Vektoren denselben Wert annimmt: $g_{ik}\xi^i\xi^k = g_{ik}\xi'^i\xi'^k$. Hierdurch aber sind die Komponenten g_{ik} des metrischen Tensorfeldes nur bis auf einen positiven Skalarfaktor λ^{-2} bestimmt.

Indem man ein bestimmtes Skalarfeld $\lambda(x^1, \ldots, x^n) \neq 0$ wählt, wird der Raum in jedem seiner Punkte geeicht. Die Komponenten des metrischen Tensors sind also nicht nur von der Wahl des Koordinatensystems, sondern auch von der Wahl einer Eichung abhängig. Damit ist zunächst die Erweiterung des Koordinatenbegriffs zum Begriff des „Bezugssystems" als einer Zusammenfassung von Koordinatensystem und Eichung vollzogen. Zugleich nimmt Weyl eine Modifikation des Tensorbegriffs vor, wonach die Tensorkomponenten so vom Koordinatensystem und der Eichung abhängen, daß sie sich bei Übergang zu neuen Koordinaten in der bekannten Weise transformieren, bei Übergang zu einer neuen Eichung aber mit einer Potenz λ^e des Eichfaktors multiplizieren. Alsdann heißt e das Gewicht des betreffenden Tensors.

Auf Grund der Weylschen Annahme, daß das Längenquadrat eines Vektors im allgemeinen von der Eichung abhängt, sind irgend zwei von verschiedenen Punkten P und P' aus aufgetragene Vektoren vom Gewicht 0 zunächst überhaupt nicht der Länge nach vergleichbar. Die Weylsche Annahme führt zu Räumen, die wohl in jedem ihrer Punkte eine Maßbestimmung tragen, aber ohne jeden „metrischen Zusammenhang" sind. Nun ist unter diesen Räumen der Riemannsche Raum dadurch gekennzeichnet, daß in ihm definiert ist, was es heißt: zwei von verschiedenen Punkten P und P' aus aufgetragene Vektoren vom Gewicht 0 sind gleich lang, oder deren Längen gehen durch Längenübertragung auseinander hervor. Die Definition hierfür wird gegeben, indem man eine Eichung wählt und je zwei von $P = (x^i)$ und $P' = (x'^i)$ aus aufgetragene Vektoren vom Gewicht 0 dann und nur dann gleich lang heißt, falls ihre Längenquadrate bei dieser „Normaleichung" übereinstimmen: $g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)\,\xi^i\xi^k = g_{ik}(x'^1, \ldots, x'^n)\,\xi'^i\xi'^k$. Indem Weyl diese so gefaßte Kennzeichnung des Riemannschen Raumes nur noch für den Fall infinitesimal benachbarter Punkte $P = (x^i)$ und $P' = (x^i + dx^i)$ anerkannte, gelangte er zu einer Verallgemeinerung des Riemannschen Raumes. Dieser Weylsche Raum, der im Unendlichkleinen Riemannisch ist, ist also durch die Forderung charakterisiert, daß es für jeden Punkt $P = (x^i)$ eine Eichung gibt, derart, daß je zwei von $P = (x^i)$ und einem infinitesimal benachbarten Punkt $P' = (x^i + dx^i)$ aus aufgetragene Vektoren ξ^i und $\xi^i + \delta\xi^i$ vom Gewicht 0 gleiche Längen haben, falls sie in bezug auf diese in P geodätische Eichung gleiche Längenquadrate besitzen: $\delta(g_{ik}\xi^i\xi^k) = 0$. Dann ist bei Benutzung einer beliebigen Eichung die totale Differentialgleichung

$$\delta(g_{ik}\xi^i\xi^k) = -\varphi_\alpha \cdot g_{ik}\xi^i\xi^k\,dx^\alpha \tag{17}$$

der äquivalente Ausdruck für die independente Definition der infinitesimalen Längenübertragung eines Vektors vom Gewicht 0.

Danach beruht die Weylsche Geometrie auf der Negation einer absoluten Längeneinheit. Weyls Forderung nach Relativität der Längenmessung führte zunächst auf die Eichabhängigkeit der Komponenten

des metrischen Tensors und damit auf das Prinzip der Eichinvarianz, welches zusammen mit demjenigen der Koordinateninvarianz der Willkürlichkeit des Bezugssystems Rechnung trägt. Aber formal ist der Eichbegriff nicht an die Voraussetzung der Längenmessung gebunden. Indem Weyl von vornherein unter Eichung die Festlegung von Längeneinheiten versteht und sich bei der Formulierung des metrischen Zusammenhangs — abgesehen vom metrischen Tensor — auf Tensoren vom Gewicht 0 beschränkt, gelangt er in vollkommener Analogie zur Parallelübertragung eines Vektors im affin zusammenhängenden Raum zur kongruenten Übertragung einer Strecke im metrischen Raum. In der Begründung der Weylschen Geometrie ist also die nicht-integrable Längenübertragung der zentrale Grundbegriff, demgegenüber der Begriff des mit Gewicht behafteten Tensors nur die Rolle eines rechenbequemen Hilfsbegriffs spielt.

Im Gegensatz hierzu bildet in dem oben gegebenen Aufbau der Infinitesimalgeometrie das Prinzip der Eichinvarianz den Ausgangspunkt, wodurch eine gewisse Diskrepanz in der logischen Rangordnung des Eichbegriffs vermieden wird. Denn im Weylschen Aufbau der Infinitesimalgeometrie kann einerseits von Eichung als einer Festlegung von Maßzahlen nur im metrischen Raum gesprochen werden. Andererseits müßte die Eichung als ein mit dem Koordinatensystem gleichberechtigter Bestandteil des Bezugssystems vor aller Raumstruktur rangieren.

Der enge Zusammenhang zwischen Weylscher Geometrie und ihrer vorliegenden Modifikation geht besonders deutlich aus folgender Betrachtung hervor. In der independenten Kennzeichnung der infinitesimalen Längenübertragung — nämlich durch die Forderung, daß es zu jedem Punkt P eine Eichung gibt, in bezug auf welche der Skalar T bei infinitesimaler Übertragung ungeändert bleibt — kann wegen der Koordinateninvarianz der Tensoren nullter Stufe das Wort „Eichung" durch das Wort „Bezugssystem" ersetzt werden. Ebenso kann in der independenten Kennzeichnung der infinitesimalen Vektorübertragung — nämlich durch die Forderung, daß es zu jedem Punkt P ein Koordinatensystem gibt, in bezug auf welches die Komponenten ξ^i bei infinitesimaler Übertragung ungeändert bleiben — wegen der Eichinvarianz der Tensoren vom Gewicht Null das Wort „Koordinatensystem" durch das Wort „Bezugssystem" ersetzt werden. In der Tat findet sich diese Erklärung der Parallelübertragung eines Vektors vom Gewicht Null auch bei Weyl[4]). Im Weylschen Raum fallen demnach infinitesimale Längenübertragung und infinitesimale Vektorübertragung unter denjenigen Begriff der infinitesimalen Übertragung eines Tensors $(r+s)$-ter Stufe vom Gewicht e, welcher durch die Forderung gekennzeichnet ist: zu jedem Punkt P gibt es ein Bezugssystem (= Koordinatensystem

[4]) Vgl. Raum, Zeit, Materie, 5. Aufl., Zusatz S. 126.

+ Eichung), in bezug auf welches die Komponenten $T_{\sigma_1 \dots \sigma_s}^{\varrho_1 \dots \varrho_r}$ des Tensors bei Übertragung vom Punkte P nach einem infinitesimal benachbarten P' ungeändert bleiben. Hieraus folgt für die Änderung der Komponenten bei Benutzung eines beliebigen Bezugssystems:

$$(18)\quad \delta T_{\sigma_1 \dots \sigma_s}^{\varrho_1 \dots \varrho_r} = -\sum_{\lambda=1}^{r} \Gamma_{\nu\alpha}^{\varrho_\lambda} T_{\dots}^{\dots \nu \dots} d x^\alpha + \sum_{\lambda=1}^{s} \Gamma_{\sigma_\lambda \alpha}^{\nu} T_{\dots \nu \dots}^{\dots} d x^\alpha + \frac{e}{2} \varphi_\alpha T_{\dots}^{\dots} d x^\alpha.$$

Diese aus der Weylschen Theorie resultierende allgemeine Übertragungsformel enthält in der Tat für Tensoren vom Gewicht $e = 0$ die bekannte Formel für die infinitesimale Übertragung eines Tensors $(r+s)$-ter Stufe, und enthält für Tensoren beliebigen Gewichts e aber nullter Stufe die Formel

$$(19)\quad \delta T = \frac{e}{2} \varphi_\alpha T \, d x^\alpha.$$

Hat der Vektor ξ^i das Gewicht 0, somit sein Längenquadrat $T = g_{ik} \xi^i \xi^k$ das Gewicht $e = -2$, so geht (18) in die ursprüngliche Formel (17) der infinitesimalen Längenübertragung über. Hat man also mit Weyl Koordinatensystem und Eichung zu einem Bezugssystem zusammengefaßt und hat man nicht nur dem metrischen Fundamentaltensor sondern jedem Tensor ein bestimmtes Gewicht zugeschrieben, so erscheint im metrischen Raum die Einführung einer besonderen Längenübertragung neben der Formel (18) entsprechenden allgemeinen Übertragung von Tensoren entbehrlich.

Noch deutlicher wird der Zusammenhang zwischen Weylscher Geometrie und der vorgenommenen Modifikation durch die Tatsache, daß der Weylsche Raum keineswegs Riemannisch zu sein braucht, wenn die Längenübertragung integrabel ist: in der Weylschen Geometrie — in der jedem Tensor unabhängig von seinem Kovarianzcharakter ein Gewicht zukommt — ist nämlich die Integrabilität der infinitesimalen Längenübertragung nur dann für die Integrabilität der Linearform $\varphi_\alpha d x^\alpha$ charakteristisch, wenn man sich auf Vektoren eines von 1 verschiedenen Gewichts beschränkt. Denn ist ξ^i ein Vektor vom Gewicht e, sein Längenquadrat $T = g_{ik} \xi^i \xi^k$ also ein Skalar vom Gewicht $2(e-1)$, so lautet die Formel der infinitesimalen Übertragung für ein beliebiges Bezugssystem:

$$(20)\quad \delta (g_{ik} \xi^i \xi^k) = (e-1) \varphi_\alpha \cdot g_{ik} \xi^i \xi^k \cdot d x^\alpha,$$

welche an Stelle der ursprünglichen Formel (17) für Vektoren vom Gewicht Null tritt. Aus Formel (20) ergibt sich, daß auch der Weylsche Raum noch einen direkten Fernvergleich von Vektorlängen ermöglicht, nämlich der Längen derjenigen Vektoren, deren Gewicht $= 1$ ist.

Die Nicht-Integrabilität der Längenübertragung ist also in der Weylschen Geometrie gar nicht vollständig erreicht und von der Natur auch nicht gefordert, wo nach spektroskopischer Erfahrung alle skalaren

Größen von ihrer Vorgeschichte völlig unabhängig sind. Die vorgeschlagene Modifikation der Weylschen Geometrie besteht darum in der naheliegenden Koppelung des Tensorgewichts an den Kovarianzcharakter des Tensors und in der gleichzeitigen Befreiung des Eichbegriffs aus seiner Verhaftung im metrischen Raum. Der damit verbundene Wechsel in der Rolle der Größen φ_α kann darin erblickt werden, daß diese Rolle in der Weylschen Metrik eine „konforme Lockerung„ der Riemannschen Metrik, im affinen Zusammenhang i. w. S. aber eine „projektive Lockerung“ [5]) des affinen Zusammenhangs im Weylschen Sinne bedeutet.

[5]) Diese Kennzeichnung gibt Herr Weyl in einem Referat, wo er die Weylsche Geometrie eine „konform gelockerte metrische“ und die hier vorgeschlagene affine Geometrie eine „projektiv gelockerte affine“ nennt.

(Eingegangen am 30. Dezember 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 1, S. 65—80 (1951).

Zur affinen Differentialgeometrie*).

Teil I: Über p-dimensionale Minimalflächen und Sphären im n-dimensionalen Raum.

Von

Wilhelm Klingenberg in Kiel.

Einleitung.

In der Arbeit „Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n" [1]) hat K. H. Weise unter anderem das Einspannungsproblem für p-dimensionale Flächen F_p im n-dimensionalen affinen Raum A_n [2]) gelöst, indem er mit Hilfe einer verallgemeinerten Apolaritätsbedingung eines der die F_p i. a. von 2. Ordnung berührenden p-dimensionalen Schmiegparaboloide auszeichnet und den $(n-p)$-dimensionalen Durchmesserraum dieses Paraboloids zum Affinnormalenraum erklärt. Dieser Affinnormalenraum ist unabhängig von der Parameterwahl [3]) und verhält sich gegenüber allgemeinen [4]) Affinitäten wie ein kontravarianter Vektorraum. Für Hyperflächen (d. h. $p = n-1$) erhalten wir die übliche Affinnormale [5]).

---

*) Für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Ratschläge bin ich Herrn Prof. Weise zu Dank verpflichtet.

[1]) Teil I: Math. Z. **43** (1938) S. 469—480; Teil II: Math. Z. **44** (1939) S. 161—184. Im folgenden ist stets der für unsere Überlegungen wichtigere Teil II dieser Arbeit zitiert.

[2]) In der Bezeichnung von Schouten ist es ein E_n. Vergl. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, S. 10.

[3]) Die von Schouten angegebene Lösung des Einspannungsproblems für eine p-dimensionale Mannigfaltigkeit in einem n-dimensionalen Raum mit affinem Zusammenhang (wozu unser Raum als Spezialfall mit identisch verschwindenden Übertragungsgrößen gehört) erweist sich insofern als unbefriedigend, als daß der dort angegebene Normalenraum für $p < n-1$ von der Wahl der Parameter abhängt und also sicher keine geometrische Bedeutung besitzt (vgl. Schouten [2]), IV § 18).

[4]) In der klassischen affinen Differentialgeometrie wurden die inhaltstreue oder die radiale (homogene) affine Gruppe zugrunde gelegt. Das kontravariante Verhalten gegenüber allgemeinen Affinitäten gewinnt Weise durch Verzicht auf die explizite Angabe der kovarianten Normalenvektoren, von denen er ausgeht, genau so wie man auch in der metrischen Differentialgeometrie die Normalenvektoren durch ihre Eigenschaften kennzeichnen und auf ihre explizite Angabe verzichten kann.

[5]) Zur klassischen affinen Flächentheorie einer F_2 im A_3 und zur allgemeinen Theorie der Hyperflächen F_{n-1} im A_n vgl. Blaschke, Differentialgeometrie Bd. II, Berlin 1923.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit bringt einige Erörterungen über allgemeine Flächenklassen, während im zweiten Teil speziell die Affingeometrie der F_2 im A_4 untersucht wird, wobei unter anderem die hier eingeführten Begriffsbildungen zur Anwendung gelangen. In § 1 stellen wir die Formeln für den Affinnormalenraum, die Ableitungsgleichungen und die Integrierbarkeitsbedingungen zusammen. Dann gehen wir auf die Besonderheiten bei inhaltstreuen Affinitäten ein. In § 2 beschränken wir uns auf inhaltstreue Affinitäten. Wir können dann eine Affinoberfläche O erklären und eine Formel für ihre erste Variation δO aufstellen, die der klassischen GAUSS'schen Formel analog ist. Verschwindet δO, so sprechen wir von Minimalflächen. Sie sind. wieder in voller Analogie zur klassischen Flächentheorie, durch das Verschwinden eines kovarianten Normalenvektors gekennzeichnet, und das Oberflächenintegral läßt sich für diese Flächen in ein Randintegral umformen. In § 3 erklären wir nach einigen allgemeinen Erörterungen über das Schnittgebilde benachbarter Normalenräume die Sphären als solche Flächen, bei denen die $(n\text{-}p)$-dimensionalen Normalenräume einen $(n\text{-}p\text{-}1)$-dimensionalen Raum gemeinsam haben. Für Hyperflächen erhalten wir so offenbar die gewöhnlichen Affinsphären. Es gilt: Hat eine Fläche die angegebene Eigenschaft im Kleinen, so gilt sie auch im Großen, d. h. so ist sie eine Sphäre.

§ 1.

Der Affinnormalenraum.

1. Der Affinnormalenraum. Wir geben zunächst kurz die explizite Formel für den Affinnormalenraum an. In der Bezeichnung schließen wir uns (bis auf geringe Modifikationen) der Originalarbeit an[6], auf die wir auch für eine ausführliche Motivierung dieser Entwicklungen verweisen.

Um zu geometrischen Resultaten zu gelangen, müssen wir auf das Verhalten unserer Größen bei folgenden Transformationen achten:

(a) Gruppe der affinen Raumtransformationen des A_n.

(b) Gruppe der Parametertransformationen.

(c) Gruppe der affinen Normalenraumtransformationen.

Die bezüglich der Gruppe (a) kontravarianten bzw. kovarianten Vektoren bezeichnen wir mit kleinen bzw. großen deutschen Buchstaben. Die von der Gruppe (b) beeinflußten Größen kennzeichnen wir durch griechische Indizes aus dem ersten Teil des Alphabets: α,

[6] Damit legen wir die in der Arbeit: Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum von R. KÖNIG und E. PESCHL (Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig **86** (1934), 1. Mitt. S. 129—154, 2. Mitt. S. 267—298, 3. Mitt. S. 383—410) und R. KÖNIG und K. H. WEISE (ib. **87** (1935) 4. Mitt. S. 223—250) entwickelte Schreibweise zugrunde. — Vgl. auch BLASCHKE [5].

β, γ; λ, μ; sie durchlaufen die Werte $1, \ldots, p$. Die von der Gruppe (c) beeinflußten Größen bezeichnen wir mit griechischen Indizes aus dem zweiten Teil des Alphabets: ϱ, σ, τ; sie durchlaufen die Werte $1, \ldots, r \equiv n - p$ [7]). Falls die Indizes kein tensorielles Transformationsverhalten anzeigen, bemerken wir dies ausdrücklich.

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^\alpha) \quad [8])$$

sei der Ortsvektor der F_p im A_n. Wir betrachten nur Punkte, für die stetige vierte Ableitungen existieren. Der p-dimensional vorausgesetzte *kontravariante Tangentialraum* wird durch die Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha}$ aufgespannt. Mit $\mathfrak{N}^\varrho$ bezeichnen wir eine Basis für den durch die Gleichungen

$$\mathfrak{N}^\varrho \circ \mathfrak{x}_\alpha = 0 \quad [9]) \qquad (\alpha = 1, \ldots, p) \tag{1.1}$$

definierten r-dimensionalen *kovarianten Normalenraum*. Zu diesem bestimmen wir auf folgende Art den gesuchten kontravarianten Normalenraum: Zunächst erhalten wir in den Größen

$$B^\varrho_{\alpha\beta} = \mathfrak{N}^\varrho \circ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \tag{1.2}$$

die Koeffizienten einer r-gliedrigen Schar quadratischer Differentialformen, die für $r = 1$ offenbar die zweite GAUSS'sche Grundform definieren. Wir bilden hierzu komplementäre Größen $\bar{B}^{\alpha\beta}_\varrho$ mit den Eigenschaften

$$B^\varrho_{\alpha\beta} \bar{B}^{\alpha'\beta}_\varrho = r \delta^{\alpha'}_\alpha \quad ; \quad B^\varrho_{\alpha\beta} \bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho'} = p \delta^\varrho_{\varrho'}. \tag{1.3}$$

Um zu diesen Größen zu gelangen, bilden wir mit

$$S^{\varrho_1 \ldots \varrho_p}_{\underbrace{1 \ldots p}_{p!}} = \frac{1}{p!} \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\underbrace{1 \ldots p}} \delta^{\beta_1 \ldots \beta_p}_{\underbrace{1 \ldots p}} B^{\varrho_1}_{\alpha_1 \beta_1} \ldots B^{\varrho_p}_{\alpha_p \beta_p} \quad [10]) \tag{1.4}$$

---

[7]) Künftig verwenden wir r immer als Abkürzung für $n - p$.

[8]) Obgleich der sog. Ortsvektor bei inhomogenen Affinitäten kein Vektor ist, haben wir hier die übliche Bezeichnung mit einem deutschen Buchstaben gewählt.

[9]) Das Symbol $\circ$ bezeichnet das skalare Produkt eines kontravarianten und eines kovarianten Raumvektors.

[10]) $\underbrace{1 \ldots p}$ zeigt ein p-stufiges Transformationsverhalten bei Parametertransformationen an, also die Multiplikation oder Division mit der Funktionaldeterminante, jenachdem der Index unten oder oben steht. $\underbrace{(1 \ldots p)}^{k}$ bezeichnet k solche Indizes. — $\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\underbrace{1 \ldots p}}$ ist das „verallgemeinerte Kroneckersymbol". Es hat den Wert $+1$ bzw. 0 bzw. -1, jenachdem $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ eine gerade bzw. keine bzw. eine ungerade Permutation der Zahlen $1, \ldots, p$ ist. $\delta^{\underbrace{1 \ldots p}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ ist ebenso erklärt. Vgl. R. KÖNIG und E. PESCHL [6]), 1. Mitt., S. 140.

einen symmetrischen Tensor p-Grades bei Normalenraumtransformationen, der sich bei Parametertransformationen mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante multipliziert. Hiermit bilden wir

$$(1.5)\qquad T^{\varrho_1 \cdots \varrho_{2p}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}} = \frac{1}{(2p)!} \sum_1^{(2p)!} S_\nu \left(S^{\varrho_1 \cdots \varrho_p}_{\underbrace{(1 \ldots p)^2}} \; S^{\varrho_{p+1} \cdots \varrho_{2p}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^2}} \right), \text{ [11]}$$

einen symmetrischen Tensor $2p$-ten Grades. Bei nichtverschwindender Determinante T [12], deren Transformationsverhalten durch

$$(1.6)\qquad T^{\underbrace{(1 \ldots r)^{2p}}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^{4r}}} \text{ [13]}$$

angegeben wird, können wir die komplementären Elemente

$$(1.7)\qquad T^{\underbrace{(1 \ldots p)^4}}_{\varrho_1 \ldots \varrho_{2p}} = \frac{1}{T} \, \delta^{\underbrace{1 \ldots r}}_{\varrho_1 \sigma_{1\,2} \ldots \sigma_{1\,r}} \ldots \delta^{\underbrace{1 \ldots r}}_{\varrho_{2p} \sigma_{2p\,2} \ldots \sigma_{2p\,r}} T^{\sigma_{1\,2} \cdots \sigma_{2p\,2}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}} \ldots T^{\sigma_{1\,r} \cdots \sigma_{2p\,r}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}}$$

mit der Eigenschaft $T^{\varrho \varrho_2 \cdots \varrho_{2p}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}} \bar{T}^{\underbrace{(1 \ldots p)^4}}_{\varrho' \varrho_2 \cdots \varrho_{2p}} = \delta^{\varrho}_{\varrho'}$ bilden. Hiermit erklären wir die Elemente

$$(1.8)\qquad \bar{S}^{\underbrace{(1 \ldots p)^2}}_{\varrho_1 \cdots \varrho_p} = \bar{T}^{\underbrace{(1 \ldots p)^4}}_{\varrho_1 \cdots \varrho_{2p}} \, S^{\varrho_{p+1} \cdots \varrho_{2p}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^2}},$$

welche zu $S^{\varrho_1 \cdots \varrho_p}_{\underbrace{(1 \ldots p)^2}}$ komplementär sind: $S^{\varrho \varrho_2 \cdots \varrho_p}_{\underbrace{(1 \ldots p)^2}} \bar{S}^{\underbrace{(1 \ldots p)^2}}_{\varrho' \varrho_2 \cdots \varrho_p} = \delta^{\varrho}_{\varrho'}$. Die Größen $\breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}$ erklären wir jetzt durch

$$(1.9)\qquad \breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho} = \frac{1}{(p-1)!} \, \delta^{\alpha \alpha_2 \ldots \alpha_p}_{\underbrace{1 \ldots p}} \, \delta^{\beta \beta_2 \ldots \beta_p}_{\underbrace{1 \ldots p}} \, B^{\varrho_2}_{\alpha_2 \beta_2} \ldots B^{\varrho_p}_{\alpha_p \beta_p} \, \bar{S}^{\underbrace{(1 \ldots p)^2}}_{\varrho \varrho_2 \ldots \varrho_p};$$

sie haben die Eigenschaften (1.3), wie man leicht nachprüft.

Wir bilden ferner die Größen

$$(1.10)\qquad \omega^{\varrho}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \mathfrak{N}^{\varrho} \frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha_1} \partial u^{\alpha_2} \partial u^{\alpha_3}} + \frac{1}{r} \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)} B^{\varrho}_{\alpha_1 \lambda} \left(\frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha_2 \alpha_3}}{\partial u^{\gamma}} - \mathfrak{N}^{\varrho} \frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha_2} \partial u^{\alpha_3} \partial u^{\gamma}} \right) B^{\lambda \gamma}_{\sigma}, \text{ [14]}$$

$$(1.11)\qquad E^{\alpha\beta}_{\tau\lambda} = \left\{ \delta^{\alpha}_{\lambda} \, \delta^{\beta}_{\tau} + \frac{2}{p\,r} \, \breve{B}^{\alpha_2 \alpha_3}_{\tau} \, B^{\varrho}_{\alpha_2 \lambda} \, B^{\beta}_{\alpha_3 \alpha_1} \, \breve{B}^{\alpha_1 \alpha}_{\varrho} \right\}.$$

---

[11]) S_ν bedeutet eine Permutation der Indizes $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$, $\varrho_{p+1}, \ldots, \varrho_{2p}$. Wir symmetrisieren also.

[12]) Für $T \neq 0$ ist notwendig $n \leqq p + \binom{p+1}{2}$; d. h. der höchstens $\left(\binom{p+1}{2} + p\right)$-dimensionale zweite Schmiegraum der F_p muß den A_n aufspannen. Die F_p darf also nicht zu sehr einen raumkurvenartigen Charakter haben. Vgl. Weise [1]), S. 174.

[13]) $\underbrace{1 \ldots r}$ zeigt ein r-stufiges Transformationsverhalten bei Normalenraumtransformationen an. — I. a. lassen wir künftig bei T die Indizes fort.

[14]) Diese Größe ist bei Normalenraumtransformationen kein Tensor. — $\sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)}$ bedeutet die Summe über die zyklischen Permutationen der Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Zu den $E^{\alpha\sigma}_{\tau\lambda}$ können wir bei nichtverschwindender Determinante [15]) die komplementären Größen $\breve{E}^{\lambda\tau'}_{\sigma\alpha'}$ [16]) bilden mit der Eigenschaft

$$E^{\alpha\sigma}_{\tau\lambda}\, E^{\lambda\tau'}_{\sigma\alpha'} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}\, \delta^{\tau'}_{\tau}\,. \tag{1.12}$$

Hiermit erklären wir nun

$$\mathfrak{Z}^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{r}\left(\mathfrak{N}^{\sigma} \circ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha}\, \partial u^{\beta}\, \partial u^{\gamma}} - \frac{\partial B^{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}\right) \breve{B}^{\lambda\gamma}_{\sigma} + \frac{1}{r\,p}\, \omega^{\varrho}_{\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'}\, \breve{B}^{\alpha_2'\alpha_3'}_{\varrho}\, \breve{B}^{\alpha'\alpha_1'}_{\tau'}\, E^{\lambda\tau'}_{\sigma\alpha'}\, B^{\sigma}_{\alpha\beta}\,. \tag{1.13}$$

Diese Größen transformieren sich wie Übertragungsgrößen und sind invariant gegenüber Normalenraumtransformationen. Damit haben die r Vektoren

$$\boxed{\mathfrak{n}_{\varrho} = \frac{1}{p}\, \breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha}\, \partial u^{\beta}} - \mathfrak{Z}^{\lambda}_{\alpha\beta}\, \mathfrak{x}_{\lambda}\right)} \tag{1.14}$$

folgende Eigenschaften: Sie sind kontravariante Vektoren bei affinen Transformationen des A_n und invariant bei Parametertransformationen. Bei Normalenraumtransformationen verhalten sie sich kontragredient zu den $\mathfrak{N}^{\varrho}$. Ferner gilt

$$\mathfrak{N}^{\varrho} \circ \mathfrak{n}_{\sigma} = \delta^{\varrho}_{\sigma} \tag{1.15}$$

und damit

$$|\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p,\ \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r| \neq 0. \tag{1.16}$$

Wir nennen daher den von den r Vektoren $\mathfrak{n}_{\varrho}$ aufgespannten Raum den kontravarianten Affinnormalenraum der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^{\alpha})$.

2. Die Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen. Die Ableitungsgleichungen können wir in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha}\, \partial u^{\beta}} &= B^{\varrho}_{\alpha\beta}\, \mathfrak{n}_{\varrho} + \mathfrak{Z}_{\alpha\beta}\, \mathfrak{x}_{\lambda} \\ \frac{\partial \mathfrak{n}_{\varrho}}{\partial u^{\alpha}} &= t^{\sigma}_{\varrho\alpha}\, \mathfrak{n}_{\sigma} + \Omega_{\varrho\alpha}\, \mathfrak{x}_{\lambda} \end{aligned} \tag{1.17}$$

schreiben [17]). Die Integrabilitätsbedingungen lauten damit

---

[15]) Über die noch offene Frage, ob die Bedingung $|E^{\alpha\sigma}_{\tau\lambda}| \neq 0$ eine zusätzliche Forderung an die $\boldsymbol{F}_p$ darstellt, vgl. Weise [1]), S. 179—180.

[16]) Vgl. Weise [1]), S. 170.

[17]) Dabei werden die Koeffizienten $\Omega^{\lambda}_{\varrho\alpha}$ und $t^{\sigma}_{\varrho\alpha}$ (die „Torsionskoeffizienten", die bei Normalenraumtransformationen keine Tensoren sind) durch diese Gleichungen definiert. Das Auftreten von $B^{\varrho}_{\alpha\beta}$ dagegen folgt aus (1.1), (1.2) und (1.15). Der Koeffizient bei $\mathfrak{x}_{\lambda}$ ergibt sich zu $Z^{\lambda}_{\alpha\beta}$, wenn wir, indem wir ihn zunächst mit $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ bezeichnen, $Z^{\lambda}_{\alpha\beta}$ aus (1.13) unter Verwendung der Gleichung (1.26) (in der also $Z^{\lambda}_{\alpha\beta}$ durch $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ zu ersetzen ist) berechnen und die wegen (1.14) gültige Beziehung $\breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}(Z^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}) = 0$ verwenden.

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad R^{\lambda}_{\alpha\cdot\beta\gamma} + B^{\varrho}_{\alpha\beta}\,\Omega^{\lambda}_{\varrho\gamma} - B^{\varrho}_{\alpha\gamma}\,\Omega^{\lambda}_{\varrho\beta} = 0\\
&\text{(b)}\quad \frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha\gamma}}{\partial u} + Z^{\lambda}_{\alpha\beta} B^{\varrho}_{\lambda\gamma} - Z^{\lambda}_{\alpha\gamma} B^{\varrho}_{\lambda\beta} + B^{\sigma}_{\alpha\beta} t^{\varrho}_{\sigma\gamma} - B^{\varrho}_{\alpha\gamma}\, t^{\sigma}_{\sigma\beta} = 0\\
&\text{(c)}\quad \frac{\partial \Omega^{\lambda}_{\varrho\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial \Omega^{\lambda}_{\varrho\beta}}{\partial u^{\alpha}} + \Omega^{\gamma}_{\varrho\alpha} Z^{\lambda}_{\gamma\beta} - \Omega^{\gamma}_{\varrho\beta} Z^{\lambda}_{\gamma\alpha} + t^{\sigma}_{\varrho\alpha}\,\Omega^{\lambda}_{\sigma\beta} - t^{\sigma}_{\varrho\beta}\,\Omega^{\lambda}_{\sigma\alpha} = 0\\
&\text{(d)}\quad \frac{\partial t^{\sigma}_{\varrho\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial t^{\sigma}_{\varrho\beta}}{\partial u^{\alpha}} + t^{\tau}_{\varrho\alpha}\, t^{\sigma}_{\tau\beta} - t^{\tau}_{\varrho\beta}\, t^{\sigma}_{\tau\alpha} + \Omega^{\lambda}_{\varrho\alpha} B^{\sigma}_{\lambda\beta} - \Omega^{\lambda}_{\varrho\beta} B^{\sigma}_{\lambda\alpha} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Analog zur klassischen affinen Flächentheorie erklären wir die Koeffizienten $B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma}$ einer r-gliedrigen Schar kubischer Differentialformen durch die Gleichungen

$$
B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{N}^{\varrho} \circ \frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha}\,\partial u^{\beta}\,\partial u^{\gamma}} - (B^{\varrho}_{\alpha\lambda} Z^{\lambda}_{\beta\gamma} + B^{\varrho}_{\beta\lambda} Z^{\lambda}_{\gamma\alpha} + B^{\varrho}_{\gamma\lambda} Z^{\lambda}_{\alpha\beta}). \tag{1.19}
$$

Sie genügen mit den Größen $\breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}$ einer „verallgemeinerten Apolaritätsbedingung“:

$$
B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma}\,\breve{B}^{\alpha\beta}_{\tau}\,B^{\gamma\lambda}_{\varrho} = 0 \tag{1.20}
$$

wie man durch Einsetzen von $Z^{\lambda}_{\alpha\beta}$ bestätigt. Endlich führen wir noch *kovariante Tangentialvektoren* $\mathfrak{X}^{\alpha}$ durch die Gleichungen

$$
\mathfrak{X}^{\alpha} \circ \mathfrak{x}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,;\quad \mathfrak{X}^{\alpha} \circ \mathfrak{n}_{\varrho} = 0 \tag{1.21}
$$

ein. Für das kovariante Basissystem $\mathfrak{X}^{\alpha}$, $\mathfrak{N}^{\varrho}$ lauten die Ableitungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{X}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}} &= -\Omega^{\alpha}_{\varrho\beta}\,\mathfrak{N}^{\varrho} - Z^{\alpha}_{\lambda\beta}\,\mathfrak{X}^{\lambda}\\
\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u^{\alpha}} &= -t^{\varrho}_{\sigma\alpha}\,\mathfrak{N}^{\varrho} - B^{\varrho}_{\lambda\alpha}\,\mathfrak{X}^{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Die zwischen den kovarianten und kontravarianten örtlichen Basisvektoren bestehenden Beziehungen (1.1), (1.15) und (1.21) gestatten es offenbar, die skalaren Produkte $\mathfrak{X}^{\alpha} \circ \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{N}^{\varrho} \circ \mathfrak{v}$, wobei $\mathfrak{v}$ ein beliebiger kontravarianter Vektor ist, in der Form

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X}^{\alpha} \circ \mathfrak{v} &= \frac{|\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\alpha-1}, \mathfrak{v}, \mathfrak{x}_{\alpha+1}, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r|}{|\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\alpha-1}, \mathfrak{x}_{\alpha}, \mathfrak{x}_{\alpha+1}, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r|}\\
\mathfrak{N}^{\varrho} \circ \mathfrak{v} &= \frac{|\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\varrho-1}, \mathfrak{v}, \mathfrak{n}_{\varrho+1}, \ldots, \mathfrak{n}_r|}{|\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\varrho-1}, \mathfrak{v}, \mathfrak{n}_{\varrho+1}, \ldots, \mathfrak{n}_r|}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

zu schreiben.

3. Inhaltstreue Affinitäten. Wir beschränken die Gruppe (a) der affinen Transformationen des A_n und die Gruppe (c) der Normalenraumtransformationen auf inhaltstreue Affinitäten[18]. Wir können dann

[18] Für „inhaltstreue“ Affinitäten hat die Transformationsdeterminante den Wert $+1$.

den Normalenraum durch

$$|\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r| = \pm |T|^{\frac{1}{4r}} \tag{1.24}$$

normieren [19]). Denn bei inhaltstreuen Affinitäten sind diese Größen invariant und bei gleichsinnigen Parametertransformationen multiplizieren sie sich beide mit der Funktionaldeterminante (vgl. (1.6)). Die logarithmische Ableitung dieser Gleichung liefert

$$Z^{\alpha}_{\alpha\gamma} + t^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4r} \frac{\partial \lg |T|}{\partial u^{\gamma}}. \tag{1.25}$$

Um diesen Ausdruck noch etwas umzuformen, differenzieren wir in (1.17) $\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}}$ nach u^{γ} und erhalten für das skalare Produkt mit $\mathfrak{N}^{\varrho}$:

$$\mathfrak{N}^{\varrho} \frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta} \partial u^{\gamma}} = Z^{\lambda}_{\alpha\beta} B^{\varrho}_{\lambda\gamma} + \frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} + B^{\sigma}_{\alpha\beta} t^{\varrho}_{\sigma\gamma}. \tag{1.26}$$

Hiermit eliminieren wir $\mathfrak{N}^{\varrho} \frac{\partial^3 \mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta} \partial u^{\gamma}}$ aus (1.19) und erhalten damit

$$B^{\alpha\beta}_{\varrho} B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} = \breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho} \frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} + p t^{\alpha}_{\alpha\gamma} - 2r Z^{\alpha}_{\alpha\gamma}. \tag{1.27}$$

Ferner erhalten wir aus der Definition von T als Determinante der Elemente $T^{\varrho_1 \ldots \varrho_p}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}}$ (vgl. (1.5)):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lg |T|}{\partial u^{\gamma}} &= \frac{1}{T} \frac{1}{r!} \delta^{\underbrace{1 \ldots r}}_{\varrho_{11} \ldots \varrho_{1r}} \ldots \delta^{\underbrace{1 \ldots r}}_{\varrho_{2p} \ldots \varrho_{2pr}} \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} \left(T^{\varrho_{11} \ldots \varrho_{2p1}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}} \ldots T^{\varrho_{1r} \ldots \varrho_{2pr}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}}\right) \\
&= \breve{T}^{\underbrace{(1 \ldots p)^4}}_{\varrho_1 \ldots \varrho_{2p}} \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} T^{\varrho_1 \ldots \varrho_{2p}}_{\underbrace{(1 \ldots p)^4}} = 2 \breve{S}^{\underbrace{(1 \ldots p)^2}}_{\varrho_1 \ldots \varrho_p} \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} S^{\varrho_1 \ldots \varrho_p}_{\underbrace{(1 \ldots p)^2}} \\
&= \frac{2}{p!} \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\underbrace{1 \ldots p}} \delta^{\beta_1 \ldots \beta_p}_{\underbrace{1 \ldots p}} \breve{S}^{\underbrace{(1 \ldots p)^2}}_{\varrho_1 \ldots \varrho_p} \frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} \left(B^{\varrho_1}_{\alpha_1\beta_1} \ldots B^{\varrho_p}_{\alpha_p\beta_p}\right) = 2 \breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho} \frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}
\end{aligned}$$

d. h.

$$\frac{\partial \lg |T|}{\partial u^{\gamma}} = 2 \breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho} \frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}. \tag{1.28}$$

Mit (1.27) und (1.28) können wir jetzt für (1.25) auch schreiben:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad Z^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{4r} \frac{\partial \lg |T|}{\partial u^{\gamma}} - \frac{1}{p+2r} \breve{B}^{\alpha\beta}_{\varrho} B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} \\
&\text{(b)} \quad t^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{p+2r} B^{\alpha\beta}_{\varrho} B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Wir können damit den *Umkehrsatz der Flächentheorie* bei allgemeinen Affinitäten [20]) zu einem solchen *für inhaltstreue Affinitäten*

[19]) Vgl. Weise [1], S. 175.

[20]) Vgl. Weise [1], S. 178—179.

ergänzen: *Gilt zusätzlich zu den eine Fläche bis auf allgemeine Affinitäten kennzeichnenden Bedingungen*[20]) *eine der untereinander äquivalenten Bedingungen* (1.25), (1.29a), (1.29b), *so ist die Fläche bis auf inhaltstreue Affinitäten festgelegt und der Normalenraum läßt sich gemäß der Beziehung* (1.24) *normieren.*

Für Hyperflächen insbesondere besagt die Bedingung (1.29b), daß das Nullsetzen der Torsionskoeffizienten $t^0_{\alpha x}$ diese Flächen bereits bis auf inhaltstreue Affinitäten festlegt; denn die rechte Seite von (1.29b) verschwindet hier wegen der Apolaritätsbedingung (1.20).

§ 2.

Minimalflächen.

1. Die erste Variation des Oberflächenintegrals. In diesem Paragraphen legen wir wie in § 1.3 die inhaltstreue Gruppe zugrunde. Damit haben wir in $|T|^{\frac{1}{q\,r}}_{\underbrace{1\ldots p}}\,\delta^{\underbrace{1\ldots p}}_{x_1\ldots x_p}$ einen ε-Tensor p-ter Stufe, so daß wir (unter Verwendung von (1.24)) mit

$$O = \int_{\mathfrak{p}} dO = \int_{p} |T|^{\frac{1}{q\,r}}_{\underbrace{1\ldots p}}\, d\underbrace{u^{1\ldots p}} = \int_{p} |\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_q|\, d\underbrace{u^{1\ldots p}} \tag{2.1}$$

eine *Affinoberfläche* erklären können[21]), eine Verallgemeinerung dieses Begriffs bei Hyperflächen.

Wir erklären eine kovariante Ableitung (die wir durch einen Index, vor den ein Komma gesetzt ist, anzeigen) mit Hilfe der Übertragungsgrößen

$$C^{\lambda}_{\alpha\beta} = Z^{\lambda}_{\alpha\beta} + \frac{1}{p+2r}\,\breve{B}^{\lambda\mu}_{\varrho}\,B^{\varrho}_{\mu\alpha\beta}. \tag{2.2}$$

Diese sind gerade so gewählt, daß wegen (1.29a) gilt:

$$C^{\lambda}_{\lambda\alpha} = \frac{\partial \lg |T|^{\frac{1}{q\,r}}}{\partial u^{\alpha}}. \tag{2.3}$$

Ferner gilt wegen der verallgemeinerten Apolaritätsbedingung (1.20):

$$B^{\alpha\beta}_{\varrho}\,C^{\lambda}_{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta}_{\varrho}\,Z^{\lambda}_{\alpha\beta}. \tag{2.4}$$

Wir können deshalb den Gauss'schen Integralsatz einführen:

$$\int_{\mathfrak{p}} v^{\alpha}_{,\alpha}\, dO = \int_{p} \left(\frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}} + v^{\lambda} C^{\alpha}_{\lambda\alpha}\right) |T|^{\frac{1}{q\,r}}_{\underbrace{1\ldots p}}\, d\underbrace{u^{1\ldots p}}$$

$$= \oint_{p-1} \delta^{\underbrace{1\ldots p}}_{\lambda\underbrace{\alpha_2\ldots\alpha_p}}\, v^{\lambda}\, |T|^{\frac{1}{q\,r}}_{\underbrace{1\ldots p}}\, d\underbrace{u^{\alpha_2\ldots\alpha_p}}. \tag{2.5}$$

[21]) Vgl. Weise[1]), S. 176.

Der Ortsvektor einer Nachbarfläche sei

$$(2.6)\qquad \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \varepsilon \delta \mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \varepsilon\, \mathfrak{x}_\lambda x^\lambda + \varepsilon\, \mathfrak{n}_\varrho x^\varrho;\quad x^\lambda = x^\lambda(u^\sigma),\ x^\varrho = x^\varrho(u^\sigma).$$

Unter der ersten Variation δO von O verstehen wir, wie üblich, den Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(\bar{O} - O)$, so daß wir bei der Berechnung von $\bar{O}$ Glieder von höherer als erster Ordnung in ε vernachlässigen können.

Berechnen wir für $\bar{\mathfrak{x}}$ die Größen $|\bar{T}|^{\frac{1}{4r}}$ und $|\bar{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}_p, \bar{\mathfrak{n}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{n}}_q|$, so wird i. a. nicht mehr die Normierungsgleichung (1.24) erfüllt sein[22]). Wir setzen daher die kovarianten Normalenvektoren $\bar{\mathfrak{N}}^\varrho$ mit einem Faktor μ ($\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu = 1$) an, der nachträglich so bestimmt wird, daß die Normierungsbedingung (1.24) erfüllt ist. Wir wählen $\bar{\mathfrak{N}}^\varrho$ damit derart, daß $\bar{\mathfrak{N}}^\varrho \circ \mathfrak{v}$ ($\mathfrak{v}$ beliebig) erklärt ist durch

$$(2.7)\qquad \mu \bar{\mathfrak{N}}^\varrho \circ \mathfrak{v} = \frac{|\bar{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\varrho-1}, \mathfrak{v}, \mathfrak{n}_{\varrho+1}, \ldots, \mathfrak{n}_r|}{|\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{\varrho-1}, \mathfrak{n}_\varrho, \mathfrak{n}_{\varrho+1}, \ldots, \mathfrak{n}_r|}.$$

Für die Ableitungen von $\bar{\mathfrak{x}}$ schreiben wir

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \bar{\mathfrak{x}}_\alpha = (\delta^\lambda_\alpha + \varepsilon A^\lambda_\alpha)\mathfrak{x}_\lambda + \varepsilon B^\varrho_\alpha \mathfrak{n}_\varrho\ ;\ \text{d. h. } A^\lambda_\alpha = \mathfrak{X}^\lambda \circ \delta \mathfrak{x}_\alpha;\ B^\varrho_\alpha = \mathfrak{N}^\varrho \circ \delta \mathfrak{x}_\alpha \\ &\text{(b)}\quad \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = (Z^\lambda_{\alpha\beta} + \varepsilon K^\lambda_{\alpha\beta})\mathfrak{x}_\lambda + (B^\varrho_{\alpha\beta} + \varepsilon L^\varrho_{\alpha\beta})\mathfrak{n}_\varrho;\ \text{d. h. } L^\varrho_{\alpha\beta} = \mathfrak{N}^\varrho \circ \frac{\partial^2 \delta \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}. \end{aligned}$$

Mit (2.8a) und mit der Beziehung (1.23) wird aus (2.7):

$$(2.9)\qquad \mu \bar{\mathfrak{N}}^\varrho \circ \mathfrak{v} = (1 + \varepsilon A^\alpha_\alpha)\mathfrak{N}^\varrho \circ \mathfrak{v} - \varepsilon B^\varrho_\lambda \mathfrak{X}^\lambda \circ \mathfrak{v} + \{2\}\ ^{23}).$$

Damit wird, indem wir für $\mathfrak{v}$ speziell $\frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ setzen,

$$(2.10)\qquad \mu \bar{B}^\varrho_{\alpha\beta} = \mu\, \bar{\mathfrak{N}} \circ \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{x}}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = B^\varrho_{\alpha\beta}(1 + \varepsilon A^\alpha_\alpha) + \varepsilon(L^\varrho_{\alpha\beta} - B^\varrho_\lambda Z^\lambda_{\alpha\beta}) + \{2\}.$$

Für diese $\bar{B}^\varrho_{\alpha\beta}$ können wir jetzt $|\bar{T}|^{\frac{1}{4r}}$ ausrechnen und finden

$$(2\ 11)\qquad \mu^{\frac{p}{2}} |\bar{T}|^{\frac{1}{4r}} = |T|^{\frac{1}{4r}} \left\{1 + \varepsilon \frac{p}{2} A^\alpha_\alpha + \varepsilon \frac{1}{2r} \bar{B}^{\alpha\beta}_\varrho (L^\varrho_{\alpha\beta} - B^\varrho_\lambda Z^\lambda_{\alpha\beta})\right\} + \{2\}.$$

Denn wenn wir (2.10) in der Form $\frac{\mu \bar{B}^\varrho_{\alpha\beta} - B^\varrho_{\alpha\beta}}{\varepsilon} = B^\varrho_{\alpha\beta} A^\alpha_\alpha + L^\varrho_{\alpha\beta} - B^\varrho_\lambda Z^\lambda_{\alpha\beta} + \{1\}$ schreiben, so ist damit $\left.\frac{\partial \mu \bar{B}^\varrho_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon}\right|_0$ erklärt. Es gilt ferner

$$T(\mu \bar{B}^\varrho_{\alpha\beta}) = \mu^{2pr}\, T(\bar{B}^\varrho_{\alpha\beta}) \equiv \mu^{2pr} \bar{T}.$$

---

[22]) Diese Schwierigkeit tritt für solche Flächen auf, die nicht Hyperflächen sind. Denn für solche Flächen lassen sich die $\mathfrak{N}^\varrho$ nicht mehr explizit so durch die ersten und zweiten Ableitungen des Ortsvektors ausdrücken, daß die Normierungsbedingung automatisch erfüllt ist.

[23]) $\{k\}$ bezeichnet Glieder mindestens k-ter Ordnung in ε.

Damit wird nach (1.28):

$$\mu^{2pr}\,\bar{T} = T(\mu\,\bar{B}^{\varrho}_{\alpha\beta}) = T(B^{\varrho}_{\alpha\beta})\left\{1+\varepsilon\frac{\partial \lg T(\mu\,\bar{B}^{\varrho}_{\alpha\beta})}{\partial\,\varepsilon}\Big|_{0}+\{2\}\right\}$$

$$= T\left\{1+\varepsilon\,2\,B^{\alpha\beta}_{\varrho}\frac{\partial\,\mu\,\bar{B}^{\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial\,\varepsilon}\Big|_{0}+\{2\}\right\},$$

woraus (2.11) folgt.

Andererseits benötigen wir, um μ bestimmen zu können, die Determinante $|\bar{\mathfrak{x}}_1,\ldots,\bar{\mathfrak{x}}_p,\ \bar{\mathfrak{n}}_1,\ldots,\bar{\mathfrak{n}}_r|$ bis auf Glieder 2. Ordnung. Wegen $\bar{\mathfrak{N}}^{\varrho}\,\mathfrak{n}_\sigma = \delta^{\varrho}_{\sigma}$ und wegen $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{\mathfrak{n}}_\varrho = \mathfrak{n}_\varrho$ lesen wir aus (2.9) unmittelbar ab:

$$\bar{\mathfrak{n}}_\varrho = \mu(1-\varepsilon A^{\alpha}_{\alpha})\,\mathfrak{n}_\varrho + \varepsilon\{^{*}\}\,\mathfrak{x}_\lambda + \{2\}.$$

Damit und mit (2.8a) wird

(2.12) $$|\bar{\mathfrak{x}}_1,\ldots,\bar{\mathfrak{x}}_p,\ \bar{\mathfrak{n}}_1,\ldots,\bar{\mathfrak{n}}_r| = \mu^{r}\,|\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_p,\ \mathfrak{n}_1,\ldots,\mathfrak{n}_r|\,\{1+\varepsilon(1-r)A^{\alpha}_{\alpha}\}+\{2\}.$$

Die Normierungsgleichung (1.24) nimmt mit (2.11) und (2.12) die Gestalt

$$\mu^{r}\{1-\varepsilon(1-r)A^{\alpha}_{\alpha}\} = \mu^{-\frac{p}{2}}\left\{1+\varepsilon\frac{p}{2}A^{\alpha}_{\alpha}+\varepsilon\,\frac{1}{2r}\,\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}(L^{\varrho}_{\alpha\beta}-B^{\varrho}_{\lambda}Z^{\lambda}_{\alpha\beta})\right\}+\{2\}$$

an, d. h.

$$\mu^{-1} = \left\{1+\varepsilon\,\frac{2-2r-p}{p+2r}A^{\alpha}_{\alpha}-\varepsilon\,\frac{1}{r(p+2r)}B^{\alpha\beta}_{\varrho}(L^{\varrho}_{\alpha\beta}-Z^{\lambda}_{\alpha\beta}B^{\varrho}_{\lambda})\right\}+\{2\}.$$

Damit wird $\left|\bar{T}\right|^{\frac{1}{4r}}$ gemäß (2.11):

(2.13) $$\left|\bar{T}\right|^{\frac{1}{4r}} = |T|^{\frac{1}{4r}}\left\{1+\varepsilon\frac{p}{p+2r}A^{\alpha}_{\alpha}+\varepsilon\,\frac{1}{p+2r}\,B^{\alpha\beta}_{\varrho}(L^{\varrho}_{\alpha\beta}-Z^{\lambda}_{\alpha\beta}B^{\varrho}_{\lambda})\right\}+\{2\}.$$

Wegen (2.8) und (2.4) gilt

(2.14) $$\frac{p}{p+2r}\,A^{\alpha}+\frac{1}{p+2r}\,B^{\alpha\beta}_{\varrho}(L^{\varrho}_{\alpha\beta}-B^{\varrho}_{\lambda}Z^{\lambda}_{\alpha\beta})$$
$$= \frac{p}{p+2r}\,\mathfrak{X}^{\alpha}\,\delta\,\mathfrak{x}_{\alpha}+\frac{1}{p+2r}\,\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\,\mathfrak{N}^{\varrho}\,\delta\,\mathfrak{x}_{\alpha,\beta}.$$

Wir können hierin die Terme, die nach (2.6) x^{λ} und Ableitungen von x^{λ} enthalten, umformen; dazu differenzieren wir zunächst die rechte Seite unter Verwendung von (2.4) aus:

$$p\,\mathfrak{X}^{\alpha}\,(\mathfrak{x}_{\lambda}x^{\lambda})_{,\alpha}+\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\,\mathfrak{N}^{\varrho}\,(\mathfrak{x}_{\lambda}x^{\lambda})_{,\alpha\beta} = p\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}}+pZ^{\alpha}_{\alpha\lambda}x^{\lambda}+\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}B^{\varrho}_{\lambda\alpha}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{\beta}}$$
$$+B^{\alpha\beta}_{\varrho}B^{\varrho}_{\lambda\beta}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{\alpha}}+\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\,\mathfrak{N}^{\varrho}\,\frac{\partial^{2}\mathfrak{x}}{\partial u^{\alpha}\,\partial u^{\beta}\,\partial u^{\lambda}}x^{\lambda}-\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}Z^{\alpha}_{\alpha\beta}B^{\varrho}_{\mu\lambda}x^{\lambda}.$$

Mit (1.26) wird hieraus:

$$(p+2r)\,\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}}+p(Z^{\alpha}_{\alpha\lambda}+t^{\alpha}_{\alpha\lambda})x^{\lambda}+\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\frac{\partial B^{\varrho}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\lambda}}x^{\lambda},$$

d. h. wegen (1.25), (1.28) und (2.3):

(2.15) $$p\,\mathfrak{X}^{\alpha}\,(\mathfrak{x}_{\lambda}x^{\lambda})_{,\alpha}+\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\,\mathfrak{N}^{\varrho}\,(\mathfrak{x}_{\lambda}x^{\lambda})_{,\alpha\beta} = (p+2r)\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}}+C^{\alpha}_{\alpha\lambda}x^{\lambda}\right)$$
$$= (p+2r)\,x^{\alpha}_{,\alpha}.$$

Andererseits erhalten wir durch partielle Integration

$$(2.16)\quad p\mathfrak{X}^{\varkappa}\circ(\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda})_{,\alpha}+\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho}\circ(\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda})_{,\varkappa\beta}=(p\mathfrak{X}^{\varkappa}\circ\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda})_{,\alpha}+(\bar{B}^{\varkappa\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho}\circ(\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda})_{,\beta})_{,\alpha}$$
$$-((\bar{B}^{\varkappa\beta}_{\varrho}\underset{\varrho}{\mathfrak{x}})_{,\beta}\circ(\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda}))_{,\varkappa}+[(\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho})_{,\varkappa\beta}-p\mathfrak{X}^{\alpha}_{,\varkappa}]\circ(\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda}).$$

Wir nennen den kovarianten Vektor

$$(2.17)\qquad \boxed{\mathfrak{M}\equiv(\bar{B}^{\alpha\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho})_{,\varkappa\beta}\quad p\mathfrak{X}^{\alpha}_{,\alpha}}$$

den *EULER'schen Vektor*. Der Vergleich von (2.15) und (2.16) zeigt[24], daß

$$(2.18)\qquad \mathfrak{M}\circ\underset{\varkappa}{\mathfrak{x}}=0$$

gilt; $\mathfrak{M}$ *ist also ein kovarianter Normalenvektor.*

Wir formen nun $|\overline{T}|^{\frac{1}{4r}}$ [(2.13)] um, indem wir (2.14) einsetzen und $\delta\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}$ in Tangentialterme $\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda}$ (für die wir die Beziehung (2.15) verwenden) und Normalterme $\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma}$ (die wir analog der Gleichung (2.16) durch partielle Integration umformen, indem wir hierin $\underset{\lambda}{\mathfrak{x}}x^{\lambda}$ durch $\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma}$ ersetzen) aufspalten:

$$|\overline{T}|^{\frac{1}{4r}}=|T|^{\frac{1}{4r}}\Big\{1+\varepsilon\,x^{\alpha}_{,\alpha}+\frac{\varepsilon}{p+2r}\,[p\mathfrak{X}^{\varkappa}\circ(\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma})+\bar{B}^{\varkappa\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho}\circ(\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma})_{,\beta}$$
$$-(\bar{B}^{\varkappa\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho})_{,\beta}\circ(\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma})]_{,\varkappa}+\frac{\varepsilon}{p+2r}\,[(\bar{B}^{\varkappa\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho})_{,\varkappa\beta}-p\mathfrak{X}^{\alpha}_{,\alpha}]\circ(\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma})\Big\}+\{\varepsilon^{2}\}.$$

Bilden wir jetzt $\bar{O}$ gemäß (2.1) und $\delta O=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\bar{O}-O)$, so können wir auf die ersten Terme der rechten Seite den GAUSS'schen Integralsatz (2.5) anwenden und erhalten mit (2.17) und (2.18) *die Formel für die erste Variation der Affinoberfläche:*

$$(2.19^{*})\quad \delta O=\int_{p-1}\delta\underbrace{{}^{1\dots p}_{\lambda\alpha_{2}\dots\alpha_{p}}}\,x^{\lambda}\,|T|^{\frac{1}{4r}}_{\underbrace{1\dots p}}\,d\,u^{\underbrace{\alpha_{2}\dots\alpha_{p}}}$$
$$+\frac{1}{p+2r}\int_{p-1}\delta\underbrace{{}^{1\dots p}_{\lambda\alpha_{2}\dots\alpha_{p}}}\,[\bar{B}^{\lambda\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho}\circ(\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma})_{,\beta}-(\bar{B}^{\lambda\beta}_{\varrho}\mathfrak{N}^{\varrho})_{,\beta}\circ(\mathfrak{n}_{\sigma}x^{\sigma})]\,|T|^{\frac{1}{4r}}_{\underbrace{1\dots p}}\,d\,u^{\underbrace{\alpha_{2}\dots\alpha_{p}}}$$
$$+\frac{1}{p+2r}\int_{p}\mathfrak{M}\quad\delta\underset{\varkappa}{\mathfrak{x}}\,d\,O.$$

Wir können den ersten Term auch in der Form

$$(2.19^{**})\quad \int_{p-1}\delta\underbrace{{}^{1\dots p}_{\lambda\alpha_{2}\dots\alpha_{p}}}\,x^{\lambda}\,|T|^{\frac{1}{4r}}_{\underbrace{1\dots p}}\,d\,u^{\underbrace{\alpha_{2}\dots\alpha_{p}}}=\int_{p-1}|\delta\underset{\varkappa}{\mathfrak{x}},\,d_{2}\underset{\varkappa}{\mathfrak{x}},\dots,\,d_{p}\underset{\varkappa}{\mathfrak{x}},\,\mathfrak{n}_{1},\dots,\,\mathfrak{n}_{r}|$$

[24] Entweder differenziert man (2.16) aus, oder man wendet den GAUSS'schen Integralsatz auf die durch Gleichsetzen von (2.15) und (2.16) entstehende Identität an, durch den alle Terme bis auf den letzten von (2.16) in ein Randintegral umgeformt werden.

schreiben; hierdurch wird eine weitgehende Analogie zu der entsprechenden Formel für eine F_2 im A_3 deutlich, wie sie von Blaschke aufgestellt worden ist[25]).

Spezialisieren wir (2.19) auf Hyperflächen, so gelangen wir leicht zu der von Berwald angegebenen Formel für δO[26]). Wir setzen dazu $\mathfrak{n}_\sigma x^\sigma = \mathfrak{n} z$. Es gilt dann (den Index ϱ können wir fortlassen):

$$\bar{B}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0; \quad \mathfrak{N}_{,\alpha} \circ \mathfrak{n} = 0 = -\mathfrak{N} \circ \mathfrak{n}_{,\alpha}$$

$$(\bar{B}^{\alpha\beta}\mathfrak{N})_{,\alpha\beta} \circ \mathfrak{n} = \bar{B}^{\alpha\beta}\mathfrak{N}_{,\alpha\beta} \circ \mathfrak{n} = \bar{B}^{\alpha\beta}(-B_{\alpha\lambda}\mathfrak{X}^\lambda)_{,\beta} \circ \mathfrak{n} = -\mathfrak{X}^\beta_{,\beta} \circ \mathfrak{n} = \Omega^\beta_\beta.$$

Damit wird $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{n} = (p+1)\Omega^\beta_\beta$, so daß wir für (2.19) schreiben können

$$\delta O = \oint_{p-1} \delta^{\underbrace{1\ldots p}}_{\lambda\underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_p}} x^\lambda \, |T|^{\frac{1}{1\ldots p}} \, d\underbrace{u^{\alpha_2} \ldots u^{\alpha_p}} + \frac{1}{p+2} \oint_{p-1} \delta^{\underbrace{1\ldots p}}_{\lambda\underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_p}} \bar{B}^{\lambda\beta} z_{,\beta} \, d\underbrace{u^{\alpha_2} \ldots u^{\alpha_p}} + \frac{p+1}{p+2} \int_p \Omega^\beta_\beta \, dO.$$

Dies geht wegen $H = -\frac{1}{p}\Omega^\beta_\beta$ in die Gleichung von Berwald über.

2. Die Minimalflächen. Aus der Formel für δO können wir ablesen, daß bei festgehaltenem Rand R (d. h. $x^\lambda|_R = x^\sigma|_R = \left.\frac{\partial x^\sigma}{\partial u^\alpha}\right|_R = 0$) δO dann und nur dann verschwindet, wenn der Euler'sche Vektor $\mathfrak{M}$ verschwindet:

$$\mathfrak{M} = (\bar{B}^{\alpha\beta}_\varrho \mathfrak{N}^\varrho)_{,\alpha\beta} - p\mathfrak{X}^\alpha_{,\alpha} = 0. \tag{2.20}$$

Wegen $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{x}_\alpha = 0$ sind dies, auf das örtliche Basissystem bezogen, r Gleichungen:

$$[(\bar{B}^{\alpha\beta}_\varrho \mathfrak{N}^\varrho)_{,\alpha\beta} - p\mathfrak{X}_{,\alpha}] \circ \mathfrak{n}_\varrho = 0. \tag{2.21}$$

Die durch (2.20) bzw. (2.21) definierten Flächen nennen wir *Minimalflächen*. Folgende Eigenschaft kennzeichnet diese: *Das p-dimensionale Oberflächenintegral einer Minimalfläche läßt sich als ein* $(p-1)$*-dimensionales Randintegral der Form*

$$O = \frac{1}{p} \oint_{p-1} |\delta_\mathfrak{x}, d_z\mathfrak{x}, \ldots, d_p\mathfrak{x}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r| - \frac{1}{r(r+p)} \oint_{p-1} \delta^{\underbrace{1\ldots p}}_{\lambda\underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_p}} (\bar{B}^{\lambda\beta}_\varrho \mathfrak{N}^\varrho)_{,\beta} \circ \mathfrak{n}_\sigma \mathfrak{N}^\sigma \circ \mathfrak{x} \, |T|^{\frac{1}{1\ldots p}} \, d\underbrace{u^{\alpha_2} \ldots u^{\alpha_p}} \tag{2.22}$$

darstellen. Da für Hyperflächen $(\bar{B}^{\lambda\beta}\mathfrak{N})_{,\beta} \circ \mathfrak{n} = 0$ ist, verschwindet dort der letzte Term.

Zum Beweis setzen wir in (2.6) für $\delta\mathfrak{x}$ speziell $\delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_\lambda\mathfrak{X}^\lambda \circ \mathfrak{x} + \mathfrak{n}_\sigma\mathfrak{N}^\sigma \circ \mathfrak{x}$, d. h. $x^\lambda = \mathfrak{X}^\lambda \circ \mathfrak{x}$, $x^\sigma = \mathfrak{N}^\sigma \circ \mathfrak{x}$. Dann läßt sich δO auch direkt ausrechnen:

$$\bar{\mathfrak{x}} = (1+\varepsilon)\mathfrak{x}; \quad \mu\bar{\mathfrak{N}}^\varrho = \mathfrak{N}^\varrho; \quad \bar{\mathfrak{n}}_\varrho = \mathfrak{n}_\varrho\mu.$$

---

[25]) Siehe Blaschke [5]), S. 177.

[26]) Siehe Blaschke [5]), S. 206.

Damit wird

$$\mu \bar{B}^{\varrho}_{\alpha\beta} = B^{\varrho}_{\alpha\beta}(1+\varepsilon) + \{2\}; \quad \mu^{\frac{p}{2}} |\bar{T}|^{\frac{1}{4r}} = |T|^{\frac{1}{4r}} \left(1 + \varepsilon \frac{2pr}{4r}\right) + \{2\}$$

$$|\bar{\mathfrak{x}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}_p, \bar{\mathfrak{n}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{n}}_r| = \mu^r (1+\varepsilon p) |\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r| + \{2\}.$$

Die Normierungsbedingung (1.24) liefert für μ:

$$\mu^{-1} = \left(1 + \varepsilon \frac{p}{p+2r}\right) + \{2\} \text{ und hiermit } |\bar{T}|^{\frac{1}{4r}} = |T|^{\frac{1}{4r}} \left(1 + \varepsilon \frac{p^2 + rp}{p+2r}\right) + \{2\}.$$

Wir erhalten so für $\delta O = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_p (|\bar{T}|^{\frac{1}{4r}} - |T|^{\frac{1}{4r}})\, d u^{\underbrace{1 \ldots p}}$

$$\delta O = \frac{p^2 + rp}{p+2r} O. \tag{2.23}$$

Andererseits können wir (2.19*) mit $x^\lambda = \mathfrak{X}^\lambda \circ \mathfrak{x}$ und $x^\sigma = \mathfrak{N}^\sigma \circ \mathfrak{x}$ noch umformen: Der erste Summand des zweiten Integrals wird wegen $\mathfrak{n}_\sigma \mathfrak{N}^\sigma \circ \mathfrak{x} \equiv \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_\lambda \mathfrak{X}^\lambda \circ \mathfrak{x}$

$$\breve{B}^{\lambda\beta}_{\varrho} \mathfrak{N}^\varrho \circ (\mathfrak{n}_\sigma \mathfrak{N}^\sigma \circ \mathfrak{x})_{,\beta} = - \breve{B}^{\lambda\beta}_{\varrho} \mathfrak{N}^\varrho \circ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \mathfrak{X}^\alpha \circ \mathfrak{x} = - r \mathfrak{X}^\lambda \circ \mathfrak{x}.$$

Wir erhalten so aus (2.23) und (2.19*) für eine Minimalfläche

$$\frac{p^2 + rp}{p+2r} O = \oint\limits_{p-1} \delta^{\underbrace{1 \ldots p}}_{\underbrace{\lambda\alpha_2 \ldots \alpha_p}} x^\lambda |T|^{\frac{1}{4r}}_{\underbrace{1 \ldots p}} d u^{\underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_p}}$$

$$- \frac{r}{p+2r} \oint\limits_{p-1} \delta^{\underbrace{1 \ldots p}}_{\underbrace{\lambda\alpha_2 \ldots \alpha_p}} \mathfrak{X}^\lambda \circ \mathfrak{x} |T|^{\frac{1}{4r}}_{\underbrace{1 \ldots p}} d u^{\underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_p}}$$

$$- \frac{1}{p+2r} \oint\limits_{p-1} \delta^{\underbrace{1 \ldots p}}_{\underbrace{\lambda\alpha_2 \ldots \alpha_p}} (\breve{B}^{\lambda\beta}_{\varrho} \mathfrak{N}^\varrho)_{,\beta} \circ \mathfrak{n}_\sigma \mathfrak{N}^\sigma \circ \mathfrak{x}\, d u^{\underbrace{\alpha_2 \ldots \alpha_p}}$$

und hieraus ergibt sich sofort mit (2.19**) die Formel (2.22). q. e. d.

§ 3.

Sphären.

1. Das Schnittgebilde benachbarter Normalenräume. Wir betrachten einen Punkt $\mathfrak{x}$ und seinen von den $\mathfrak{n}_\varrho$ aufgespannten Normalenraum und suchen diejenigen Nachbarpunkte $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_\alpha d u^\alpha$, deren Normalenräume mit dem Normalenraum in $\mathfrak{x}$ einen Punkt gemeinsam haben; d. h. in Formeln:

$$\mathfrak{x} + \lambda^\varrho \mathfrak{n}_\varrho = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_\alpha d u^\alpha + \lambda^{*\varrho} \left(\mathfrak{n}_\varrho + \frac{\partial \mathfrak{n}_\varrho}{\partial u^\alpha} d u^\alpha\right)$$

oder mit (1.17)

$$\lambda^\varrho \mathfrak{n}_\varrho = (\delta^\lambda_\alpha + \lambda^{*\varrho} \Omega^\lambda_{\varrho\alpha}) d u^\alpha \mathfrak{x}_\lambda + (\lambda^{*\varrho} + \lambda^{*\sigma} t^\varrho_{\sigma\alpha} d u^\alpha) \mathfrak{n}_\varrho. \tag{3.1}$$

Hieraus folgt $\lambda^{*\varrho} = \lambda^\varrho - \lambda^{*\sigma}\, t^\varrho_{\sigma\alpha}\, du^\alpha$ und, indem wir damit $\lambda^{*\varrho}$ aus (3.1) eliminieren und quadratische Glieder in du^α vernachlässigen,

$$(\delta_\alpha + \lambda^\varrho\, \Omega^\lambda_{\varrho\alpha})\, du^\alpha = 0. \tag{3.2}$$

Wenn diese Gleichungen eine Lösung besitzen sollen, muß

$$\left|\delta^\lambda_\alpha + \lambda^\varrho\, \Omega^\lambda_{\varrho\alpha}\right| = 0 \tag{3.3a}$$

gelten oder, wenn wir nach den λ^ϱ entwickeln:

$$1 + a_\varrho\, \lambda^\varrho + \cdots + a_{\varrho_1 \ldots \varrho_p} \frac{\lambda^{\varrho_1} \ldots \lambda^{\varrho_p}}{p!} = 0, \tag{3.3b}$$

wobei die $a_{\varrho_1 \ldots \varrho_q}$ definiert sind durch

$$a_\varrho = \Omega^\alpha_{\varrho\alpha}; \qquad a_{\varrho_1 \ldots \varrho_q} = \frac{1}{q!} \sum_1^{q!} S_\nu \left(\delta^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_q}} \delta^{\underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_q}}_{\gamma_1 \ldots \gamma_q} \Omega^{\gamma_1}_{\varrho_1 \beta_1} \ldots \Omega^{\gamma_q}_{\varrho_q \beta_q}\right)^{27}).$$

(3.3) stellt im r-dimensionalen Normalenraum eine algebraische Hyper-Fläche p-ten Grades dar, die wir die *Krümmungsspur*[28]) im Punkte $\mathfrak{x}$ nennen; sie besteht also aus der Gesamtheit der Schnittpunkte des Normalenraums in $\mathfrak{x}$ mit den benachbarten Normalenräumen. Ist

$$\lambda^\varrho = \lambda^\varrho(t^1, \ldots, t^{r-1};\ u^\alpha) \tag{3.3c}$$

eine Parameterdarstellung der Krümmungsspur, so verstehen wir unter der *Brennfläche* der F_p die Gesamtheit dieser Krümmungsspuren:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}(u^\alpha) + \lambda^\varrho(t^1, \ldots, t^{r-1};\ u^\alpha)\, \mathfrak{n}_\varrho(u^\alpha). \tag{3.4}$$

Die Brennfläche ist also i. a. $(n-1)$-dimensional.

2. Die Sphären. Wir wollen jetzt Flächen mit einer speziellen Brennfläche betrachten: Unter einer (eigentlichen oder uneigentlichen) *Sphäre* verstehen wir eine Fläche, bei der alle r-dimensionalen Normalenräume eine (eigentliche oder uneigentliche) $(r-1)$-dimensionale notwendig ebene Mannigfaltigkeit gemeinsam haben. Für eine Sphäre fallen also alle Krümmungsspuren zusammen; die Brennfläche ist in eine (eigentliche oder uneigentliche) $(r-1)$-dimensionale ebene Mannigfaltigkeit entartet. Für Hyperflächen erhalten wir so die gewöhnlichen Affinsphären, bei denen alle Normalen durch einen Punkt gehen.

Um die kennzeichnenden Gleichungen für diese Flächen aufzustellen, betrachten wir zunächst nur eigentliche Sphären. Wir verwenden die örtliche Eigenschaft, daß sich alle Normalenräume in der Umgebung eines Punktes in einem $(r-1)$-dimensionalen Raum schneiden.

---

[27]) S_ν bedeutet eine Permutation der Indizes $\varrho_1, \ldots, \varrho_q$. — Wegen $\delta^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_q}}$ vgl. Anm. [10]). An die Stelle von $\underbrace{1 \ldots p}$ tritt hier das „geordnete q-Tupel" $\underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_q}$ der Zahlen $\alpha_1 < \cdots < \alpha_q$.

[28]) Im Anschluß an H. Kühne. Vgl. Schouten-Struik, Neuere Methoden der Differentialgeometrie Bd. 2, Groningen 1938, S. 111.

Das bedeutet zunächst, daß die Gleichungen (3.2) mit den λ^ϱ als Unbekannten identisch in den du^α erfüllt sein müssen:

$$\delta^\lambda_\alpha + \lambda^\varrho \Omega^\lambda_{\varrho\alpha} = 0. \tag{3.5}$$

Da der Schnitt $(r-1)$-dimensional sein soll, müssen sich $r-1$ der λ^ϱ beliebig wählen lassen. Daraus folgt $\Omega^\lambda_{\varrho\alpha} = 0$ für $\delta^\lambda_\alpha = 0$, d. h.

$$\boxed{\Omega^\lambda_{\varrho\varkappa} = c_\varrho \delta^\lambda_\alpha}. \tag{3.6}$$

Damit wird aus (3.5):

$$1 + \lambda^\varrho c_\varrho = 0, \tag{3.7}$$

nicht alle $c_\varrho = 0$.

Bei einer uneigentlichen Sphäre sind benachbarte Normalenräume „parallel", d. h.

$$\frac{\partial \mathfrak{n}_\varrho}{\partial u^\alpha} = l^\sigma_{\varrho\varkappa} \mathfrak{n}_\sigma. \tag{3.8}$$

Wir können also diese Flächen in die Gleichung (3.6) miteinbeziehen, wenn wir alle $c_\varrho = 0$ setzen.

Es gilt nun: *Eine (eigentliche oder uneigentliche) Sphäre ist durch die Gleichungen* (3.6) *gekennzeichnet; aus der örtlichen Forderung, daß alle Normalenräume in der Umgebung eines Punktes einen (eigentlichen oder uneigentlichen) $(r-1)$-dimensionalen Raum gemeinsam haben sollen, folgt diese Eigenschaft also auch im Großen.*

Betrachten wir zunächst wieder nur eigentliche Sphären. Die Brennfläche ist gegeben durch (3.4) und (3.7), d. h.

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \lambda^\varrho \mathfrak{n}_\varrho: \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial \lambda^\varrho}{\partial u^\alpha} + \lambda^\sigma l^\varrho_{\sigma\varkappa}\right) \mathfrak{n}_\varrho.$$

Die Integrabilitätsbedingung (1.18c) nimmt mit (3.6) die Form an:

$$\frac{\partial c_\varrho}{\partial u^\beta} - c_\sigma l^\sigma_{\varrho\beta} = 0. \tag{3.9}$$

Mit der Ableitung von (3.7): $\frac{\partial \lambda^\varrho}{\partial u^\alpha} c_\varrho + \lambda^\varrho \frac{\partial c_\varrho}{\partial u^\alpha} = 0$ wird hieraus

$$\left(\frac{\partial \lambda^\varrho}{\partial u^\alpha} + \lambda^\sigma l^\varrho_{\sigma\alpha}\right) c_\varrho = 0 \tag{3.10}$$

und wir erhalten

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \left(\frac{\partial^2 \lambda^\varrho}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \frac{\partial \lambda^\sigma}{\partial u^\alpha} l^\varrho_{\sigma\beta} + \frac{\partial \lambda^\sigma}{\partial u^\beta} l^\varrho_{\sigma\alpha} + \lambda^\sigma \frac{\partial l^\varrho_{\sigma\alpha}}{\partial u^\beta} + \lambda^\sigma l^\iota_{\sigma\alpha} l^\varrho_{\iota\beta}\right) \mathfrak{n}_\varrho.$$

Unter Verwendung der Ableitung von (3.10), aus der $\frac{\partial c_\varrho}{\partial u^\beta}$ wieder mit Hilfe von (3.9) eliminiert wird, folgt entsprechend $\frac{\partial^3 \mathfrak{y}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma} \equiv 0(\mathfrak{n}_\varrho)$, u. s. w. Spätestens sind also die r-ten und $(r+1)$-ten partiellen Ab-

leitungen von $\mathfrak{y}$ in demselben Raum (nämlich dem Normalenraum) enthalten, d. h. die Brennfläche verläuft vollständig in einem beliebigen der Normalenräume. Da diese aber alle eine genau $(r-1)$-dimensionale notwendig ebene Krümmungsspur enthalten, so ist die Brennfläche also eine $(r-1)$-dimensionale ebene Mannigfaltigkeit.

Für uneigentliche Sphären dagegen folgt die Behauptung direkt aus Gleichung (3.8), womit alles bewiesen ist.

(Eingegangen am 5. Januar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 1, S. 81—96 (1951).

Lösung eines Integralgleichungssystems aus der Tragflügeltheorie.

Von

Karl Nickel in Tübingen.

1. Einleitung.

Das Integralgleichungssystem (IGlS)

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{f_\nu(y_\nu)}{x_\mu - y_\nu}\,dy_\nu = g_\mu(x_\mu) \quad [1] \tag{1}$$

$$(a_1 \leqq x_1 \leqq b_1 < a_2 \leqq x_2 \leqq b_2 < \cdots < a_n \leqq x_n \leqq b_n)$$

ist bisher nur für $n = 1$ und $n = 2$ gelöst worden. Eine Literaturübersicht findet sich bei H. Söhngen [2]), der zuerst den Fall $n = 2$ behandelt; unter geringeren Voraussetzungen an die gegebene Funktion wird die Integralgleichung für $n = 1$ noch bei J. Weissinger [3]) gelöst, ferner vergleiche man W. Schmeidler [4]).

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das IGlS (1) für beliebiges n unter möglichst geringen Anforderungen an die gegebenen Funktionen $g_\mu(y_\mu)$ zu lösen. Entsprechend den beiden Anwendungen des Systems (1) in der Tragflügeltheorie (vgl. z. B. H. Söhngen [2]) S. 257) wird die Lösung in zwei verschiedenen Gestalten (2) und (2a) bzw. (2b) angegeben, wie sie für das IGlS der tragenden Linie und das IGlS der dünnen Profile gebraucht wird. Weiter soll noch nachgewiesen werden, daß die Transformation (5), die an mehreren Stellen in der Literatur benutzt wird, auch tatsächlich angewendet werden darf, daß nämlich

---

[1]) Für $\nu = \mu$ ist das dann für $y_\nu = x_\mu$ singulär werdende Integral als Cauchyscher Hauptwert aufzufassen, woran der Akzent beim Integralzeichen erinnern soll. Wegen der Permanenz des Cauchyschen Hauptwertes darf dieser Akzent hier an sämtlichen Integralzeichen angebracht werden.

[2]) H. Söhngen, Die Lösungen der Integralgleichung $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)}{x-\xi}\,d\xi$ und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie. Mathematische Zeitschrift 45 (1939) S. 245—264.

[3]) J. Weissinger, Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie. Mathematische Zeitschrift 47 (1941) S. 16—33.

[4]) W. Schmeidler, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, S. 51—56. Leipzig 1950 bei der Akademischen Verlagsgesellschaft.

der Cauchysche Hauptwert der vorkommenden Integrale durch sie wieder in den Cauchyschen Hauptwert übergeführt wird.

Die Formeln (2a) und (2b) lassen sich unmittelbar aus (2) gewinnen. Der Beweis für die Lösungsformel (2) erfolgt durch vollständige Induktion nach n. Der Lösungsweg ist dabei, in Verallgemeinerung eines Beweisverfahrens von H. Söhngen [2]), folgender: Mit der bekannten Lösungsformel des Systems (1) für $n = 1$ wird aus der m-ten Zeile von (1) die Funktion $f_m(y_m)$ in Abhängigkeit von $g_m(x_m)$ und den übrigen $n-1$ gesuchten Funktionen $f_\nu(y_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n;\ \nu \neq m)$ gewonnen und in die restlichen $n-1$ Zeilen eingesetzt. Das entstehende lineare IGlS aus $n-1$ Gleichungen ist wieder von derselben Art wie das Ausgangssystem (1), läßt sich also nach Induktionsvoraussetzung lösen. Da das System (1) bei zyklischer Vertauschung der Indizes in ein System derselben Gestalt übergeht, kann o. E. d. A. bei diesem Lösungsweg $m = n$ gewählt werden.

Man könnte die Lösung (2) des vorliegenden IGlS (1) auch unmittelbar — etwa auf funktionentheoretischem Wege (man vergleiche T. Carleman [5])) — gewinnen. Doch wären dann umfangreiche Sonderbetrachtungen notwendig, um auf die allgemeinen Voraussetzungen des vorliegenden Satzes zu kommen und um die Eindeutigkeit der Lösung (2) zu zeigen, während sich diese hier unmittelbar ergeben. Außerdem ist die hier angewandte Methode auch unabhängig von dem betrachteten speziellen IGlS von Interesse, da sie auch bei anderen Gleichungssystemen u. U. die Zurückführung auf die Lösung einer einzigen Gleichung gestattet.

Alle in dieser Arbeit vorkommenden Integrale sollen im Lebesgueschen Sinne aufgefaßt werden. Funktionen, die außer in Punkten einer Menge vom Lebesgueschen Maße Null übereinstimmen, sollen nicht mehr unterschieden werden.

2. Ergebnisse.

Die n abgeschlossenen Intervalle $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ seien punktfremd und von links nach rechts numeriert, d. h. es sei $a_\nu < b_\mu$ für $\nu \leqq \mu$, aber $a_\nu > b_\mu$ für $\nu > \mu$. Die Veränderlichen x_ν und y_ν sollen im Folgenden stets im Intervall $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ liegen. Weiter sei p beliebig reell mit der Einschränkung $p > 1$. Die n Funktionen $g_\nu(x_\nu)$ $(a_\nu \leqq x_\nu \leqq b_\nu;\ \nu = 1, \ldots, n)$ seien meßbar und die Integrale

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu} |g_\nu(x_\nu)|^p \sqrt{(b_\nu - x_\nu)(x_\nu - a_\nu)}^{p-1} \, d x_\nu$$

mögen existieren. Unter diesen Voraussetzungen gilt der

[5]) T. Carleman, über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Mathematische Zeitschrift 15 (1922), S. 111—120, besonders S. 118—120.

Satz: *Die allgemeinste Lösung des IGlS*

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{f_\nu(y_\nu)}{x_\mu-y_\nu}\,dy_\nu=g_\mu(x_\mu)\qquad(\mu=1,\ldots,n)\tag{1}$$

lautet

$$f_\nu(y_\nu)=-\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa-y_\nu)(a_\varkappa-y_\nu)}}\times$$
$$\times\left\{\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}'\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda-x_\mu)(a_\lambda-x_\mu)}\,dx_\mu+P_{n-1}(y_\nu)\right\}\tag{2}$$
$$(\nu=1,\ldots,n)$$

wo $P_{n-1}(y)=A_{n-1}y^{n-1}+\cdots+A_1y+A_0$ *ist mit beliebigen Koeffizienten* A_ν. *Der höchste Koeffizient in* P_{n-1} *hat dabei die Bedeutung*

$$A_{n-1}=(-1)^{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}f_\nu(x_\nu)\,dx_\nu.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen sind die Funktionen $f_\nu(y_\nu)$ *meßbar und die Integrale* $\int_{a_\nu}^{b_\nu}|f_\nu(y_\nu)|^p\sqrt{(b_\nu-y_\nu)(y_\nu-a_\nu)}^{p-1}\,dy_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$ *existieren.*

Sind sogar die Funktionen

$$|g_\mu(x_\mu)|^p\frac{\sqrt{b_\mu-x_\mu}^{p-1}}{\sqrt{x_\mu-a_\mu}^{p+1}}\quad\text{oder}\quad|g_\mu(x_\mu)|^p\frac{\sqrt{x_\mu-a_\mu}^{p-1}}{\sqrt{b_\mu-x_\mu}^{p+1}}\quad(\mu=1,\ldots,n)$$

integrierbar, so gilt der folgende

Zusatz:

$$f_\nu(y_\nu)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{a_\varkappa-y_\nu}{b_\varkappa-y_\nu}}\sum_{\mu=1}^{n}\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}'\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{b_\lambda-x_\mu}{a_\lambda-x_\mu}}\,dx_\mu\tag{2a}$$
$$(\nu=1,\ldots,n)$$

bzw.

$$f_\nu(y_\nu)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{b_\varkappa-y_\nu}{a_\varkappa-y_\nu}}\sum_{\mu=1}^{n}\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}'\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{b_\lambda-x_\mu}{a_\lambda-x_\mu}}\,dx_\mu\tag{2b}$$
$$(\nu=1,\ldots,n)$$

sind spezielle Lösungen des IGlS (1). *Für diese gilt sogar*

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu}|f_\nu(y_\nu)|^p\frac{\sqrt{b_\nu-y_\nu}^{p-1}}{\sqrt{y_\nu-a_\nu}^{p+1}}\,dy_\nu<\infty\tag{3a}$$

bzw.

$$\int_{a_\nu}^{b_\nu}|f_\nu(y_\nu)|^p\frac{\sqrt{y_\nu-a_\nu}^{p-1}}{\sqrt{b_\nu-y_\nu}^{p+1}}\,dy_\nu<\infty\tag{3b}$$

für $\nu=1,\ldots,n$.

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

3. Existenz der Integrale in (1) und (2).

Es genügt, sich auf das Glied mit $\nu = \mu$ zu beschränken, da die übrigen Integrale unter den angegebenen Voraussetzungen sicher vorhanden und sogar analytische Funktionen des Parameters x_μ bzw. y_ν sind.

In einer früheren Arbeit [6]) war gezeigt worden, daß die nachstehenden Integrale als Cauchysche Hauptwerte existieren und daß folgende Umkehrformeln gelten (a. a. O. S. 24, Formel (1 b)):

$$\text{(4 a)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}{}' \frac{F(t)\sin s}{\cos s - \cos t}\,dt = G(s)$$

$$\text{(4 b)} \qquad F(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}{}' \frac{G(s)\sin s}{\cos s - \cos t}\,ds$$

falls nur $F(s)$ und $G(s)$ meßbar sind und die beiden Integrale

$$\int_0^{\pi} |F(s)|^p\,ds \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\pi} |G(s)|^p\,ds$$

existieren [7]).

Setzt man nun $(a < b)$

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \cos s = \dfrac{2}{b-a}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right), & \cos t = \dfrac{2}{b-a}\left(y - \dfrac{a+b}{2}\right) \\ F(s) = f(x)\sqrt{(b-x)(x-a)}, & G(s) = g(x)\sqrt{(b-x)(x-a)} \end{cases} \quad \text{und}$$

so gehen (4 a) und (4 b) über in

$$\text{(6 a)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_a^{b}{}' \frac{f(y)}{x-y}\,dy = g(x)$$

und

$$\text{(6 b)} \qquad f(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(b-y)(y-a)}}\left[\int_a^{b} f(x)\,dx + \int_a^{b}{}' \frac{g(x)}{x-y}\sqrt{(b-x)(x-a)}\,dx\right],$$

---

[6]) K. Nickel, Lösung eines speziellen Minimumproblems. Mathematische Zeitschrift 53 (1950), S. 21–52.

[7]) Dies soll bedeuten: Unter den über $F(s)$ getroffenen Voraussetzungen existiert $G(s)$ aus (4 a), ist meßbar und es ist $\int_0^{\pi} |G(s)|^p\,ds < \infty$. Ebenso gilt das Entsprechende bezüglich $F(s)$ aus (4 b), falls $G(s)$ den angegebenen Anforderungen genügt.

und diese Umkehrformeln gelten für

$$\int_a^b |f(y)|^p \sqrt{(b-y)(y-a)}^{p-1}\, dy < \infty$$

und

$$\int_a^b |g(y)|^p \sqrt{(b-y)(y-a)}^{p-1}\, dy < \infty,$$

wobei wieder entsprechende Vereinbarungen wie in [7]) getroffen werden sollen. Vergleicht man nun (6a) und (6b) mit (1) und (2), so erkennt man die Existenz der dort auftretenden Integrale unter den getroffenen Voraussetzungen und die Gültigkeit der Aussage über die Funktionen $f_\nu(y_\nu)$.

4. Zulässigkeit der Transformation (5).

Es bleibt noch nachzuprüfen, ob bei der vorgenommenen Transformation (5) auch der Cauchysche Hauptwert der Integrale (4a) und (4b) wieder in den Cauchyschen Hauptwert der Integrale (6a) und (6b) übergeht. Man betrachtet z. B. (4a) (für (4b) gelten entsprechende Überlegungen):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi{}' \frac{F(t)}{\cos s - \cos t}\, dt = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{\pi} \frac{F(t)}{\cos s - \cos t}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{x-\eta(\varepsilon)} + \int_{x+\eta(\varepsilon)}^{b} + \int_{x+\delta(\varepsilon)}^{x+\eta(\varepsilon)} \frac{f(y)}{x-y}\, dy\right)$$

mit

$$x-\eta(\varepsilon) = \frac{b-a}{2}\cos(s+\varepsilon) + \frac{a+b}{2}$$

$$x+\eta(\varepsilon) = (b-a)\cos s - \frac{b-a}{2}\cos(s+\varepsilon) + \frac{a+b}{2}$$

$$x+\delta(\varepsilon) = \frac{b-a}{2}\cos(s-\varepsilon) + \frac{a+b}{2}.$$

Nun existiert sicher $\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\, dx$ für jedes Intervall $\langle\alpha, \beta\rangle$, das ganz in $\langle a, b\rangle$ liegt. Damit läßt sich im Inneren von $\langle a, b\rangle$ die Hölder-sche Ungleichung (vgl. z. B. Hardy, Littlewood, Pólya [8])) anwenden und man erhält, wenn q durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bestimmt wird:

$$\left|\int_{x+\sigma(\varepsilon)}^{x+\eta(\varepsilon)} \frac{f(y)}{x-y}\, dy\right| \leqq \left|\int_{x+\delta(\varepsilon)}^{x+\eta(\varepsilon)} |f(y)|^p\, dy\right|^{\frac{1}{p}} \cdot \left|\int_{x+\delta(\varepsilon)}^{x+\eta(\varepsilon)} \frac{dy}{|x-y|^q}\right|^{\frac{1}{q}}.$$

[8]) G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities. Cambridge 1934 S. 140.

Für $a < x < \frac{a+b}{2}$ ist $\eta(\varepsilon) < \delta(\varepsilon)$, also wird

$$\left|\int_{x+\delta(\varepsilon)}^{x+\eta(\varepsilon)} \frac{dy}{|x-y|^q}\right|^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{|\delta(\varepsilon)-\eta(\varepsilon)|^{\frac{1}{q}}}{|\eta(\varepsilon)|} = \frac{|2(b-a)\cos s|^{\frac{1}{q}}}{\left|(b-a)\cdot\sin\left(s+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|}\cdot\left|\sin\frac{\varepsilon}{2}\right|^{\frac{2}{q}-1}$$

$$= O\left(\varepsilon^{\frac{2}{q}-1}\right).$$

Nun gilt fast überall [9])

$$\left|\int_{x+\delta(\varepsilon)}^{x+\eta(\varepsilon)} |f(y)|^p\, dy\right|^{\frac{1}{p}} = O\left([\delta(\varepsilon)-\eta(\varepsilon)]^{\frac{1}{p}}\right) = O\left(\left[2(b-a)\cos s \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= O\left(\varepsilon^{\frac{2}{p}}\right).$$

Also ergibt sich fast überall

$$\left|\int_{x+\delta(\varepsilon)}^{x+\eta(\varepsilon)} \frac{f(y)}{x-y}\, dy\right| = O\left(\varepsilon^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\right) = O(\varepsilon)$$

und damit ist

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{F(t)}{\cos s - \cos t}\, dt = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{x-\eta(\varepsilon)} + \int_{x+\eta(\varepsilon)}^{b}\right)\frac{f(y)}{x-y}\, dy = \frac{1}{\pi}\int_a^{b}\frac{f(y)}{x-y}\, dy,$$

d. h. der Cauchysche Hauptwert geht bei der Transformation (5) fast überall in sich über.

Für $\frac{a+b}{2} < x < b$ verläuft der Beweis ganz entsprechend, an der Stelle $\frac{a+b}{2}$ stimmen die Cauchyschen Hauptwerte von selbst überein.

5. Vertauschungen der Integrationsreihenfolge.

a) Voraussetzung: Es sei $a \leqq x, y \leqq b$, die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ seien meßbar und es gelte

$$\int_a^b |f(x)|^p \sqrt{(b-x)(x-a)}^{p-1}\, dx < \infty, \tag{7}$$

---

[9]) Da ein unbestimmtes Lebesguesches Integral fast überall differenzierbar ist, gilt fast überall $\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\, dt = o(1)$ für jede integrierbare Funktion $f(t)$, oder, da fast überall $|f(t)| < \infty$ ist, $\int_x^{x+h} f(t)\, dt = O(h)$.

sowie

$$\int_a^b \frac{|g(y)|^q}{\sqrt{(b-y)(y-a)}}\,dy < \infty \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Behauptung:

$$(8) \qquad \int_a^b f(x)\left(\int_a^{b\prime} \frac{g(y)}{x-y}\,dy\right)dx = \int_a^b g(y)\left(\int_a^{b\prime} \frac{f(x)}{x-y}\,dx\right)dy.$$

Beweis: Nach [6]) Seite 25 Formel (4) gilt

$$\int_0^\pi F(s)\left(\int_0^{\pi\prime} \frac{G(t)}{\cos s-\cos t}\,dt\right)ds = \int_0^\pi G(t)\left(\int_0^{\pi\prime} \frac{F(s)}{\cos s-\cos t}\,ds\right)dt,$$

falls $\int_0^\pi |F(s)|^p\,ds$ und $\int_0^\pi |G(t)|^q\,dt$ existieren. Wendet man hierauf die Transformation (5) an, so ergibt sich die Behauptung (8).

b) Voraussetzung: Es sei $a \leqq y \leqq b$, $c \leqq z \leqq d$, $x < c$ oder $x > d$, und die Intervalle $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ seien punktfremd. Die Funktionen $f(y)$ und $g(z)$ seien meßbar und integrierbar.

Behauptung:

$$(9) \qquad \int_a^b f(y)\left(\int_c^d \frac{g(z)}{(x-z)(y-z)}\,dz\right)dy = \int_c^d \frac{g(z)}{x-z}\left(\int_a^b \frac{f(y)}{y-z}\,dy\right)dz.$$

Beweis: Die Funktion $f(y)\,\frac{g(z)}{x-z}$ ist auf dem Rechteck $a \leqq y \leqq b$, $c \leqq z \leqq d$ meßbar (vgl. etwa C. Carathéodory [10]) Seite 378 Satz 350) und integrierbar, also auch die Funktion $\frac{f(y)}{(x-y)}\,\frac{g(z)}{(y-z)}$ (vgl. [10]) Seite 438 Satz 12). Nach dem Satz von Fubini ([10]) Seite 632 Satz 4) kann dann in (9) die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

c) Voraussetzung: Wie bei b), jedoch soll $f(y)$ noch zusätzlich der Bedingung (7) genügen.

Behauptung:

$$(10) \qquad \int_a^{b\prime} \frac{f(y)}{x-y}\left(\int_c^d \frac{g(z)}{y-z}\,dz\right)dy = \int_c^d g(z)\left(\int_a^{b\prime} \frac{f(y)}{(x-y)(y-z)}\,dy\right)dz.$$

---

[10]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Auflage, Leipzig und Berlin bei B. G. Teubner 1927.

Beweis: Es ist

$$\int_c^d g(z)\left(\int_a^{b\,\prime} \frac{f(y)}{(x-y)(y-z)}\,dy\right)dz =$$

$$= \int_a^{b\,\prime} \frac{f(y)}{x-y}\,dy \cdot \int_c^d \frac{g(z)}{x-z}\,dz + \int_c^d \frac{g(z)}{x-z}\left(\int_a^{b\,\prime} \frac{f(y)}{y-z}\,dy\right)dz,$$

die auftretenden Integrale existieren und in dem zweiten Integral der rechten Seite darf nach b) die Integrationsreihenfolge vertauscht werden. Damit folgt sofort (10).

6. Zurückführung des Zusatzes auf den Satz.

Nach den Überlegungen von 3. und 4. existieren die in (2a) und (2b) vorkommenden Integrale unter den in dem Zusatz getroffenen Voraussetzungen, weiter sind auch die Bedingungen (3a) bzw. (3b) erfüllt.

Nun ist

$$\prod_{\lambda=1}^{n} |a_\lambda - x_\mu| = (-1)^\mu \prod_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda - x_\mu)$$

und

$$\frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda - x_\mu)} = (-1)^n \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{C_\varkappa}{x_\mu - a_\varkappa} \text{ mit } C_\varkappa = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \varkappa}}^{n} (a_\varkappa - a_\lambda)},$$

also

$$\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{b_\lambda - x_\mu}{a_\lambda - x_\mu}} = (-1)^\mu \frac{\sqrt{\prod\limits_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - x_\mu)(a_\lambda - x_\mu)}}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n} (a_\lambda - x_\mu)}$$

$$= (-1)^{\mu+n} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - x_\mu)(a_\lambda - x_\mu)} \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{C_\varkappa}{x_\mu - a_\varkappa}.$$

Damit wird

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{a_\mu}^{b_\mu\,\prime} \frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu - x_\mu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{b_\lambda - x_\mu}{a_\lambda - x_\mu}}\,dx_\mu =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{n} (a_\varkappa - y_\nu)} \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^\mu \int_{a_\mu}^{b_\mu\,\prime} \frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu - x_\mu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - x_\mu)(a_\lambda - x_\mu)}\,dx_\mu +$$

$$+ (-1)^n \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{C_\varkappa}{y_\nu - a_\varkappa} \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^\mu \int_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{g_\mu(x_\mu)}{x_\mu - a_\varkappa} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - x_\mu)(a_\lambda - x_\mu)}\,dx_\mu$$

oder

$$\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{a_\varkappa-y_\nu}{b_\varkappa-y_\nu}}\sum_{\mu=1}^{n}\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}''\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{b_\lambda-x_\mu}{a_\lambda-x_\mu}}\,dx_\mu =$$

$$= \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa-y_\nu)(a_\varkappa-y_\nu)}}\Big[Q_{n-1}(y_\nu)+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}''\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}b_\lambda-x_\mu)(a_\lambda-x_\mu)}\,dx_\mu\Big]$$

wo $Q_{n-1}(y)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ ist. Dieselbe Rechnung läßt sich auch für (2b) durchführen. Damit ist gezeigt: Die Funktionen (2a) und (2b) sind gleichzeitig mit (2) Lösungen des IGlS (1).

7. Induktionsvoraussetzung.

(I_{n-1}): Das IGlS (1) habe für $n-1$ statt n die Lösung (2). Diese Voraussetzung ist nach (6b) richtig für $n-1=1$.

8. Hilfsformeln.

Im Folgenden werden einige Integralformeln benutzt werden, die der besseren Übersicht wegen zusammengestellt werden sollen. Der Beweis der Formeln (11) bis (14) ist auf elementarem Wege möglich und wird hier nicht erbracht. Die Gültigkeitsgrenzen der Formeln sind, soweit nicht angegeben, unmittelbar ersichtlich. Zur Abkürzung werde sign $0=0$ gesetzt, weiter sei

$$x_\nu, y_\nu, z_\nu \begin{cases} > b_\mu & \text{für } \nu > \mu \\ \in \langle a_\mu, b_\mu\rangle & \text{„ } \nu = \mu \\ < a_\mu & \text{„ } \nu < \mu\,. \end{cases}$$

$$\text{(11)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}''\frac{1}{y_\mu-x_\nu}\frac{dx_\nu}{\sqrt{(b_\nu-x_\nu)(x_\nu-a_\nu)}} = \frac{\operatorname{sign}(\mu-\nu)}{\sqrt{(b_\nu-y_\mu)(a_\nu-y_\mu)}}$$

$$\text{(12)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}''\frac{1}{(y_\mu-x_\nu)(z_\varrho-x_\nu)}\left\{\sqrt{\frac{x_\nu-a_\nu}{b_\nu-x_\nu}}\right\}^{\pm 1}dx_\nu =$$

$$= \mp\frac{1}{z_\varrho-y_\mu}\left[\operatorname{sign}|\varrho-\nu|\left\{\sqrt{\frac{a_\nu-z_\varrho}{b_\nu-z_\varrho}}\right\}^{\pm 1}-\operatorname{sign}|\mu-\nu|\left\{\sqrt{\frac{a_\nu-y_\mu}{b_\nu-y_\mu}}\right\}^{\pm 1}\right]$$

$$(13)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \frac{1}{(y_\mu - x_\nu)(z_\varrho - x_\nu)} \frac{dx_\nu}{\sqrt{(b_\nu - x_\nu)(x_\nu - a_\nu)}} =$$

$$= -\frac{1}{z_\varrho - y_\mu}\left[\frac{\operatorname{sign}(\varrho - \nu)}{\sqrt{(b_\nu - z_\varrho)(a_\nu - z_\varrho)}} - \frac{\operatorname{sign}(\mu - \nu)}{\sqrt{(b_\nu - y_\mu)(a_\nu - y_\mu)}}\right]$$

$$(14)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \frac{\sqrt{(b_\nu - x_\nu)(x_\nu - a_\nu)}}{(y_\mu - x_\nu)(z_\varrho - x_\nu)}\, dx_\nu =$$

$$= -1 + \frac{1}{z_\varrho - y_\mu}[\operatorname{sign}(\varrho - \nu)\sqrt{(b_\nu - z_\varrho)(a_\nu - z_\varrho)} -$$

$$- \operatorname{sign}(\mu - \nu)\sqrt{(b_\nu - y_\mu)(a_\nu - y_\mu)}]$$

$$(15)\qquad \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \frac{1}{y_\mu - x_\nu}\left\{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu}}\right\}^{\pm 1} dx_\nu = \mp 1 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

für $a_\mu \leqq y_\mu < b_\mu$ oder $a_\mu < y_\mu \leqq b_\mu$ je nachdem, ob der Exponent $+1$ oder -1 ist.

$$(16)\qquad \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{1}{z - x_\nu}\left\{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu}}\right\}^{\pm 1} dx_\nu =$$

$$= \pm\left[-1 + \left\{\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - z}{b_\lambda - z}}\right\}^{\pm 1}\right]$$

für $z > b_n$ oder $z < a_1$.

$$(17)\qquad \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \frac{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}(b_\lambda - x_\nu)(a_\lambda - x_\nu)}}{y_\mu - x_\nu}\, dx_\nu = (-1)^{n-1} R_{n-1}(y_\mu)$$

$$(\mu = 1, \ldots, n-1)$$

wo $R_\nu(y)$ ein normiertes Polynom vom Grade ν ist.

$$(18)\qquad \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}' \frac{1}{(y_\mu - x_\nu)(z - x_\nu)}\left\{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu}}\right\}^{\pm 1} dx_\nu =$$

$$= \mp\frac{1}{z - y_\mu}\left\{\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - z}{b_\lambda - z}}\right\}^{\pm 1} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

für $z > b_n$ oder $z < a_1$.

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^{\nu}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}(b_\lambda-x_\nu)(a_\lambda-x_\nu)}}{(y_\mu-x_\nu)(y_n-x_\nu)}\,dx_\nu = \tag{19}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{y_n-y_\mu}\left[\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n-1}(b_\lambda-y_n)(a_\lambda-y_n)}+R_{n-1}(y_\mu)-R_{n-1}(y_n)\right]$$

$$(\mu=1,\ldots,n-1)$$

mit $R_\nu(y)$ aus (17).

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{x_\nu^{n-m}}{y_\mu-x_\nu}\frac{dx_\nu}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda-x_\nu)(a_\lambda-x_\nu)}}=0 \tag{20}$$

$$(\mu,m=1,\ldots,n).$$

9. Beweis von (15) bis (20).

a) Die Formel (18) ließe sich leicht auf funktionentheoretischem Wege (man vergleiche etwa [5]) gewinnen. Da sich dabei jedoch keine kürzere Darstellung ergibt, soll hier ein anderer Weg beschritten werden, indem (18) mit Hilfe der zu beweisenden Lösungsformel (2 a) hergeleitet wird. Man erkennt so besonders deutlich den engen Zusammenhang, der zwischen dem IGlS (1) und der Hilfsformel (18) (sowie anderen, entsprechenden Formeln) besteht.

Trifft man in (18) mit dem Exponenten + 1 die Setzung $x_\nu=-X_{n-\nu}$, $y_\mu=-Y_{n-\mu}$, $z=-Z$, $a_\nu=-B_{n-\nu}$, $b_\nu=-A_{n-\nu}$, so erhält man (18) mit dem Exponenten − 1. Es genügt also für den Beweis, nur den Exponenten + 1 zu betrachten. Der Beweis wird durch Induktion geführt. Man nimmt also an, (18) gelte für $n-1$ statt n. Diese Annahme ist nach (12) sicher richtig für $n-1=1$.

Nach der Induktionsannahme (I_{n-1}) von 7. ist nun

$$f_\nu(y_\nu)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n-1}\frac{a_\varkappa-y_\nu}{b_\varkappa-y_\nu}}\sum_{\mu=1}^{n-1}\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}''\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}\frac{b_\lambda-x_\mu}{a_\lambda-x_\mu}}\,dx_\mu \tag{21}$$

$$(\nu=1,\ldots,n-1)$$

eine Lösung des IGlS

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}''\frac{f_\nu(y_\nu)}{x_\mu-y_\nu}\,dy_\nu=g_\mu(x_\mu)\qquad(\mu=1,\ldots,n-1). \tag{22}$$

Man setzt für $z>b_n$ oder $z<a_n$

$$g_\mu(x_\mu)=\frac{1}{\pi}\int_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{1}{(x_\mu-y_n)(z-y_n)}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda-y_n}{b_\lambda-y_n}}\,dy_n \tag{23}$$

$$(\mu=1,\ldots,n-1).$$

(23) in (21) eingesetzt gibt, da die Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach (10) erlaubt ist,

$$f_\nu(y_\nu) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n-1}\frac{a_\varkappa - y_\nu}{b_\varkappa - y_\nu}}\int_{a_n}^{b_n}\frac{1}{z-y_n}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - y_n}{b_\lambda - y_n}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{n-1}{}'\int_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{1}{(y_\nu - x_\mu)(x_\mu - y_n)}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}\frac{b_\lambda - x_\mu}{a_\lambda - x_\mu}}\,dx_\mu\right]dy_n$$

und daraus wird nach Induktionsvoraussetzung und Formel (12)

$$(24)\qquad f_\nu(y_\nu) = \frac{1}{y_\nu - z}\left[\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - y_\nu}{b_\lambda - y_\nu}} - \sqrt{\frac{a_n - z}{b_n - z}}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}\frac{a_\lambda - y_\nu}{b_\lambda - y_\nu}}\right]$$

$$(\nu = 1, \ldots, n-1).$$

(24) in (22) gibt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}{}'\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{1}{(x_\mu - y_\nu)(y_\nu - z)}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - y_\nu}{b_\lambda - y_\nu}}\,dy_\nu =$$

$$(25)\qquad = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a_n - z}{b_n - z}}\sum_{\nu=1}^{n-1}{}'\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{1}{(x_\mu - y_\nu)(y_\nu - z)}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}\frac{a_\lambda - y_\nu}{b_\lambda - y_\nu}}\,dy_\nu$$

$$= \frac{1}{z - x_\mu}\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - z}{b_\lambda - z}} \qquad (\mu = 1, \ldots, n-1).$$

Ganz entsprechend zeigt man die Gültigkeit von (25) für $\mu = 2, \ldots, n$, womit (18) allgemein bewiesen ist.

b) Die Formel (15) ergibt sich, wenn man (18) mit z multipliziert und anschließend $z \to \infty$ gehen läßt.

c) Die Formel (16) erhält man, wenn man (18) mit $y_\mu - z$ multipliziert und zu (15) addiert.

d) Die Formeln (17) und (19) lassen sich entsprechend den Rechnungen von Nr. 6 auf die Formeln (16) und (18) zurückführen. Diese Umformungen sollen hier übergangen werden.

e) Statt (20) betrachtet man die damit gleichwertigen Gleichungen

$$(26)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}{}'\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{1}{y_\mu - x_\nu}\,\frac{\prod_{\lambda=1}^{n-m}|x_\nu - b_\lambda|}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa - x_\nu)(a_\varkappa - x_\nu)}}\,dx_\nu = 0 \quad (\mu, m = 1, \ldots, n)$$

$$\begin{pmatrix} a_\lambda < y_\lambda \leqq b_\lambda & \text{für } \lambda = 1, \ldots, n-m \\ a_\lambda < y_\lambda < b_\lambda & \text{„ } \lambda = n-m+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach m.

α) $\boldsymbol{m = 1}$: Schreibt man sich (15) mit dem Exponenten -1 einerseits für y_μ, andererseits für $y_\mu = b_n$ auf und subtrahiert, so ergibt sich (26) für $m = 1$ und alle μ.

β) $\boldsymbol{m > 1}$: Aus der Induktionsannahme, (26) sei für $m-1$ bewiesen, folgt nun die Gültigkeit von (26) für m analog wie bei α): Man schreibt sich (26) für y_μ und für $y_\mu = b_{n-m-1}$ auf, subtrahiert und erhält sofort (26) für m statt $m-1$. Damit ist (26) allgemein bewiesen.

10. Reduktion des IGlS (1).

Die n-te Zeile des Systems (1) lautet

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n}{}'\frac{f_n(y_n)}{x_n-y_n}\,dy_n = g_n(x_n) - \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{f_\nu(y_\nu)}{x_n-y_\nu}\,dy_\nu. \tag{27}$$

Nach (6b) und mit (10) und (14) ergibt sich aus (27) für $f_n(y_n)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} f_n(y_n) = {} & \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(b_n-y_n)(y_n-a_n)}}\Bigg[\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\,dx_n + \\ & + \int_{a_n}^{b_n}{}'\frac{g_n(x_n)}{x_n-y_n}\sqrt{(b_n-x_n)(x_n-a_n)}\,dx_n - \\ & - \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(y_\nu)\left(\int_{a_n}^{b_n}{}'\frac{\sqrt{(b_n-x_n)(x_n-a_n)}}{(x_n-y_\nu)(x_n-y_n)}\,dx_n\right)dy_\nu\Bigg] = \\ = {} & \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(b_n-y_n)(y_n-a_n)}}\Bigg[\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(x_\nu)\,dx_\nu + \\ & + \int_{a_n}^{b_n}{}'\frac{g_n(x_n)}{x_n-y_n}\sqrt{(b_n-x_n)(x_n-a_n)}\,dx_n - \\ & - \sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{f_\nu(y_\nu)}{y_n-y_\nu}\sqrt{(b_n-y_\nu)(a_n-y_\nu)}\,dy_\nu\Bigg]. \end{aligned} \tag{28}$$

(28) in die $n-1$ ersten Zeilen von (1) eingesetzt gibt mit (11), (13) und der Abkürzung

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(x_\nu)\,dx_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wenn man die Integrationsreihenfolge nach (8) und (9) vertauscht,

$$g_\mu(x_\mu) = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{f_\nu(y_\nu)}{x_\mu - y_\nu}\,dy_\nu +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_{a_n}^{b_n} g_n(x_n)\sqrt{(b_n-x_n)(x_n-a_n)}\left(\int_{a_n}^{b_n}{}'\frac{1}{(x_n-y_n)(x_\mu-y_n)}\frac{dy_n}{\sqrt{(b_n-y_n)(y_n-a_n)}}\right)dx_n$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\Gamma_\nu\int_{a_n}^{b_n}\frac{1}{x_\mu-y_n}\frac{dy_n}{\sqrt{(b_n-y_n)(y_n-a_n)}} -$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(y_\nu)\sqrt{(b_n-y_\nu)(a_n-y_\nu)}\left(\int_{a_n}^{b_n}{}'\frac{1}{(y_n-y_\nu)(x_\mu-y_n)}\frac{dy_n}{\sqrt{(b_n-y_n)(y_n-a_n)}}\right)dy_\nu$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(b_n-x_\mu)(a_n-x_\mu)}}\left[\int_{a_n}^{b_n}\frac{g_n(x_n)}{x_\mu-x_n}\sqrt{(b_n-x_n)(x_n-a_n)}\,dx_n-\pi\sum_{\nu=1}^{n}\Gamma_\nu+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{f_\nu(y_\nu)}{x_\mu-y_\nu}\sqrt{(b_n-y_\nu)(a_n-y_\nu)}\,dy_\nu\right]$$

oder

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu}{}'\frac{F_\nu(y_\nu)}{x_\mu-y_\nu}\,dy_\nu = G_\mu(x_\mu)\qquad(\mu=1,\ldots,n-1) \tag{29}$$

mit

$$F_\nu(y_\nu) = f_\nu(y_\nu)\sqrt{(b_n-y_\nu)(a_n-y_\nu)}$$

und

$$G_\mu(x_\mu) = g_\mu(x_\mu)\sqrt{(b_n-x_\mu)(a_n-x_\mu)}+\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(y_\nu)\,dy_\nu +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n}\frac{g_n(x_n)}{x_n-x_\mu}\sqrt{(b_n-x_n)(x_n-a_n)}\,dx_n.$$

In (29) hat man wieder ein IGlS derselben Art wie (1) gefunden, jedoch nur aus $n-1$ statt n Gleichungen bestehend.

11. Lösung des reduzierten IGlS.

Nach der Induktionsvoraussetzung (I_{n-1}) und (10) hat nun (29) die Lösung

$$f_\nu(y_\nu)\sqrt{(b_n-y_\nu)(a_n-y_\nu)} = -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n-1}(b_\varkappa-y_\nu)(a_\varkappa-y_\nu)}}\times$$

$$\times\Bigg\{\sum_{\mu=1}^{n-1}(-1)^\mu\Bigg[\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}'\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda-x_\mu)(a_\lambda-x_\mu)}\,dx_\mu+$$

$$+\sum_{\varrho=1}^{n}\Gamma_\varrho\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}'\frac{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}(b_\lambda-x_\mu)(a_\lambda-x_\mu)}}{y_\nu-x_\mu}\,dx_\mu+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n}g_n(x_n)\sqrt{(b_n-x_n)(x_n-a_n)}\left(\int_{a_\mu}^{b_\mu}{}'\frac{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n-1}(b_\lambda-x_\mu)(a_\lambda-x_\mu)}}{(y_\nu-x_\mu)(x_n-x_\mu)}\,dx_\mu\right)dx_n\Bigg]+$$

$$+P_{n-2}(y_\nu)\Bigg\}$$

oder mit (17) und (19)

$$(30)\qquad f_\nu(y_\nu) = -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa-y_\nu)(a_\varkappa-y_\nu)}}\times$$

$$\times\Bigg\{\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu\int_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{g_\mu(x_\mu)}{y_\nu-x_\mu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda-x_\mu)(a_\lambda-x_\mu)}\,dx_\mu+P_{n-1}(y_\nu)\Bigg\}$$

$$(\nu=1,\ldots,n-1),$$

wo $P_{n-1}(y)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ ist. Man erkennt leicht, daß das höchste Glied von P_{n-1} die Gestalt

$$(-1)^{n-1}\sum_{\varrho=1}^{n}\int_{a_\varrho}^{b_\varrho}f_\varrho(y_\varrho)\,dy_\varrho$$

hat.

Um die Gültigkeit von (30) auch für $\nu=n$ nachzuweisen, könnte man (30) in (28) einsetzen. Da (1) durch zyklische Vertauschung der Indizes in sich übergeht, erkennt man jedoch ohne Rechnung, daß in jeder Lösung von (1) auch $f_n(y_n)$ eine Darstellung besitzt, die sich aus (30) für $\nu=n$ ergibt.

Nach (30) besitzt also jede Lösung des IGlS (1) die Gestalt (2). Da sich aber sämtliche vorkommenden Schlüsse und Rechnungen umkehren lassen, hat man damit in (30) auch tatsächlich eine Lösung von (1) gefunden.

12.

Es bleibt nun nur noch zu zeigen, daß (2) sogar für ein beliebiges Polynom $P_{n-1}(y)$ Lösung von (1) ist, oder anders ausgedrückt, daß

$$\frac{(-1)^{\nu} P_{n-1}(y_\nu)}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} (b_\varkappa - y_\nu)(a_\varkappa - y_\nu)}}$$

für beliebige Polynome P_{n-1} vom Grade $n-1$ eine Lösung des zu (1) gehörenden homogenen Gleichungssystems ist. Dies folgt aber sofort aus (20). Damit ist der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 24. September 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 97—101 (1951).

Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules.

By

I. S. Cohen and I. Kaplansky in Cambridge, Mass. and Chicago, Ill.

Let R be a principal ideal ring with the descending chain condition. Then it is known that any R-module [1]) is a direct sum of cyclic modules. This was apparently first proved by KÖTHE [3], though the fundamental ideas go back to PRÜFER [5]. In the commutative case, KÖTHE also proved a converse: if a commutative ring with unit satisfies the descending chain condition, and has the property that all its modules are direct sums of cyclic modules, then it is necessarily a principal ideal ring. The purpose of this note is to show that the assumption of the descending chain condition is actually redundant.

T h e o r e m. *Let R be a commutative ring with unit, and suppose every R-module is a direct sum of cyclic modules. Then R is a principal ideal ring satisfying the descending chain condition.*

The corresponding problem in the non-commutative case remains open, even with the descending chain condition assumed in advance. NAKAYAMA [4] has noted that the ring need not be a principal ideal ring, so that the obvious conjecture fails.

Before proceeding to the theorem itself, we prove several lemmas. We first consider a ring A which is a complete direct sum of an infinite set of fields $\{K_i\}$. (We use the term "complete" to distinguish this from the usual weak or discrete direct sum, in which only a finite number of non-zero components are allowed.) There are some obvious maximal ideals in A: for any index i, we have the maximal ideal M_i consisting of all elements with vanishing K_i-component. There also exist some "less accessible" maximal ideals in A. To see this, let I be the weak direct sum of $\{K_i\}$; I is an ideal in A. By ZORN's lemma, I can be expanded to a maximal ideal, necessarily different from any M_i. Following the terminology of HEWITT [2], we shall refer to the latter type as a *free* maximal ideal.

L e m m a 1. *Let A be the complete direct sum of an infinite number of fields, and let M be a free maximal ideal in A. Then M is not a direct sum of principal ideals.*

[1]) All rings under discussion will have a unit element, which is assumed to act as unit operator on any module.

Proof. We remark that any principal ideal in A can be generated by an idempotent: given an element x, take e to be 0 where x is 0 and 1 where x is non-zero; then $xA = eA$. A direct sum of a finite number of principal ideals is again principal, being generated by the sum of the generators.

Suppose then that M is a direct sum of principal ideals $\{e_jA\}$, where the e_j's are (necessarily orthogonal) idempotents. The number of summands must be infinite, for otherwise M would be principal, and it is clear that a free maximal ideal cannot be principal. Split $\{e_j\}$ into two infinite subsets, and let f and g be the sums of the respective subsets (these "infinite sums" having an obvious meaning). Then $fg = 0$ is in M, and hence either f or g is in M; say f for definiteness. But this means that f is a linear combination of a finite number of e_j's, a contradiction.

Lemma 2. *Let R be a commutative ring with unit and no nilpotent elements. Suppose $\{x_i\}$ are orthogonal non-zero elements in R, and define S to be the complete direct sum of $\{x_iR\}$; S is in a natural way a ring (coordinate-wise multiplication) and an R-module. Then any decomposition of S (as an R-module) into a direct sum of cyclic modules can have only a finite number of (non-zero) summands, and moreover the generators of the cyclic summands are orthogonal.*

Proof. Suppose S is the direct sum of cyclic modules generated by y_j. We may write, formally

$$y_j = \sum_m a_{jm} x_m \qquad (a_{jm} \in R). \tag{1}$$

Then (for $j \neq k$),

$$(a_{km} x_m) y_j = a_{km} a_{jm} x_m^2 = (a_{jm} x_m) y_k . \tag{2}$$

Since the sum is direct, it must be the case that (2) is zero. Hence $y_j y_k = 0$ for $j \neq k$, and we have verified the last statement of the lemma.

Now suppose the number of y's to be infinite. Let z be the element

$$z = x_1 + x_2 + \cdots .$$

Then z is in S, and so is a linear combination of a finite number of y's. This means that z is orthogonal to the remaining y's. But

$$z y_j = \sum_m a_{jm} x_m^2 .$$

Hence $z y_j = 0$ entails $a_{jm} x_m^2 = 0$, $(a_{jm} x_m)^2 = 0$, $a_{jm} x_m = 0$, $y_j = 0$, a contradiction.

For convenience in the remainder of the discussion, let us call R a D-ring if it is a commutative ring with unit with the property that every R-module is a direct sum of cyclic modules. It is clear that a homomorphic image of a D-ring is again a D-ring. Also, if R is a

D-ring without divisors of zero, then R must be a field; for otherwise the quotient field of R, as an R-module, could not be a direct sum of cyclic modules. We have proved:

Lemma 3. *In a D-ring all prime ideals are maximal.*

We shall now dispose of the semi-simple case of our theorem.

Lemma 4. *Let R be a D-ring which is semi-simple in the sense that the intersection of the maximal ideals is 0. Then R is the direct sum of a finite number of fields.*

Proof. Our task is to prove that R satisfies the descending chain condition. It follows from Lemma 3 and [1, Th. 1] that it will suffice to prove the ascending chain condition. If the latter fails, then there exists in R an ideal I which is not finitely generated. The expression of I as a direct sum of principal ideals $\{x_i R\}$ must therefore have an infinite number of summands. The x's are of course necessarily orthogonal. We now follow the notation of Lemma 2 and form S, the complete direct sum of $\{x_i R\}$; S is the direct sum of cyclic modules generated by $y_1, \ldots, y_k$. For at least one y_j it must be the case that the expression (1) has an infinite number of non-zero terms. Suppose this happens for $j = 1$, and let us write T for the set of indices m for which $a_{1m} x_m \neq 0$. For each $t \in T$, choose a maximal ideal M_t in R with the property that $a_{1t} x_t$ is not in M_t; since the x's are orthogonal, the M_t's are surely distinct.

For each $t \in T$, let an arbitrary element $c_t \in R$ be prescribed. We claim that there exists in R an element which agrees with c_t modulo M_t for each t. To see this, we form the element u in S given formally by

$$u = \sum_t c_t a_{1t} x_t .$$

We note

$$(a_{1t} x_t) u = c_t a_{1t}^2 x_t^2. \tag{3}$$

Suppose $u = d_1 y_1 + \cdots + d_k y_k$. Since the y's are orthogonal (Lemma 2), we have

$$(a_{1t} x_t) u = (a_{1t} x_t) d_1 y_1 = d_1 a_{1t}^2 x_t^2. \tag{4}$$

From (3) and (4) we obtain

$$d_1 \equiv c_t \pmod{M_t},$$

and so d_1 is the desired element.

Write J for the intersection of the M_t's. Then the preceding paragraph can be summarized as follows: R/J is the complete direct sum of the fields R/M_t. But R/J, along with R, is a D-ring. This contradicts Lemma 1.

For completeness, we include the well known proof of the following lemma.

Lemma 5. *Let R be a commutative ring with unit, and suppose that every prime ideal in R is maximal. Then there exists a set of primary ideals, one for each maximal ideal, with intersection* 0.

Proof. Given a maximal ideal M, define Q to be the set of all elements x of R for which the annihilator (the set of all a with $ax = 0$) is not contained in M. One easily verifies that Q is an ideal contained in M, and that $yz \in Q$ and $y \bar{\in} Q$ imply $z \in M$. To complete the proof that Q is primary for M, we take t in M and have to prove that some power of t is in Q. If not, consider the set S of all $t^k c$, for $k = 0, 1, 2, \ldots$ and $c \bar{\in} M$; S is closed under multiplication and does not contain 0. So we may form an ideal N which is maximal with respect to disjointness from S; N is a prime and hence a maximal ideal. It is clear that N is contained in M. On the other hand, M contains t which is not in N. Thus N is properly contained in M, a contradiction.

Now let $\{M_i\}$ be the maximal ideals of R, form the corresponding primary ideals $\{Q_i\}$ as above, and suppose $r \in \bigcap Q_i$. Consider the ideal I annihilating r. If $I \neq R$, then I is contained in some M_i. But $r \in Q_i$ means that there exists an element $c \bar{\in} M_i$ with $cr = 0$, i. e. with $c \in I$. This contradicts $I < M_i$. Hence $I = R$ and $r = 0$.

Proof of the theorem. Let R be a D-ring. If N is the intersection of the maximal ideals, R/N is also a D-ring. Lemma 4 then shows that R has only a finite number of maximal ideals, say $M_1, \ldots M_n$. By Lemma 5,

$$0 = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n,$$

where Q_i is a primary ideal with M_i as radical. Since the Q_i are pairwise comaximal, R is the direct sum of rings isomorphic to R/Q_i. So it is sufficient to show that R/Q_i is a principal ideal ring, and for this it suffices to show that its maximal ideal is principal.

Hence assume now that the D-ring R has only one maximal ideal M, $M \neq 0$. By hypothesis,

$$M = a_1 R \oplus a_2 R \oplus \cdots \tag{5}$$

where the a_i are orthogonal non-zero elements. Likewise

$$M^2 = a_1^2 R \oplus a_2^2 R \oplus \cdots.$$

Then M/M^2 is the direct sum of the non-zero modules $a_i R/a_i^2 R$. Since $a_i M = a_i^2 R$, $a_i R/a_i^2 R$ is a vector space over R/M. So if we can show that M/M^2 is one-dimensional over R/M, then there is only one a_i, and M is principal, as desired. Now M/M^2 is the maximal ideal of R/M^2, and $(R/M^2)/(M/M^2)$ is isomorphic to R/M, so we can make the further assumption that $M^2 = 0$.

We wish to show that M has length 1, as an R-module. Every principal ideal contained in M has length 1, since it is cyclic over

R/M. If M has length greater than 1, we can, in (5) above, pass to the residue class ring modulo $a_3 R \oplus \cdots$; so we may assume that M has the form $M = aR \oplus bR$. Thus M has length 2 and R has length 3.

At this point we could quote KÖTHE's result, but for completeness we give the remainder of the proof. Let G be the R-module generated by u and v, subject to the relation $au + bv = 0$; G is a module of length 5. We claim that any cyclic submodule Rw of G has length 1 or 3. This is clear if $Mw = 0$, so we suppose the contrary. Write $w = cu + dv$. Since $Mw \neq 0$, either c or d is a unit in R, so we may assume $c = 1$. Let r be an element of R annihilating w. Then $ru + rdv = 0$, so there exists an element s with $r = sa$, $rd = sb$. From the equation $sb = sad$, and the fact that b is not a multiple of a, we see that s is not a unit, $s \in M$, $r = sa = 0$. Hence the mapping $r \to rw$ is an isomorphism of R onto Rw, and the latter must have length 3.

Now G is a direct sum of cyclic modules, not all of length 1, since $MG \neq 0$. Hence

$$G = Rw \oplus Rx \oplus Ry,$$

with Rw of length 3, Rx and Ry of length 1. Thus $MG = Mw$,

$$G/MG \cong (Rw/Mw) \oplus Rx \oplus Ry,$$

giving G/MG length 3. But G/MG is isomorphic to $R/M \oplus R/M$, and consequently has length 2. This contradiction completes the proof of the theorem.

Literature.

I. S. COHEN.

[1] Commutative rings with restricted minimum condition, Duke Math. J. vol. 17 (1950), pp. 27—42.

E. HEWITT.

[2] Rings of real-valued continuous functions I, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 64 (1948), pp. 45—99.

G. KÖTHE.

[3] Verallgemeinerte ABELsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring, Math. Zeitschr. vol. 39 (1935), pp. 31—44.

T. NAKAYAMA.

[4] Note on uni-serial and generalized uni-serial rings, Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol. 16 (1940), pp. 285—289.

H. PRÜFER.

[5] Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären ABELschen Gruppen, Math. Zeitschr. vol. 17 (1923), pp. 35—61.

(Eingegangen am 15. Juli 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 102—114 (1951).

Bemerkungen zur Multiplikation unendlicher Reihen.

Von

Leopold Schmetterer in Wien.

1. HARDY[1]) hat 1908 den ersten tieferliegenden Satz über die Konvergenz der CAUCHYschen Produktreihe ausgesprochen: $\sum_0^\infty a_k = A$, $\sum_0^\infty b_k = B$ seien zwei konvergente Reihen mit

$$a_k = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad b_k = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Dann konvergiert die CAUCHYsche Produktreihe $\sum_0^\infty c_k$ mit $c_k = \sum_0^k a_l b_{k-l}$, natürlich gegen $AB = C$.

Die hier gewählte Bezeichnung wird ein für alle Mal festgelegt. Der (in irgendeinem Sinne verstandene) Summenwert einer Reihe $\sum_0^\infty a_k$ heiße immer A. Die durch (fallweise näher zu präzisierende) Produktbildung aus $\sum_0^\infty a_k$ und $\sum_0^\infty b_k$ gebildete Produktreihe werde immer mit $\sum_0^\infty c_k$ bezeichnet. Diese Vereinbarungen werden sinngemäß auch auf Reihen der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ angewendet.

In dem 1949 erschienenen Buch „Divergent Series" (insb. p. 240) zeigt HARDY[2]), daß man den o. a. Satz auf die FOURIERsche Multiplikation beidseitig unendlicher Reihen übertragen kann, welche dem Formalismus der Multiplikation trigonometrischer Kosinusreihen entspricht. Der formalen Multiplikation beliebiger komplex geschriebener trigonometrischer Reihen entspricht die LAURENTsche Produktbildung zweiseitig unendlicher Reihen. Für diese Produktbildung läßt sich der Satz von HARDY nicht mehr übertragen, wenn man den folgenden, im Hinblick auf die Anwendung in der Theorie der trigonometrischen Reihen wohl einzig zweckmäßigen Konvergenzbegriff zu Grunde legt: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ heiße konvergent, wenn die Folge $\sum_{-n}^{n} a_k$ konvergiert. (Konvergenz in

[1]) Proc. London math. Soc. (2) 6 (1908), p. 410—423.

[2]) Divergent Series, Oxford 1949, p. 242 ff.

diesem Sinne impliziert offenbar nicht $a_k \to 0$ für $|k| \to \infty$.) ZYGMUND[3]) hat jedoch den Satz aufgestellt: Die Konvergenz von $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ und $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ sowie $a_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, $b_k = o\left(\frac{1}{|k|}\right)$ haben die Konvergenz (im o. a. Sinne) der LAURENTschen Produktreihe zur Folge und zwar gegen AB, was hier einen Teil der Behauptung darstellt. (Ein Beweis findet sich z. B. bei SCHMETTERER[4]).) Wie nämlich EDMONDS in einer neueren Arbeit[5]) bewiesen hat, gilt weder für die FOURIERsche noch für die LAURENTsche Multiplikation das Analogon zum Satz von ABEL, im Falle der LAURENTschen Produktbildung nicht einmal bei Verwendung eines Konvergenzbegriffes, welcher die Konvergenz von $\sum_{-\infty}^{0} a_k$ und $\sum_{0}^{\infty} a_k$ impliziert.

Durch eine geschickte Wendung eines Beweises von NEDER hat HARDY[6]) vor sechs Jahren als Spezialfall einer etwas allgemeineren Formulierung einen interessanten „unsymmetrischen" Satz für die CAUCHYsche Multiplikation erhalten: $\sum_{0}^{\infty} c_k$ konvergiert, wenn $\sum_{0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{0}^{\infty} b_k$ konvergieren, und $a_k = O(k^{-\delta})$ $(0 < \delta < 1)$, $b_k = O\left(\frac{1}{k \log k}\right)$ gelten. Sinngemäß läßt sich dieser Satz auf die FOURIERsche Multiplikation übertragen (SCHMETTERER[7]). Es war naheliegend anzunehmen, daß sich ein ähnlicher Satz, etwa mit $a_k = O(k^{-\delta})$, $b_k = o\left(\frac{1}{k \log k}\right)$ auch auf die LAURENTsche Produktbildung übertragen läßt. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie im folgenden gezeigt wird.

2. O. B. d. A. seien im folgenden alle auftretenden Größen reell. Wir betrachten zweiseitig unendliche Reihen und definieren nun genauer: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ seien formal gegeben. Dann heißt $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ die formale LAURENTsche Produktreihe von $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ und $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$, wenn $c_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$. In jedem konkreten Falle ist also zunächst nachzuweisen, daß die Erklärung der c_k sinnvoll ist.

Wir wiederholen: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn $\left|\sum_{-n}^{n} a_k - A\right|$ mit $\frac{1}{n}$ beliebig klein wird. Fast ausschließlich werden wir uns mit der LAURENTschen Produktbildung beschäftigen. Die diesbezüglichen Sätze haben

[3]) Trigonometrical Series, Warschau 1935, p. 304.
[4]) Monatshefte f. Math. 53 (1949), p. 53—62.
[5]) Journ. London math. Soc. 17 (1942), p. 65—70.
[6]) Proc. Cambridge Phil. Soc. 40 (1944), p. 251—252.
[7]) Monatshefte f. Math. 54 (1950), p. 313—329.

Anwendungen in der Theorie der trigonometrischen Reihen, auf die wir jedoch nicht eingehen. Wir zeigen zunächst den

Satz 1. $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ *seien zwei konvergente Reihen, für deren Glieder*

$$a_k = O\left(\frac{1}{|k|^{2-\delta}}\right) \tag{1}$$

$$b_k = o\left(\frac{1}{|k|^{\delta}}\right) \tag{2}$$

mit $0 < \delta < 1$ *gelten. Dann konvergiert die* Laurentsche *Produktreihe* $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ *und zwar gegen* AB.

Bemerkung 1. Wie aus dem Beweis hervorgeht, bleibt alles richtig, wenn man O mit o in (1) und (2) vertauscht.

Bemerkung 2. Wie in der Einleitung gesagt wurde, gilt Satz 1 auch noch für $\delta = 1$.

Beweis. Aus der Definition folgt wegen (1) und (2), daß c_k sinnvoll ist. Nun betrachte man

$$S_p = \sum_{-p}^{p} c_k = \sum_{n=-p}^{p} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{n-l}$$

und hat zu zeigen:

$$S_p \to AB \quad \text{für } p \to \infty. \tag{3}$$

Wir zerlegen nun $S_p = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V}$ gemäß den Summationsbedingungen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}. && |\alpha \pm \beta| \leqq p,\\
&\mathrm{II}. && -p \leqq \alpha < 0,\ p + \alpha < \beta < p - \alpha,\\
&\mathrm{III}. && -\infty < \alpha < -p,\ -\alpha - p \leqq \beta \leqq -\alpha + p,\\
&\mathrm{IV}. && 0 < \alpha \leqq p,\ -\alpha - p \leqq \beta < \alpha - p,\\
&\mathrm{V}. && p < \alpha < +\infty,\ -\alpha - p \leqq \beta \leqq -\alpha + p.
\end{aligned}$$

Zur Untersuchung von I formulieren wir einen schon erwähnten Satz als

Lemma 1 (Hardy[6]). *Satz 1 gilt für den Spezialfall der* Cauchy*schen Multiplikation.*

Daraus folgt $\mathrm{I} \to AB$ für $p \to \infty$, wobei man den zu Grunde gelegten Konvergenzbegriff zu beachten hat.

O. B. d. A. sei $|b_k| = \frac{|\varepsilon(k)|}{|k|^{\delta}}$ mit $\varepsilon(k) = o(1)$ $|k| \to \infty$. Dann wird

$$\mathrm{II} = O\left(\sum_{0 < \alpha \leqq p}^{p-\alpha < \beta \leqq p+\alpha} \frac{1}{\alpha^{2-\delta}} \frac{|\varepsilon(\beta)|}{\beta^{\delta}}\right) = O\left(\sum_{0 < \alpha < p - \xi}^{p-\alpha < \beta \leqq p+\alpha}\right) + O\left(\sum_{p - \xi < \alpha \leqq p}^{p-\alpha < \beta \leqq p+\alpha}\right) =$$

$$= \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2.$$

Hierbei setzen wir ein für alle Mal fest: Alle auftretenden ξ, η sind passend gewählte, dann aber festgehaltene Zahlen, welche nicht ganz sein sollen.

$$\mathrm{II}_1 = o\left(\sum_{0<\alpha<p-\xi}^{p-\alpha<\beta\leqq p+\alpha} \frac{1}{\alpha^{2-\delta}}\,\frac{1}{\beta^{\delta}}\right) = o\left(\sum_{0<\alpha<p-\xi} \frac{1}{\alpha^{2-\delta}}\, O[(p+\alpha)^{1-\delta}-(p-\alpha)^{1-\delta}]\right)$$

$$\mathrm{II}_1 = o\left(p^{1-\delta} \sum_{0<\alpha<p-\xi} \frac{1}{\alpha^{2-\delta}}\, 2 \sum_{l=0} \binom{1-\delta}{2l+1} \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{2l+1}\right)$$

$$= o\left(p^{1-\delta} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{1-\delta}{2l+1} \frac{1}{2l+\delta}\,\frac{p^{2l+\delta}}{p^{2l+1}}\right) = o(p^{1-\delta}p^{-1+\delta}) = o(1),$$

wegen $\binom{1-\delta}{2l+1} = O(l^{-2+\delta})$

$$\mathrm{II}_2 = O\left(\sum_{p-\xi<\alpha\leqq p} \frac{1}{\alpha^{2-\delta}}\, p^{1-\delta}\right) = O\left(\frac{\xi\, p^{1-\delta}}{(p-\xi)^{2-\delta}}\right) = o(1)$$

$$\mathrm{III} = O\left(\sum_{p<\alpha<+\infty}^{\alpha-p\leqq\beta\leqq\alpha+p} \frac{1}{\alpha^{2-\delta}}\,\frac{|\varepsilon(\beta)|}{\beta^{\delta}}\right) = O\left(\sum_{p<\alpha<p+\eta}^{\alpha-p\leqq\beta\leqq\alpha+p}\right) + O\left(\sum_{p-\eta<\alpha<\infty}^{\alpha-p\leqq\beta\leqq\alpha+p}\right) =$$

$$= \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2.$$

$\mathrm{III} = o(1)$, wozu man II_2 vergleiche.

$$\mathrm{III}_2 = o\left(\sum_{p+\eta<\alpha<\infty} \frac{1}{\alpha^{2-\delta}}\, O[(\alpha+p)^{1-\delta} - (\alpha-p)^{1-\delta}]\right)$$

$$= o\left(\sum_{p+\eta<\alpha<\infty} \frac{1}{\alpha} \sum_{0}^{\infty} \binom{1-\delta}{2l+1} \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{2l+1}\right)$$

$$= o\left(\sum_{0}^{\infty} \binom{1-\delta}{2l+1} \frac{1}{2l+1}\, p^{2l+1}\, p^{-2l-1}\right) = o(1).$$

Die Vertauschung der Summationsfolge ist natürlich erlaubt.
$\mathrm{IV} = o(1)$ wie II, $\mathrm{V} = o(1)$ wie III. Damit ist (3) gezeigt.

Satz 1 läßt sich für kein δ aus $0 < \delta \leqq 1$ verschärfen. Man hat nämlich:

Satz 2. *Die Konvergenz von* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{-\infty}^{\infty} b_k$ *sowie die Bedingungen* $a_k = O\left(\frac{1}{|k|^{\delta}}\right)$, $b_k = O\left(\frac{1}{|k|^{2-\delta}}\right)$ $0 < \delta \leqq 1$ *sind für kein* δ *hinreichend für die Konvergenz der* Laurentschen *Produktreihe gegen* AB.

Beweis. Wir setzen

$$a_k = \operatorname{sign} k\, \frac{1}{|k|^{\delta}}, \quad b_k = \operatorname{sign} k\, \frac{1}{|k|^{2-\delta}} \qquad (a_0 = b_0 = 0).$$

Die Konvergenz von $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ und $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ ist klar und zwar ist $A = B = 0$.

Die gemäß $c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$ definierten Größen c_k sind natürlich sinnvoll.

$$\sum_{-p}^{p} c_k = \sum_{k=-p}^{p} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \operatorname{sign} l \operatorname{sign}(k-l) \frac{1}{|l|^\delta} \frac{1}{|k-l|^{2-\delta}}.$$

Es ist $c_m = c_{-m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, also genügt es zu zeigen:

$$\tfrac{1}{2} c_0 + \sum_{1}^{p} c_k < K < 0,$$

wobei K eine von p unabhängige Konstante ist.

$$\frac{1}{2} c_0 + \sum_{1}^{p} c_k = -\sum_{k=0}^{p} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{l^\delta} \frac{1}{(l+k)^{2-\delta}} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l^\delta} \frac{1}{(k-l)^{2-\delta}}$$

$$-\sum_{k=1}^{p} \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{l^\delta} \frac{1}{l-k)^{2-\delta}} < -\sum_{k=0}^{p} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{l^\delta} \frac{1}{(l+k)^{2-\delta}} + \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{k=l+1}^{p} \frac{1}{l^\delta} \frac{1}{(k-l)^{2-\delta}}$$

$$-\sum_{l=2}^{p-1} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l^\delta} \frac{1}{(l-k)^{2-\delta}} = -\sum_{l=1}^{p-1} \frac{1}{l^\delta} \left[\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{(l+k)^{2-\delta}} + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{k^{2-\delta}} - \sum_{k=1}^{p-l} \frac{1}{k^{2-\delta}} \right] -$$

$$-\sum_{l=p}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{l^\delta} \frac{1}{(l+k)^{2-\delta}}.$$

Für $l = 1$ ist natürlich der zweite Klammerausdruck 0 zu setzen. Somit weiter

$$\frac{1}{2} c_0 + \sum_{1}^{p} c_k < -\sum_{l=p}^{\infty} \frac{1}{l^\delta} \frac{p+1}{(l+p)^{2-\delta}} < -(p+1) \sum_{l=p}^{\infty} \frac{1}{(l+p)^2} < -\frac{p+1}{2p} < -\frac{1}{2} < 0.$$

Man entnimmt dem Beweis des Satzes 1 sofort, daß unter den Bedingungen des Satzes 2 die Partialsummen der Laurentschen Produktreihe stets beschränkt sind. Betrachtet man aber das hier gegebene Beispiel für $\delta = 0$, erkennt man, daß die Laurentsche Produktreihe sogar gegen $-\infty$ divergiert. Auf diese Weise haben wir also auch ein durchsichtiges Beispiel für die Ungültigkeit der Analoga zum Mertensschen und Abelschen Satz für die Laurentsche Multiplikation im Falle des hier zu Grunde liegenden Konvergenzbegriffes gewonnen. Für die Fouriersche Multiplikation gilt übrigens der Mertenssche Satz (Hardy [2]), p. 242, Schmetterer [4])).

3. Wir werfen nun einen Blick auf die mehrfach behandelte Frage der Äquikonvergenz: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ sei eine formal gegebene Reihe, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ konvergiere. Die Laurentsche Produktreihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ heißt äquikonvergent mit $B \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$, wenn

$$\left| \sum_{-n}^{n} c_k - B \sum_{-n}^{n} a_k \right| = o(1).$$

Diese Begriffsbildung ist für die Theorie der trigonometrischen Reihen von besonderer Bedeutung und wurde hauptsächlich von RAJCHMAN und ZYGMUND behandelt. Man vgl. hierzu die wichtige Arbeit[8]) von ZYGMUND. ZYGMUND[9]) zeigt: $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ sei formal gegeben und $a_k = o(1)$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ sei konvergent und $\sum_{-\infty}^{+\infty} |n b_n| < +\infty$. Dann ist die Produktreihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ mit $B \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ äquikonvergent. (Diese der Formulierung von ZYGMUND äquivalente Fassung steht bei HARDY[2]), p. 242.) Natürlich läßt sich dieser Satz auf die CAUCHYsche Multiplikation spezialisieren. In beiden Fällen können die Voraussetzungen nicht mehr abgeschwächt werden. Für eine Verschärfung in anderer Richtung vgl. ZYGMUND[10]). (Diese Arbeit ist mir nur durch das Referat von LÖSCH[11]) bekannt.)

Es fragt sich, welche Aussagen über Äquikonvergenz im Falle der Bedingung $a_k = o(|k|^{-\delta})$ gemacht werden können $(0 < \delta \leqq 1)$. Hier kann man nun eine vielleicht nicht ganz uninteressante Feststellung machen, welche den Satz 1 als Sonderfall enthält und ein neues Licht auf die Bemerkung 2 nach Satz 1 wirft. Es gilt nämlich der

Satz 3. *$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ sei eine formal gegebene Reihe mit $a_k = O(|k|^{-\delta})$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ sei konvergent und $b_k = o(|k|^{-2+\delta})$ $0 < \delta < 1$. Dann ist $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ äquikonvergent mit $B \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$. Dies gilt jedoch nicht mehr für $\delta = 1$.*

Bemerkung. Im Hinblick auf Satz 5 verzichten wir auf eine Wiedergabe des Beweises für den Fall $0 < \delta < 1$. Wegen Satz 2 ist dieser Teil von Satz 3 offenbar die bestmögliche Behauptung.

Beweis für die auf $\delta = 1$ bezügliche Behauptung: Sei

$$a_{-k} = \frac{1}{k} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

und $a_k = 0$ sonst. Wir wählen eine Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ mit $n_k \to \infty$ und zwar so: $n_1 > 0$ sei beliebig gewählt, $n_{k+1} > 5\, n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Nun sei

$$b_0 = 0, \quad b_k = \frac{1}{k \log k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

(log 1 werde durch 1 ersetzt).

---

[8]) Math. Zeitschr. 24 (1925), p. 47—104.

[9]) Trigonometrical Series. Warschau 1935, p. 280.

[10]) Bull. Semin. math. Univ. Wilno 2, p. 52—56.

[11]) Zentralblatt f. Math. 21 (1940), p. 120.

$$b_{-k} = -\frac{1}{k \log k} \quad (1 \leqq k \leqq n_1,\ 5n_i + 1 \leqq k \leqq n_{i+1};\quad i = 1, 2, \ldots)$$

$$b_{-k} = 0 \quad (n_i + 1 \leqq k \leqq 3n_i;\quad i = 1, 2, \ldots)$$

$$b_{-k} = -\frac{1}{k(-2n_i)\log(k - 2n_i)} - \frac{1}{k \log k} \quad (3n_i + 1 \leqq k \leqq 5n_i;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Zunächst ist natürlich $b_k = o\left(\frac{1}{|k|}\right)$. $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ konvergiert und zwar gegen 0. Es gilt ja für irgendein k mit $n_i < k \leqq n_{i+1}$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{-k}^{k} b_l\right| \leqq \frac{1}{n_i \log n_i} 2n_i = O\left(\frac{1}{\log n_i}\right).$$

Man sieht sofort weiter, daß $\sum_{-l}^{k} b_n \geqq 0$ für $|l| \leqq k$ und

$$\sum_{-l}^{k} b_n \geqq \frac{n_i}{3n_i \log 3n_i} \geqq \frac{1}{6 \log n_i} \quad \text{für } k \geqq 2n_i,\ 0 < l \leqq 2n_i.$$

Also ist für $p = 2n_i$

$$\sum_{k=-p}^{p} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l \sum_{k=-p}^{p} b_{k-l} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|l|} \sum_{k=-p}^{p} b_{k-l} > \sum_{-p}^{-1} \frac{1}{|l|} \sum_{k=-p}^{p} b_{k-l} \geqq \frac{1}{6 \log n_i}\left(1 + \cdots + \frac{1}{n_i}\right) \sim \frac{1}{6}.$$

Dies schließt die Äquikonvergenz aus.

Wir bemerken noch: Selbstverständlich bleibt für $0 < \delta < 1$ die Gültigkeit des Satzes 3 erhalten, wenn man O und o vertauscht. Ein ähnliches Beispiel wie das gerade angegebene zeigt, daß für $\delta = 1$ die Voraussetzungen $a_k = o\left(\frac{1}{|k|}\right)$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ konvergiert und $b_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ ebenfalls die Äquikonvergenzaussage i. a. nicht gestatten. Somit zeigt sich ein vielleicht erwähnenswerter Unterschied im Verhalten der Cauchyschen (übrigens auch Fourierschen) und Laurentschen Produktbildung. Man beweist nämlich ohne Schwierigkeit, daß die auf $0 < \delta < 1$ bzgl. Bedingungen des Satzes 3 auch für den Spezialfall der Cauchyschen Multiplikation nicht mehr verschärft werden können, wenn man die entsprechende Äquikonvergenzaussage machen will. Hingegen kann man (vgl. den in Abschnitt 1 erwähnten „unsymmetrischen" Satz von Hardy), wenn man nur eine zu Satz 1 analoge Aussage für die Cauchysche Multiplikation machen will, die Bedingung für die b_k erheblich abschwächen. Für die Laurentsche Multiplikation ergeben (1) und (2) schon die Äquikonvergenz von $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ mit $B \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$. Die Möglichkeit einer Abschwächung zu einer Konvergenzaussage unter gleichzeitiger Ab-

schwächung von (2) gibt es hier i. a. nicht (Satz 2). Eine Ausnahme bietet hierin wie eben gezeigt der Fall $\delta = 1$. Einem zu etwas anderem Zweck konstruierten Beispiel (SCHMETTERER[4])) entnimmt man, daß auch unter den Voraussetzungen $a_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$ oder sogar $a_k = o\left(\frac{1}{|k|}\right)$ und $\sum_{-\infty}^{+\infty} |b_k|$ konvergiert die Äquikonvergenz der LAURENTschen Produktreihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ mit $B \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ nicht behauptet werden kann. Es läßt sich aber folgender Satz beweisen:

Satz 4. *$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ sei eine formal gegebene Reihe mit $a_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} |b_k| \log |k|$ konvergiere, wenn man etwa* $\log 0$ *und* $\log 1$ *durch* 1 *ersetzt. Dann ist $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ mit $B \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ äquikonvergent.*

Beweis. $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ konvergiert natürlich und es sei o. B. d. A. $B = 0$. Somit ist zu zeigen:

$$\sum_{-p}^{p} c_k = \sum_{-p}^{p} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l} = o(1).$$

Mit der Bezeichnung $\sum_{-p}^{p} b_{k-l} = B_l$ schreiben wir

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_l B_l = \sum_{-\infty}^{-(p+1)} + \sum_{-p}^{-1} + \sum_{0}^{p} + \sum_{n+1}^{\infty} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.$$

Wir behandeln nur I und II.

$$\mathrm{I} = O\left(\frac{1}{p}\right) \sum_{k=1}^{2p+1} k|b_k| + (2p+1)\, O\left(\frac{1}{p}\right) \sum_{k=2p+2}^{\infty} |b_k|$$

$$= O(p^{-1})\, o(2p+1) + O(1)\, o(1) = o(1).$$

$$\mathrm{II} = \sum_{-p}^{-1} a_l \left(- \sum_{-\infty}^{-l-p-1} b_k - \sum_{p-l+1}^{\infty} b_k \right) = O\left(\sum_{1}^{p} l^{-1} \sum_{k=p-l+1}^{\infty} |b_{-k}| \right)$$

$$O\left(\sum_{\frac{p}{2}+1}^{p} l^{-1} \sum_{p-l+1}^{\infty} |b_{-k}| \right) = o(1) \text{ wegen } \sum_{\xi}^{\infty} |b_{-k}| = o(1) \text{ für passendes } \xi.$$

$$O\left(\sum_{1}^{\frac{p}{2}} l^{-1} \sum_{p-l+1}^{\infty} |b_{-k}| \right) = O\left(\sum_{1}^{\frac{p}{2}} l^{-1} \frac{1}{\log \frac{p}{2}} \sum_{p-l+1}^{\infty} |b_{-k}| \log k \right)$$

$$= O(\log p)\, o\left(\frac{1}{\log p}\right) = o(1).$$

Zygmund [8]) hat unter Heranziehung der Cesaro-Mittel negativer Ordnung den Satz ausgesprochen, daß man aus $a_n = o(|n|^{-\delta})$ $0 < \delta < 1$ und $b_n = O(|n|^{-3})$ auf $\sum_{-n}^{n} c_k - B \sum_{-n}^{n} a_k = o(1)$ im Sinne der $(C, -\delta)$-Summierbarkeit schließen kann. Aus dem Beweis geht sofort hervor, daß man $b_n = O(|n|^{-3})$ zu $O(|n|^{-2-\delta})$ verbessern kann. Hier soll jedoch ein schärferer und etwas allgemeinerer Satz ausgesprochen werden:

Satz 5: *$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ sei eine formal gegebene Reihe mit $a_n = o(|n|^{-\delta})$, für $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ gelte $b_n = O(|n|^{-2+\alpha})$, es sei $0 < \alpha \leqq \delta < 1$ und*

$$\gamma = \delta - \alpha. \tag{4}$$

Dann gilt

$$\sum_{-p}^{p} c_k - B \sum_{-p}^{p} a_k = o(1) \quad (C, -\gamma).$$

Hierbei bedeutet $(C, 0)$ Konvergenz schlechthin. Ist jedoch $\alpha = 0$ und $0 \leqq \delta < 1$, dann kann man erst aus $\sum_{-\infty}^{+\infty} |k|\,|b_k|$ statt $b_n = O(|n|^{-2})$ und sonst unveränderten Voraussetzungen auf

$$\sum_{-p}^{p} c_k - B \sum_{-p}^{p} a_k = o(1) \ (C, -\delta)$$

schließen. In keinem Falle kann man $a_n = o(|n|^{-\delta})$ zu $O(|n|^{-\delta})$ verbessern oder im Falle $\alpha = 0$ die (beliebig langsame) Divergenz von $\sum_{-\infty}^{+\infty} |k\, b_k|$ zulassen.

Beweis. Für die negativen Behauptungen verweisen wir einerseits auf Satz 2 und analog zu konstruierende Beispiele, andererseits auf die triviale Tatsache, daß es zu jedem $\omega(p) \to \infty$ ein $\varphi(p) = o(1)$ mit $\omega(p)\,\varphi(p) \to \infty$ gibt.

Sei nun $B = 0$. Dann genügt es zu zeigen

$$S_p = \sum_{-p}^{p} c_k = o(1) \quad (C, -\gamma). \tag{5}$$

Dies bedeutet

$$\frac{S_p + \binom{-\gamma}{1} S_{p-1} + \cdots + \binom{-\gamma+p+1}{p} S_0}{\binom{-\gamma+p}{p}} = o(1).$$

Wegen $\binom{-\gamma+p}{p} = O(p^{-\gamma})$ genügt es also $S_p = o(p^{-\gamma})$ zu beweisen.

Sei zunächst $\alpha > 0$, $0 < \alpha \leqq \delta < 1$. c_k ist sinnvoll definiert und es gilt $c_k = o(|k|^{-\gamma})$, wie man sofort sieht. Wir übernehmen die Zerlegung von S_p aus dem Beweis des Satzes 4, beschränken uns wieder auf die Abschätzung von I und II und gehen ähnlich vor.

$$\mathrm{I} = o(p^{-\delta}) \sum_{k=1}^{2p+1} k\,|b_k| + (2p+1)\,o(p^{-\delta}) \sum_{k=2p+2}^{\infty} |b_k|$$
$$= o(p^{-\delta})\,O(p^{\varkappa}) + o(p^{1-\delta})\,O(p^{-1+\varkappa}) = o(p^{-\delta}).$$

II wird umgeformt wie oben, so daß

$$\mathrm{II} = O\left(\sum_{1}^{p} |a_{-l}| \sum_{p-l+1}^{\infty} |b_{-k}|\right)$$

$$\mathrm{II} = O\left(\sum_{1}^{\xi} |a_{-l}| \sum_{p-l+1}^{\infty} |b_{-k}|\right) + O\left(\sum_{\xi}^{p} |a_{-l}| \sum_{p-l+1}^{\infty} |b_{-k}|\right).$$

$$O\left(\sum_{1}^{\xi}\right) = O(\xi\, p^{-1+\varkappa}) = o(p^{-\delta}) \quad \text{wegen } \delta < 1.$$

$$O\left(\sum_{\xi}^{p} |a_{-l}| \sum_{p-l+1}^{\infty} |b_{-k}|\right) = o(p^{-\delta}).$$

Der Fall $\alpha = 0$, $0 \leqq \delta < 1$.

Es genügt wieder I und II zu behandeln.

$$\mathrm{I} = o(p^{-\delta}) \left[\sum_{1}^{2p+1} k|b_k| + (2p+1) \sum_{k=2p+2}^{\infty} |b_k|\right] = o(p^{-\delta}) + o(p^{-\delta}) = o(p^{-\delta}).$$

II wird umgeformt wie eben und man erhält weiter

$$\mathrm{II} = o(p^{-\delta}) \left(\sum_{1}^{\frac{p}{2}} k\,|b_{-k}| + \frac{p}{2} \sum_{\frac{p}{2}+1}^{\infty} |b_{-k}|\right) + O\left(\frac{1}{p} \max_{\frac{p}{2} < 2 \leqq p} \sum_{l}^{\infty} k\,|b_{-k}|\right) O(p^{1-\delta})$$
$$= o(p^{-\delta}) + o(p^{-1})\,O(p^{1-\delta}) = o(p^{-\delta}).$$

Damit ist alles bewiesen.

Ausständig ist noch die Behandlung von $\delta = 1$, $0 < \alpha < 1$. Wie sehr einfache Beispiele zeigen, welche man ähnlich wie beim Satz 4 konstruiert, kommt man hier mit den Bedingungen

$$a_n = o(|n|^{-1}), \quad b_n = O(|n|^{-2+\varkappa})$$

nicht aus, sondern es gilt der

Satz 6. $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ *sei formal gegeben,* $a_n = o(|n|^{-1})$. *Für* $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k$ *gelte* $b_n = o(|n|^{-2+\varkappa})$ *mit* $0 < \alpha < 1$. *Dann sind* $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k$ *und* $B \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k$ *äquikonvergent* $(C, -1+\alpha)$.

Auf den Beweis kann nun verzichtet werden.

4. Wir kehren wieder zur Fragestellung des § 2 zurück und wollen einen im § 1 und auch später in Bemerkung 2 erwähnten Satz von Zygmund[3]) in passender Form auf Doppelreihen übertragen. Damit ist dann auch ein Satz über die Konvergenz des Produktes trigonometrischer Doppelreihen gewonnen. Sätze dieser Art sind mir bisher

nicht bekannt geworden. Berührungspunkte mit einer Arbeit von LEPECKI [12]) sind denkbar, doch ist mir leider die unzugängliche Arbeit nur durch das Referat von ZYGMUND [13]) bekannt geworden.

$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{mn}$ sei eine formal gegebene Doppelreihe. Sie heiße konvergent gegen A, wenn

$$\left|\sum_{-m}^{m}\sum_{-n}^{n} a_{kl} - A\right| < \varepsilon \quad m \geqq m(\varepsilon),\ n \geqq n(\varepsilon).$$

$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_{kl}$ sei eine weitere Reihe. Dann soll unter der formalen LAURENTschen Produktreihe $\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} c_{kl}$ mit $c_{kl} = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} a_{mn}\, b_{k-m\,l-n}$ verstanden werden. Es gilt nun folgender

Satz 7. *$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{kl}$ sei im oben erklärten Sinn konvergent gegen A, $\sum_{-\infty}^{+\infty} b_{kl}$ gegen B. Es sei*

$$|a_{kl}| \leqq \frac{K}{k^2+l^2} \quad (K>0;\ k, l = 0, \pm 1, \ldots)^{14})^{15}) \tag{6}$$

$$|b_{kl}| \leqq \frac{|\varepsilon(k,l)|}{k^2+l^2} \tag{7}$$

mit $|\varepsilon(k,l)| \leqq M$ für alle k, l und $\varepsilon(k,l) \to 0$ für $|k|, |l| \to \infty$ im Sinne des Doppellimes. Dann konvergiert die LAURENTsche *Produktreihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_{kl}$ gegen $AB = C$.*

Die vollständige Wiedergabe der für den Beweis erforderlichen umfangreichen Abschätzungen ist äußerst mühsam. Wir wollen uns daher mit einer Beweisskizze begnügen.

Zunächst ist zu zeigen, daß c_{kl} sinnvoll definiert ist. Man zeigt aber leicht die absolute Konvergenz der definierenden Reihen, z. B. für $k, l > 0$:

$$|c_{kl}| \leqq \left|\sum_{\alpha=-\infty}^{-1}\sum_{\beta=-\infty}^{-1} a_{\alpha\beta}\, b_{k-\alpha\,l-\beta}\right| + \left|\sum_{\alpha=-\infty}^{-1}\sum_{\beta=0}^{l}\right| + \left|\sum_{-\infty}^{-1}\sum_{l+1}^{\infty}\right| + \left|\sum_{0}^{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}\right| + \left|\sum_{k+1}^{\infty}\sum_{-\infty}^{l}\right| + \left|\sum_{k+1}^{\infty}\sum_{l+1}^{\infty}\right|.$$

---

[12]) Fac. Filos. Ci. Let. do Parana, Anuario 1940—1941, p. 159—187 (1942) (Portugiesisch).

[13]) Math. Reviews 4 (1943), p. 157.

[14]) Die Brauchbarkeit solcher Bedingungen für Doppelreihen hat wohl zum ersten Mal KNOPP, Math. Zeitschr. 45 (1939), p. 573—589 (allerdings in anderem Zusammenhange) aufgezeigt.

[15]) Größen mit verschwindendem Nenner sollen hier und in ähnlichem Zusammenhang etwa gleich 1 gesetzt werden.

Die erste Summe ist $\leqq \sum_{-\infty}^{-1}\sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^2} < \infty$, da die Anzahl der Gitterpunkte im Kreis asymptotisch gleich dem Flächeninhalt ist. Die zweite Summe ist $\leqq \sum_{-\infty}^{-1}\sum_{0}^{l} \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\frac{1}{(l-\beta)^2} = O\left(\frac{1}{l}\right)$ und so ähnlich werden die folgenden Summen abgeschätzt.

Nun ist zu zeigen: $\left|\sum_{|k|\leqq m,\,|l|\leqq n} c_{kl} - C\right| = o(1)$[16]. Hierzu wird

$$\sum_{|k|\leqq m,\,|l|\leqq n} c_{kl} = \sum_{\alpha,\gamma}^{\beta,\delta} a_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \cdots + \mathrm{VIII} + \mathrm{IX}$$

aufgespalten auf Grund der folgenden Summationsbedingungen:

I. $|\alpha \pm \gamma| \leqq m,\ |\beta \pm \delta| \leqq n,$

II. $-m \leqq \alpha \leqq 0,\ m + \alpha < \gamma \leqq m - \alpha,\ |\beta + \delta| \leqq n,\ -\infty < \delta < \infty,$

III. $0 < \alpha \leqq m,\ -m - \alpha \leqq \gamma < -m + \alpha,\ |\beta + \delta| \leqq n,\ -\infty < \delta < \infty,$

IV. $-\infty < \alpha < -m,\ -m - \alpha \leqq \gamma \leqq m - \alpha,\ |\beta + \delta| \leqq n,\ -\infty < \delta < +\infty,$

V. $m < \alpha < +\infty,\ -m - \alpha \leqq \gamma \leqq m - \alpha,\ |\beta + \delta| \leqq n,\ -\infty < \delta < +\infty,$

VI. $|\alpha \pm \gamma| \leqq m,\ -n \leqq \beta < 0,\ n + \beta < \delta < n - \beta,$

VII. $|\alpha \pm \gamma| \leqq m,\ -\infty < \beta < -n,\ -n - \beta \leqq \delta \leqq n - \beta,$

VIII. $|\alpha \pm \gamma| \leqq m,\ 0 < \beta \leqq n,\ -n - \beta \leqq \delta \leqq -n + \beta,$

IX. $|\alpha \pm \gamma| \leqq m,\ n < \beta < +\infty,\ -n - \beta \leqq \delta \leqq n - \beta.$

Zur Behandlung von I formulieren wir das

Lemma 2 (Schmetterer[7]). *Für den Sonderfall der Cauchyschen Multiplikation ist Satz 7 richtig.*

Daraus folgt $\mathrm{I} \to C$.

Der Nachweis, daß die Ausdrücke II bis IX Nullfolgen im Pringsheimschen Sinne sind, ist wesentlich dadurch erschwert, daß $\varepsilon(k, l)$ gemäß (7) erst dann beliebig klein wird, wenn k und l dem Betrage nach hinreichend groß sind. Wir führen dies jedoch nicht mehr genauer aus.

Der in Lemma 2 erwähnte Satz für die Cauchysche Multiplikation gilt genauer unter den etwas schärferen Voraussetzungen, daß nebst (6) statt (7) eine analoge Beziehung für die b_k besteht. Diese Formulierung ist für Satz 7 nicht zulässig. Es gilt vielmehr der

Satz 8. *Ersetzt man in den Voraussetzungen des Satzes 7 die Bedingung* (7) *durch*

$$(7') \qquad |b_{kl}| < \frac{M}{k^2 + l^2} \quad (M > 0;\ k, l = 0, \pm 1, \ldots),$$

dann braucht die Laurentsche Produktreihe nicht gegen AB zu konvergieren.

---

[16]) Das Landau-Symbol ist natürlich im Sinne des Doppellimes zu verstehen.

Der Beweis ist nach dem Bisherigen auf der Hand liegend. Man wähle $a_{mn} = \operatorname{sign} m \cdot \operatorname{sign} n \frac{1}{m^2 + n^2} = b_{mn}$ und verfahre nun ähnlich wie beim Beweis des Satzes 2. Allerdings ist die explizite Durchführung wesentlich umständlicher, weshalb wir auf die genaue Darlegung wieder verzichten.

(Eingegangen am 22. Oktober 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 115—128 (1951).

Über die Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen.

Von

Hanno Rund in Kapstadt.

§ 1.

Einleitung.

Bis in die neueste Zeit wurden den Untersuchungen über die FINSLER'schen Räume hauptsächlich die Methoden von CARTAN [1][1]) und BERWALD [2] zu Grunde gelegt. Hierbei beruhen alle weiteren Entwicklungen auf der Definition des Parallelismus, mit welchem sich schon früher TAYLOR [3] und SYNGE [4] beschäftigten. Ein wesentlicher Gesichtspunkt, welchen diese Autoren trotz ihrer Unterschiede gemeinsam haben, besteht darin, daß man eine willkürliche, den Raum überdeckende Kurvenschar wählt, durch welche jedem Punkt eine ausgezeichnete Richtung zugeordnet wird. Sämtliche vom Ort abhängigen Messungen und auch der Parallelismus beziehen sich auf diese Richtung, sind daher in einem gewissen Sinne ebenfalls willkürlich. Auf diese Weise kann man die *analytischen* Methoden der RIEMANN'schen Geometrie direkt verallgemeinern, was einen großen Vorteil darstellt.

Dagegen soll hier von einem anderen Gesichtspunkte ausgegangen werden, und es soll ein Versuch gemacht werden, die Theorie der FINSLER'schen Räume derart aufzubauen, daß keine solche Willkürlichkeiten auftreten können. Obwohl auch hier der RIEMANN'sche Raum als Spezialfall auftreten muß, wird keineswegs versucht, den Ausgangspunkt so zu wählen, daß es sich ausschließlich um eine ähnliche analytische Verallgemeinerung handelt, sondern die Ansätze sollen im wesentlichen auf der rein geometrischen Anschauung beruhen, insbesondere auf der Tatsache, daß *die Metrik des FINSLER'schen Raumes lokal durch einen MINKOWSKI'schen Tangentialraum bestimmt wird.*

Diese Unterschiede sollen zuerst deutlich hervorgehoben werden. Wir legen einen n-dimensionalen Punktraum zugrunde, in welchem die Koordinaten mit x^i $(i = 1, \ldots, n)$ bezeichnet werden. Die Distanz zwischen zwei Punkten einer Kurve

$$x^i = x^i(t) \tag{1}$$

[1]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

wird durch ein Integral von der Form

$$s = \int_{t_0}^{t_1} F(x^i, x'^i)\, dt \tag{2}$$

geliefert, wobei t_0 und t_1 die Werte des Kurvenparameters t sind, welche diesen Punkten entsprechen, und $x'^i \equiv dx^i/dt$ ist. Hier soll F den üblichen Annahmen der Grundfunktion eines Variationsproblems genügen: F ist positiv, stetig und hinreichend oft stetig differenzierbar in den $2n$ Variablen x^i, x'^i und positiv homogen erster Ordnung sowohl wie konvex in den x'^i.

Für den Fall, daß $F(x^i, x'^i)$ nur von den x'^i abhängt, erhalten wir auf diese Art einen Minkowski'schen Raum, in welchem die Extremalen die Geraden sind. Dieser Raum ist affin, so daß wir die Tensorrechnung benutzen können. Wir werden also jedem Punkt $P(x^i)$ einen tangentialen Minkowski'schen Raum $T_n(P)$ zuordnen, welcher die Metrik des Finsler'schen Raumes lokal bestimmt. Wir bilden dann in jedem T_n die geschlossene, konvexe Fläche

$$F(x^i, x'^i) = 1 \tag{3}$$

die sog. *Indikatrix* von Carathéodory ([5], S. 244), welche die Rolle der Einheitskugel in T_n spielt. Indem wir

$$g_{ij}(x, x') = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F^2(x^k, x'^k)}{\partial x'^i\, \partial x'^j} \tag{4}$$

setzen, wobei die g_{ij} nach dem Euler'schen Satz über homogene Funktionen positiv homogen nullter Ordnung in den x'^i sind und deshalb die Gleichungen[2])

$$\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} x'^i = \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} x'^k = 0 \tag{5}$$

identisch befriedigen, können wir die Indikatrix durch die Gleichung

$$g_{ij}(x, x')\, x'^i\, x'^j = 1 \tag{6}$$

darstellen. In dem Riemann'schen Raum hätten wir statt dessen

$$g_{ij}(x)\, x'^i\, x'^j = 1,$$

also ein Ellipsoid. Jeder Richtung x'^i im T_n entspricht aber ein solches Ellipsoid, welches die allgemeine Indikatrix (6) berührt; in der Tat ist diese Fläche die Enveloppe sämtlicher solchen „oskulierenden Indikatrizen". Bei Cartan und Berwald wird durch die ausgezeichnete Richtung in jedem Punkt eine oskulierende Indikatrix festgelegt, auf welche sämtliche Messungen bezogen werden und von welcher auch der Parallelismus abhängig gemacht wird. In dem vorliegenden Versuch

[2]) Wie in der Tensorrechnung üblich, wird über doppelt vorkommende Indizes von 1 bis n summiert.

sollen statt dessen diese Messungen an der ursprünglichen Indikatrix ausgeführt werden, und auf diese Weise wird ein „absoluter" Parallelismus bestimmt.

Wir führen einen dualen Minkowski'schen Tangentialraum T'_n ein, so daß die Beziehung zwischen entsprechenden Vektoren x'^i von T_n und y_i von T'_n durch die Gleichungen

$$y_i = g_{ij}(x, x')\,x'^j, \quad x'^i = g^{ij}(x, y)\,y_j \tag{7}$$

ausgedrückt wird. Die Ableitung und geometrische Bedeutung dieser Relationen werden in der Arbeit [6] des Verfassers ausführlicher angedeutet. Für spätere Anwendungen bemerken wir, daß die Gleichungen

$$g^{ik}(x, y)\,g_{mk}(x, x') = \delta^i_m \tag{8}$$

identisch befriedigt sind, wenn x'^i, y_i entsprechende Vektoren in T_n bzw. T'_n sind, während die g^{ij} denselben Homogenitätsrelationen in den y_i genügen, wie die g_{ij} in den x'^i.

§ 2.

Die Christoffelsymbole. Geodätische Linien.

Unser Studium der Finsler'schen Räume soll auf der Untersuchung der Variation der lokalen Minkowski'schen Metrik zwischen benachbarten Punkten beruhen. Für eine Abschätzung der Größen erster Ordnung genügen die Christoffelsymbole ([7], S. 41), welche in der Finsler'schen Geometrie wie in dem Riemann'schen Fall aus den Ableitungen der g_{ij} bestehen, nur daß hier zu beachten ist, daß diese Funktionen nicht nur vom Ort, sondern auch von der Richtung abhängen. Man kann diese Funktionen geometrisch auch folgendermaßen deuten ([8], S. 54). Bezeichnen wir mit

$$2\varphi(x, X) = g_{ij}(x, X)\,X^i X^j \tag{9}$$

das Quadrat der Länge eines Vektors X^i im Tangentialraum $T_n(P)$ eines Punktes $P(x^i)$, so ist die Differenz zwischen dieser Funktion und dem φ, welches in einem benachbarten Punkt $x^i + dx^i$ die Länge eines Vektors mit denselben Komponenten (bezogen auf ein geeignetes Koordinatensystem) ausdrückt, durch

$$\begin{aligned} d_x(\varphi) &= [ik, j]_{(x, X)}\,X^i X^j\,dx^k \\ &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}(x, X)}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}(x, X)}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}(x, X)}{\partial x^k}\right) X^i X^j\,dx^k \end{aligned} \tag{10}$$

gegeben, wobei die Verschiebung dx^k in der Richtung des Vektors X^k liegt. Der Ausdruck (10) stellt also ein Maß der Variation der Metrik zwischen den Punkten x^i und $x^i + dx^i$ dar.

Wie in der Riemann'schen Geometrie verfügen wir auch hier über die folgenden Identitäten:

$$[ik, j]_{(x,X)} + [jk, i]_{(x,X)} = \frac{\partial g_{ij}(x, X)}{\partial x^k}; \tag{11}$$

$$[ij, k]_{(x,X)} = g_{hk}(x, X) \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}_{(x,X)}; \tag{11'}$$

wobei

$$\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}_{(x,X)} = g^{hk}(x, Y)\,[ij, k]_{(x,X)} \tag{11''}$$

definiert ist, und Y_i derjenige Vektor in T'_n ist, welcher X^i in T_n entspricht.

Schließlich bemerken wir noch, daß die geodätischen Linien durch die Gleichungen

$$\frac{dx'^i}{ds} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\}_{(x,x')} x'^h x'^k = 0 \quad \left(x'^i \equiv \frac{dx^i}{ds}\right) \tag{12}$$

dargestellt werden. Sie sind die Euler'schen Gleichungen des Variationsproblems (2), können aber direkt auf geometrischen Wege mit Hilfe der hier angegebenen Formeln aus Betrachtungen über die erste Variation abgeleitet werden.

§ 3.

Das kovariante Differential eines Vektors.

Wir betrachten zwei Punkte $A(x^i)$ und $B(x^i + dx^i)$ und legen ein willkürliches, stetiges Vektorfeld $X^i(x^j)$ zugrunde, dessen Komponenten sich durch den Übergang von A zu B um einen Betrag

$$dX^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\, dx^k \tag{13}$$

verändern, welchen wir die „natürliche" Variation von $'X^i$ nennen wollen. Die Punkte A und B bestimmen eine und nur eine geodätische Linie E, welche durch beide Punkte verläuft. Wir suchen nun einen Vektor $X^i + d^*X^i$ in $T_n(B)$, welcher den folgenden Bedingungen genügen soll:

(A) Die Skalarprodukte der Vektoren X^i und $X^i + d^*X^i$ in Bezug auf die Tangentialvektoren in A und B von E sind einander identisch gleich, d. h.

$$g_{ij}(x, x')\, x'^i X^j = g_{ij}(x + dx, x' + dx')\,(x'^i + dx'^i)\,(X^j + d^*X^j),$$

wobei die $x'^j \equiv dx^j/ds$ die Komponenten des Tangentialvektors in A von E sind.

(B) $dX^i - d^*X^i \equiv 0$, wenn $X^i \equiv x'^i$ ist.

(C) d^*X^i ist linear in den X^k.

Nun setzen wir

$$DX^i = dX^i - d^*X^i \tag{14}$$

und nennen DX^i das kovariante Differential des Vektors X^i, und die

Parallelverschiebung wird durch die Bedingung

$$DX^i = 0 \tag{15}$$

definiert. Geometrisch erklären wir dies folgendermaßen: Der zu X^i in $T_n(A)$ „parallele" Vektor in $T_n(B)$ muß, von A aus betrachtet, identisch zu X^i erscheinen, abgesehen von der Länge. Dieser Vektor wird aber an der Indikatrix in $T_n(B)$ gemessen; da diese aber von der in $T_n(A)$ verschieden ist, macht sich die Variation der Metrik bemerkbar, welche eben durch das gesuchte d^*X^i ausgedrückt wird. Wird aber *diese Variation genau ausgeglichen durch die „natürliche" Variation* (13) des Vektorfeldes, so ist wegen (14) die Gleichung (15) befriedigt, und somit die scheinbare Identität hergestellt.

Um den Vektor $X^i + d^*X^i$ zu bestimmen, bringen wir als erstes die Bedingung (A) in eine übersichtlichere Form. Indem wir nur Größen erster Ordnung betrachten und die ersten drei Glieder der TAYLOR'schen Entwicklung von $g_{ij}(x + dx,\ x' + dx')$ in (A) einführen, erhalten wir

$$\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x^k} x'^i X^j dx^k + \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^k} x'^i X^j dx^k + g_{ij}(x, x') x'^i d^*X^j + g_{ij}(x, x') X^j dx'^i = 0. \tag{16}$$

Hierbei ist zu beachten, daß sich dx'^i auf E bezieht; es kann also in (16) nach der Gleichung (12) als Funktion der x'^i ausgedrückt werden. Der zweite Ausdruck in (16) verschwindet identisch wegen (5), und wenn wir außerdem den ersten Ausdruck mit Hilfe von (11) umformen, wird

$$([ik, j]_{(x, x')} + [jk, i]_{(x, x')}) x'^i X^j dx^k - g_{ij}(x, x') \left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^h X^j dx^k + g_{ij}(x, x') x'^i d^*X^j = 0. \tag{17}$$

Nach (11′) sind aber die ersten zwei Glieder in (17) gleich

$$(g_{hj}(x, x') \left\{ \begin{matrix} h \\ ik \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^i X^j + g_{ih}(x, x') \left\{ \begin{matrix} h \\ jk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^i X^j) dx^k,$$

und wenn wir die Indizes i und h vertauschen, sehen wir, daß der erste und dritte Ausdruck in (17) sich heben. Es bleibt also

$$g_{ih}(x, x') \left\{ \begin{matrix} h \\ jk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} x'^i X^j dx^k + g_{ij}(x, x') x'^i d^*X^j = 0.$$

Durch geeignete Vertauschung der Indizes und unter Anwendung von (7) erhalten wir endlich

$$y_i \left[\left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} X^h dx^k + d^*X^i \right] = 0 \tag{18}$$

Für eine Variation, welche durch die Gleichung

$$d^*X^i = - \left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\}_{(x, x')} X^h dx^k$$

bestimmt ist, würde die Bedingung (A) erfüllt sein. Dies ist aber keineswegs die allgemeinste Variation, da aus den Homogenitätseigenschaften der g^{ij} die Relationen

$$y_i \frac{\partial g^{ik}(x, y)}{\partial x'^l} \equiv 0 \tag{19}$$

gelten, so daß der eben angegebene Wert von $d^* X^i$ durch einen Ausdruck

$$d^* X^i = -\left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} X^h \, d x^k + f_k(x, x', X) \frac{\partial g^{ik}(x, y)}{\partial x'^l} \, d x'^l \tag{20}$$

ersetzt werden kann, welcher noch immer die Gleichung (18) befriedigt; dabei ist f_k eine bis jetzt noch unbestimmte Funktion von x^i, x'^i und X^i, welche wir mit Hilfe der Bedingungen (B) und (C) festlegen wollen.

Nach der Bedingung (C) muß diese Funktion jedenfalls in der Form $f_{hk}(x, x') X^h$ darstellbar sein. Für den Sonderfall, daß X^i der Tangentialvektor x'^i von E ist, folgt aus (B), daß wir $d^* X^i$ durch $d x'^i$ ersetzen dürfen, wobei $d x'^i$ sich auf E bezieht. Nach der Gleichung (12) für geodätische Linien folgt dann sofort aus (20), daß

$$f_{hk}(x, x') x'^h \frac{\partial g^{ik}(x, y)}{\partial x'^l} \, d x'^l = 0$$

sein muß.

Indem wir aber (7) in (19) einsetzen und die Indizes vertauschen, haben wir

$$g_{hk}(x, x') x'^h \frac{\partial g^{ik}(x, y)}{\partial x'^l} \, d x'^l = 0. \tag{21}$$

Da beim Einsetzen von (20) in (18) über i und l in dem unbekannten Ausdruck schon summiert wird, können für f_k keine anderen Formen in Betracht kommen als

$$f_k(x, x', X) = \chi(x, x') \, g_{hk}(x, x') \, X^h \tag{22}$$

wobei $\chi(x, x')$ eine noch unbekannte skalare Funktion ist.

Jetzt differenzieren wir noch die Gleichung (8) nach x'^l:

$$g_{hk}(x, x') \frac{\partial g^{ik}(x, y)}{\partial x'^l} = -g^{ik}(x, y) \frac{\partial g_{hk}(x, x')}{\partial x'^l} \tag{23}$$

Setzen wir (22) mit Rücksicht auf (23) in der Gleichung (20) ein, erhalten wir endlich aus (14)

$$D X^i = d X^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x, x')} X^h \, d x^k + \chi(x, x') \, g^{ik}(x, y) \frac{\partial g_{hk}(x, x')}{\partial x'^l} X^h \, d x'^l. \tag{24}$$

Die Bedingungen (A) – (C) sind also nicht völlig hinreichend, $d^* X^i$ eindeutig festzulegen, da für jede Funktion $\chi(x, x')$ in dem Ausdruck (24) diese Bedingungen offensichtlich befriedigt sind. Um diese Funktion geometrisch zu bestimmen, müssen wir Tensoren zweiter Stufe, insbesondere die g_{ij}, betrachten und eine vierte Bedingung einführen.

§ 4.

Das kovariante Differential eines Tensors zweiter Stufe.

Es sei $a_{ij}(x)$ ein beliebiges stetiges Tensorfeld. Eine Gleichung von der Form

$$a(x) = a_{ij}(x)\, X^i X^j \tag{25}$$

stellt eine Fläche $F(A)$ in $T_n(A)$ dar, wobei $a(x)$ für jeden Tangentialraum einen festen Wert annimmt. Mit demjenigen Wert von a_{ij} welcher dem benachbarten Punkt B entspricht, bilden wir ebenfalls eine Fläche $F(B)$ in $T_n(B)$. Dagegen können wir aber in $T_n(B)$ auch eine zweite Fläche $F^*(B)$ erhalten, indem wir sämtliche Vektoren in $T_n(A)$, welche die Gleichung (25) befriedigen, parallel gemäß der Definition des vorigen Abschnitts nach $T_n(B)$ verschieben.

Die Gleichungen von $F(B)$ bzw. $F^*(B)$ lauten dann

$$\begin{aligned} a(x) + d\,a(x) &= (a_{ij} + d\,a_{ij})\, X^i X^j; \\ a(x) + d^*a(x) &= a_{ij}(X^i + d^*X^i)\,(X^j + d^*X^j). \end{aligned} \tag{26}$$

Hier entspricht $d^*a(x)$ wieder der Variation der Metrik allein, da wir für $F^*(B)$ die a_{ij} festhalten; während $d\,a(x)$ die „natürliche" Variation des Tensorfeldes darstellt. Wird aber die Fläche $F(B)$ an der Indikatrix in $T_n(A)$ anstatt an der Indikatrix in $T_n(B)$ gemessen, so wird sich die Summe

$$D\,a(x) = d^*a(x) + d\,a(x) \tag{27}$$

beider Variationen bemerkbar machen. Wir definieren das kovariante Differential des Tensorfeldes a_{ij} deshalb durch die Gleichung

$$D\,a(x) = (D\,a_{ij})\, X^i X^j. \tag{28}$$

Dann folgt aus (26) und (27)

$$(D\,a_{ij})\, X^i X^j = d\,a_{ij} X^i X^j + a_{ij}(X^i\, d^*X^j + X^j d^*X^i).$$

Setzen wir jetzt die Werte von d^*X^i, welche aus den Gleichungen (14) und (24) hervorgehen, hier ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &(D\,a_{ij})\, X^i X^j \\ &= d\,a_{ij} X^i X^j - a_{ij} X^i \left[\left\{ \begin{matrix} j \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x,\,x')} X^h d\,x^k + \chi(x,\,x')\, g^{jk}(x,\,y) \frac{\partial\, g_{hk}(x,\,x')}{\partial\, x'^l}\, d\,x'^l X^h \right] \\ &\quad - a_{ij} X^j \left[\left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x,\,x')} X^h d\,x^k + \chi(x,\,x')\, g^{ik}(x,\,y) \frac{\partial\, g_{hk}(x,\,x')}{\partial\, x'^l}\, d\,x'^l X^h \right]. \end{aligned}$$

Hier vertauschen wir die Indizes derart, daß wir den Koeffizient von $X^i X^j$ auf der rechten Seite erhalten; da aber diese Koeffizienten von

X^i unabhängig sind ergibt sich

$$
\begin{aligned}
D a_{ij} = d a_{ij} - a_{ih}\left[\left\{ {h \atop j\,k} \right\}_{(x,\,x')} d x^k + \chi(x, x')\, g^{hk}(x, y) \frac{\partial g_{jk}(x, x')}{\partial x'^l}\, d x'^l\right] \\
- a_{hj}\left[\left\{ {h \atop i\,k} \right\}_{(x,\,x')} d x^k + \chi(x, x')\, g^{hk}(x, y) \frac{\partial g_{ik}(x, x')}{\partial x'^l}\, d x'^l\right].
\end{aligned} \tag{29}
$$

Also ist auch das kovariante Differential eines Tensors zweiter Stufe bis auf die unbekannte Funktion $\chi(x, x')$ bestimmt. Ist insbesondere $D a_{ij} = 0$, so folgt aus (28), daß der Übergang von $F(A)$ in $T_n(A)$ nach $F(B)$ in $T_n(B)$ unbemerkbar ist, da die entsprechende Variation der Metrik genau durch die „natürliche" Variation des Tensorfeldes aufgehoben wird.

Um die Funktion $\chi(x, x')$ endlich festzulegen, betrachten wir als besonderen Spezialfall den Tensor g_{ij}. Da durch diesen die „Einheitskugeln" in $T_n(A)$ und $T_n(B)$ dargestellt werden können, ist es nach dem eben gesagten natürlich, die weitere Bedingung

$$
D: \qquad D g_{ij}(x, x') = 0 \tag{30}
$$

zu stellen, wobei $x'^i d s = d x^i$ die Richtung der Verschiebung AB an der geodätischen Linie E bedeutet. Diese geometrische Forderung entspricht dem Lemma von Ricci in der Riemann'schen Geometrie.

Setzen wir (29) in (30) ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x^k} d x^k + \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^l} d x'^l - g_{ih}(x, x') \left\{ {h \atop j\,k} \right\}_{(x,\,x')} d x^k \\
- g_{hj}(x, x') \left\{ {h \atop i\,k} \right\}_{(x,\,x')} d x^k - \chi(x, x') \Big[g_{ih}(x, x')\, g^{hk}(x, y) \frac{\partial g_{jk}(x, x')}{\partial x'^l} \\
+ g_{hj}(x, x')\, g^{hk}(x, y) \frac{\partial g_{ik}(x, x')}{\partial x'^l} \Big] d x'^l = 0.
\end{aligned}
$$

Auf das dritte und vierte Glied wenden wir die Gleichung (11') an, während wir gleichzeitig mit Hilfe von (8) den Ausdruck in den eckigen Klammern umformen; dann wird

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x^k} d x^k + \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^l} d x'^l - ([j\,k, i]_{(x,\,x')} + [i\,k, j]_{(x,\,x')})\, d x^k \\
- \chi(x, x') \left[\frac{\partial g_{ji}(x, x')}{\partial x'^l} + \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^l} \right] d x'^l = 0.
\end{aligned}
$$

Indem wir jetzt die Gleichung (11) und die Symmetrie der g_{ij} in den Indizes i und j beachten, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x^k} d x^k + \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^l} d x'^l - \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x^k} d x^k \\
- 2\chi(x, x') \frac{\partial g_{ij}(x, x')}{\partial x'^l} d x'^l = 0;
\end{aligned}
$$

also schließlich

$$
\chi(x, x') = \tfrac{1}{2}. \tag{31}
$$

Setzen wir diesen Wert von χ in (24) und (29) ein, sind die kovarianten Differentiale endgültig bestimmt, wobei noch einmal ausdrücklich bemerkt werden muß, daß die dx'^l auf E bezogen sind. Natürlich bleibt noch die Frage zu beantworten, ob diese kovarianten Differentiale die Tensoreigenschaften, wie wir sie schon im voraus angedeutet haben, besitzen. Dies ist zwar der Fall, aber da die Berechnung der Transformationsgesetze etwas langwierig ist (ohne irgendwelche prinzipiellen Schwierigkeiten aufzuweisen), wollen wir hier von einer Darstellung absehen.

§ 5.

Die „erweiterten" Christoffelsymbole. Eigenschaften des kovarianten Differentials.

Aus der Gleichung (12) für die geodätischen Linien folgt, daß wir dx'^l in (24) und (29) durch

$$dx'^l = -\left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x,\,x')} x'^j\, dx^k \tag{32}$$

ersetzen können. Wir führen jetzt eine neue Schreibweise ein, indem wir

$$P^i_{hk}(x,\,x') \equiv \left\{ \begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix} \right\}_{(x,\,x')} - \frac{1}{2} g^{im}(x,\,y)\, \frac{\partial\, g_{hm}(x,\,x')}{\partial\, x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x,\,x')} x'^j \tag{33}$$

setzen, so daß wir die Gleichungen (24) und (29) in der kürzeren Form

$$DX^i = dX^i + P^i_{hk}(x,\,x')\, X^h\, dx^k \tag{34}$$

$$Da_{ij} = da_{ij} - a_{ih} P^h_{jk}(x,\,x')\, dx^k - a_{hj} P^h_{ik}(x,\,x')\, dx^k \tag{35}$$

schreiben können. Eine den Rechnungen der vorhergehenden Abschnitte analoge Ausführung für die dualen Tangentialräume T'_n zeigt, daß ebenfalls die Beziehungen

$$DY_i = dY_i - P^h_{ik}(x,\,x')\, Y_h\, dx^k \tag{34'}$$

$$Db^{ij} = db^{ij} + b^{ih} P^j_{hk}(x,\,x')\, dx^k + b^{hj} P^i_{hk}(x,\,x')\, dx^k \tag{35'}$$

gelten.

Diese Schreibweise ist sehr bequem, wie spätere Rechnungen zeigen. Wegen der Ähnlichkeit mit den entsprechenden Formeln der Riemannschen Geometrie wollen wir die P^i_{hk}, welche auch hier nicht Tensoren sind, die *erweiterten Christoffelsymbole* nennen. Es ist aber streng zu beachten, daß i. a. die P^i_{hk} nicht in den unteren Indizes h und k symmetrisch sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung für diese Symmetrie lautet

$$\frac{\partial^3 \varphi(x,\,x')}{\partial\, x'^h\, \partial\, x'^m\, \partial\, x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\}_{(x,\,x')} = \frac{\partial^3 \varphi(x,\,x')}{\partial\, x'^k\, \partial\, x'^m\, \partial\, x'^l} \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,h \end{matrix} \right\}_{(x,\,x')}.$$

Die Tatsache, daß sie im allgemeinen Fall nicht erfüllt sein muß, verursacht einen wesentlichen Unterschied zwischen den Methoden

zur Behandlung des Krümmungstensors in den FINSLER'schen und RIEMANN'schen Räumen.

Der Operator D befriedigt dieselben Gesetze wie der übliche Differentialoperator, nur daß für zweimalige Anwendung solcher Operatoren die Reihenfolge der Differentiationen nicht willkürlich ist. Sind z. B. Y_i, Z_i zwei kovariante Vektoren, so ist $Y_i Z_j$ ein kovarianter Tensor zweiter Stufe, und aus (35) folgt

$$\begin{aligned} D(Y_i Z_j) &= d(Y_i Z_j) - Y_i Z_h P^h_{jk} d x^k - Y_h Z_j P^h_{ik} d x^k \\ &= Y_i (d Z_j - Z_h P^h_{jk} d x^k) + Z_j (d Y_i - Y_h P^h_{ik} d x^k) \\ &= Y_i D Z_j + Z_j D Y_i \end{aligned}$$

nach (34'). Auch ist das kovariante Differential einer skalaren Größe gleich dem üblichen Differential; denn sind X^i und Y_i zwei beliebige kontravariante bzw. kovariante Vektoren, so gilt

$$\begin{aligned} D(X^i Y_i) &= (d X^i + P^i_{hk} X^h d x^k) Y_i + X^i (d Y_i - P^h_{ik} Y_h d x^k) \\ &= d(X^i Y_i) + d x^k (P^i_{hk} Y_i X^h - P^h_{ik} Y_h X^i), \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck in der letzten Klammer verschwindet, wenn wir in seinem ersten Glied die Indizes i und h vertauschen.

Hier wollen wir noch hervorheben, daß die Ausdrücke (34)—(35') nur von den betrachteten Tensoren und von der Verschiebung $d x^k = x'^k d s$ von A nach B abhängen; die oben definierte *Parallelverschiebung ist also eindeutig festgelegt.* Zwar tritt ein sehr wesentlicher Nachteil dieser Definition dadurch auf, daß die Länge des verschobenen Vektors nicht erhalten bleibt. Da aber der entsprechende Unterschied der Längen stets leicht zu berechnen ist, bedeutet dies hauptsächlich einen *analytischen* Nachteil — vom Gesichtspunkte des Parallelismus ist die Richtung des parallelen Vektors von größerer Bedeutung als seine Länge. Diese bleibt im allgemeinen nur erhalten, wenn der Vektor in seiner eigenen Richtung verschoben wird, wobei wir bemerken, daß *die geodätischen Linien diejenigen Kurven sind, für welche der Autoparallelismus gilt.* Dies ist die Bedeutung der Bedingung (B).

Schließlich führen wir noch die folgende Definition ein, um im Stande zu sein, Winkel[3]) in benachbarten Punkten A und B vergleichen zu können. Es seien $X^i_{(1)}$, $X^i_{(2)}$ stetige Vektorfelder; wir bezeichnen mit Θ den Winkel zwischen den Vektoren $X^i_{(1)}$, $X^i_{(2)}$ in $T_n(A)$. Dann definieren wir den Winkel $\Theta + D\Theta$, gemessen an der Indikatrix in $T_n(A)$, als den Winkel zwischen den Vektoren $X^i_{(1)} + D X^i_{(1)}$, $X^i_{(2)} + D X^i_{(2)}$, wobei $D X^i_{(1)}$, $D X^i_{(2)}$ die kovarianten Differentiale der Vektorfelder bedeuten, welche einer Verschiebung von A nach B entsprechen. Bei Parallelverschiebung der beiden Vektoren verschwindet $D\Theta$.

[3]) Wir benützen hier die in der Arbeit [6], § 2, Gleichung (13) angegebene Definition des Winkels.

§ 6.

Beispiel: Die Krümmung von Raumkurven.

Als Beispiel dafür, wie wir unser kovariantes Differential anwenden können, werden wir die Krümmungseigenschaften einer beliebigen, stetigen differenzierbaren Kurve C:

$$x^i = x^i(s) \tag{36}$$

im FINSLER'schen Raum betrachten. Hier bedeutet s die Bogenlänge, so daß entlang C stets

$$g_{ij}(x, dx)\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^j}{ds} = 1 \tag{37}$$

ist. Der Vektor $x'^i = dx^i/ds$ wird wieder als Tangentenvektor betrachtet. Aus den Ausführungen des letzten Abschnitts folgt deshalb

$$\frac{D}{Ds}[g_{ij}(x, x')\,x'^i\,x'^j] = 0.$$

Hier ist die Verschiebung dx^k, welcher der Operator D entspricht, entlang der Kurve genommen. Führen wir die Differentiation aus, so können wir die Gleichung (30) anwenden und erhalten

$$g_{ij}(x, x')x'^i\frac{Dx'^j}{Ds} = O. \tag{38}$$

Der Vektor Dx'^j/Ds ist also orthogonal[4]) in Bezug auf die Tangentenvektoren von C; wir nennen ihn deshalb den *Normalenvektor* der Kurve.

Es seien $A(x^i)$, $B(x^i + dx^i)$ zwei benachbarte Punkte von C, mit den Tangentenvektoren x'^i in $T_n(A)$ und $x'^i + dx'^i$ in $T_n(B)$. Wir bilden in $T_n(B)$ den Vektor $x'^i + d^*x'^i$ durch Parallelverschiebung von x'^i in $T_n(A)$ nach $T_n(B)$. Um einen Ausdruck für die Krümmung der Kurve im Punkte A zu gewinnen, müssen wir den Winkel zwischen den Vektoren $x'^i + dx'^i$ und $x'^i + d^*x'^i$ in Bezug auf die Indikatrix in $T_n(A)$ berechnen. Nach unseren früheren Ausführungen ist dies der Winkel $D\Theta$ zwischen den Vektoren x'^i und $x'^i + Dx'^i$ in $T_n(A)$, da für den parallel verschobenen Vektor das kovariante Differential verschwindet. Wegen der Gleichung (38) dürfen wir also sofort

$$D\Theta = [g_{ij}(x, Dx')\,Dx'^i\,Dx'^j]^{1/2} \tag{39}$$

schreiben. Definieren wir die Krümmung ϱ^{-1} nun durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{D\Theta}{Ds} \tag{40}$$

[4]) Nach der in der Arbeit [6], § 2 angegebenen Definition.

folgt sofort

$$\frac{1}{\varrho^2} = g_{ij}\left(x, \frac{Dx'}{Ds}\right)\frac{Dx'^i}{Ds}\cdot\frac{Dx'^j}{Ds}. \tag{40'}$$

Es ist also ϱ^{-1} gleich der Länge des Normalenvektors[5]).

Die Komponenten dieses Vektors lauten ausführlich geschrieben nach (33) und (34):

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = \frac{dx'^i}{ds} + \left\{\begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^h x'^k - \frac{1}{2}\, g^{im}(x,y)\frac{\partial\, g_{hm}(x,x')}{\partial\, x'^l}\left\{\begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^j x'^k x'^h.$$

Wegen der Homogenitätsrelation (5) verschwindet der letzte Ausdruck in dieser Gleichung; es wird deshalb

$$\frac{Dx'^i}{Ds} = \frac{dx'^i}{ds} + \left\{\begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix}\right\}_{(x,\,x')} x'^h x'^k. \tag{41}$$

Aus den Gleichungen (12) und (40) folgt sofort, daß die Krümmung der geodätischen Linien identisch verschwindet.

Ferner erlauben uns diese Formeln, eine wichtige geometrische Deutung unseres Krümmungsmaßes abzuleiten. Es sei $O(x^i_{(0)})$ ein Punkt der Kurve C mit dem Tangentenvektor $x'^i_{(0)}$, und G eine geodätische Linie, welche C im Punkte O berührt. Wir bezeichnen mit P und H zwei Punkte auf C bzw. G, so daß die Bogenlängen OP und OH entlang den entsprechenden Kurven beide gleich s sind. Sind x^i und ξ^i die Koordinaten von P und H, haben wir

$$x^i(s) = x^i_{(0)} + x'^i_{(0)}\, s + \frac{1}{2}\frac{dx'^i_{(0)}}{ds}\, s^2 + \cdots$$

$$\xi^i(s) = \xi^i_{(0)} + \xi'^i_{(0)}\, s + \frac{1}{2}\frac{d\,\xi'^i_{(0)}}{ds}\, s^2 + \cdots.$$

Da aber in O die Tangentenvektoren von C und G übereinstimmen, folgt sofort

$$x^i(s) - \xi^i(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{dx'^i_{(0)}}{ds} - \frac{d\,\xi'^i_{(0)}}{ds}\right] s^2 + \cdots.$$

Wenden wir die Gleichung (12) auf die geodätische Linie G an, erhalten wir

$$x^i(s) - \xi^i(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{dx'^i_{(0)}}{ds} + \left\{\begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix}\right\}_{(\xi_{(0)},\,\xi'_{(0)})} \xi'^h_{(0)}\,\xi'^k_{(0)}\right] s^2 + \cdots$$

oder, wegen (41)

$$x^i(s) - \xi^i(s) = \frac{s^2}{2}\frac{Dx'^i}{Ds} + \cdots. \tag{42}$$

Lassen wir jetzt s gegen Null streben; dann ist der Unterschied zwischen den Koordinaten von P und H von zweiter Größenordnung.

---

[5]) Andere Definitionen für die Krümmung sind u. a. bei CARTAN [1], TAYLOR [3], FINSLER [9] zu finden. Ein eingehender Vergleich mit unserer Definition ist in der Arbeit [8] dargestellt.

Wir können also

$$z^i(s) = x^i(s) - \xi^i(s) \tag{43}$$

setzen, und z^i als einen Vektor in $T_n(P)$ betrachten, wenn wir Größen dritter Ordnung vernachlässigen. Dann folgt aus (42) und (38), daß z^i orthogonal in Bezug auf C ist; ferner, daß

$$\lim_{s \to 0} \frac{|z|^2}{s^4} = \frac{1}{4} \left| \frac{D x'}{D s} \right|^2$$

ist. Mit Hilfe von (40′) ergibt sich schließlich

$$|HP|^2 = \frac{s^2}{2\varrho} + O(s^3). \tag{44}$$

Diese Beziehung ist analog zu der Gleichung (18) in der Arbeit [6] des Verfassers; dort ist diese Gleichung der Ansatz zu einer Begründung der Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im MINKOWSKI'schen Raum. Ein analoges Verfahren kann mittels Gleichung (44) für Kurven und Flächen im FINSLER'schen Raum durchgeführt werden. Dabei ist der „affine" Parallelismus der MINKOWSKI'schen Räume durch den oben erklärten Parallelismus zu ersetzen; die übrigen Unterschiede betreffen hauptsächlich die Abschätzung von Größenordnungen.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß auf Grund unseres kovarianten Differentials auch eine Krümmungstheorie der FINSLER'schen Räume aufgestellt werden kann. Die Ergebnisse der diesbezüglichen Untersuchungen werden in einer späteren Arbeit des Verfassers erscheinen.

Literaturverzeichnis.

CARTAN, E.

[1] Les Espaces de Finsler, Paris 1934.

BERWALD, L.

[2] Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. Math. Z. 25 (1926), 40—71.

TAYLOR, J. H.

[3] A Generalisation of Levi-Civita's Parallelism and the Frenet Formulas. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 246—264.

SYNGE, J. L.

[4] A Generalisation of the Riemannian Line-Element. Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 61—67.

CARATHÉODORY, C.

[5] Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig und Berlin, 1934.

RUND, H.

[6] Zur Begründung der Differentialgeometrie in Minkowskischen Räumen. Archiv der Mathematik, 1951.

Levi-Civita, T.

[7] Der Absolute Differentialkalkül (Übersetzung Duschek), Berlin 1928.

Rund, H.

[8] Finsler Spaces considered as generalised Minkowskian Spaces. Thesis, University of Cape Town (1950).

Finsler, P.

[9] Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Dissert. Göttingen (1918).

(Eingegangen am 5. Januar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 129—135 (1951).

Der „Kern" als Basis komplexer Vektoren.

Herrn Josef Lense zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von

Frank Löbell in München.

Kürzlich wurde in dieser Zeitschrift[1]) gezeigt, daß die Vektoren des komplexen dreidimensionalen euklidischen Raumes durch die reellen, mit komplexen Zahlen belegten, eigentlichen Geraden, kurz die „Schrauben" des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes und durch dessen „Punktstrahlen", genauer die reellen Linienelemente seiner absoluten Fläche dargestellt werden können, so zwar, daß die Operationen der Vektorrechnung einfache geometrische, zum Teil kinematische Deutungen erfahren. Die Entwicklungen wurden damals durchgeführt, ohne daß Komponenten oder, wie wir lieber sagen wollen[2]), Koordinaten für die Vektoren verwendet wurden; erst zum Schluß wurde eine spezielle Art solcher Bestimmungsstücke erwähnt. Im folgenden soll nun die damals angedeutete Absicht, weitere damit zusammenhängende Fragen bei anderer Gelegenheit zu behandeln, unter einem möglichst umfassenden Gesichtspunkt ausgeführt werden.

---

[1]) Eine reelle Deutung der komplexen Vektoren. Math. Z. **52**, S. 759 ff. (1950).

Zu der Auffassung der Bildung der Simultaninvariante (g, h) zweier binärer quadratischer Formen g und h und ihrer simultanen Kovariante $[g, h]$ als Produktbildungen wurde in der zu Beginn dieser Fußnote angeführten Arbeit auf S. 761 f., Fußnote 6), geäußert, es sei eine stillschweigende Übereinkunft unter den Mathematikern darüber festzustellen, daß eine Verknüpfung zwischen mehreren Größen derselben Art oder verschiedener Arten als Multiplikation zu bezeichnen sei, wenn für jede der Größenarten eine Addition definiert und die besagte Verknüpfung bezüglich jeder der Größen distributiv zu ihrer Addition ist. Verfasser hat kürzlich bemerkt, daß diese Übereinkunft auf Hermann Grassmann zurückzugehen scheint; dieser schreibt nämlich in Bezug auf die allgemeinste, überhaupt denkbare *Produktbildung* in seiner Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, § 10 (Ges. Werke I, 1, S. 42): „Die Beziehung der Multiplikation zur Addition haben wir dahin bestimmt, daß

$$(a+b)c = ac + bc$$
$$c(a+b) = ca + cb$$

ist; und dadurch war uns der Begriff der Multiplikation festgestellt."

[2]) Verfasser schließt sich hierbei der in v. Mangoldt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, I, Leipzig 1931, S. 243, vertretenen Auffassung an und verweist auf die Ausführungen in Duschek-Hochrainer, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, I, Wien 1948, S. 6, Fußnote 1.

1. Das allgemeinste Verfahren, *Koordinaten* für die komplexen Vektoren einzuführen, die diesen *umkehrbar eindeutig* entsprechen, muß auch hier in der Angabe einer Basis linear unabhängiger Vektoren von der Art bestehen, daß sich jeder beliebige Vektor als Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken läßt. Da unsere Vektormannigfaltigkeit drei, wenn auch komplexe Dimensionen besitzt, da ferner lineare Abhängigkeit von drei Vektoren geometrisch bedeutet, daß die geradlinigen Achsen der durch sie dargestellten Schrauben ein gemeinsames Lot haben, d. h. alle drei eine gewisse Gerade senkrecht schneiden oder, mit einem Wort, „kreuzen", so folgt: Als *Basis* können wir drei reelle, entweder eigentliche oder die absolute Fläche berührende Gerade ohne gemeinsames Lot wählen, deren jede mit einer beliebigen komplexen Zahl, ihrer „Länge", belegt ist, die, wenn die Gerade eigentlich ist, nicht den Wert Null haben darf.

Die von drei reellen, eigentlichen Geraden ohne gemeinsames Lot gebildete Figur[3]) nannte Felix Klein einen *Kern*; wir wollen es zulassen, daß beliebig viele der drei Kerngeraden in reelle unendlich ferne Punkte oder Punktstrahlen ausgeartet sind.

Wählen wir also drei linear unabhängige, komplexe „Grundvektoren" e_i $(i = 1, 2, 3)$, die die mit gewissen komplexen Längen behafteten Kanten eines Kernes darstellen; es muß dann gelten:

$$[e_1, e_2, e_3] \neq 0. \tag{1}$$

Die inneren Abmessungen des Kerns sind durch seine sechs *Invarianten*, die Skalarprodukte (e_i, e_k), $(i, k = 1, 2, 3)$, bestimmt: Sie geben, soweit sie gleiche Indizes $i = k$ haben, die Quadrate der Kantenlängen an, die beliebige endliche Größen besitzen, deren Verschwinden den Punktstrahl kennzeichnet; die übrigen, deren Indizes $i \neq k$ verschieden sind, legen zusammen mit jenen die Maße, d. h. Abstände und Winkel je zweier Kerngeraden fest.

2. Nun muß *jede Schraube* x, wie schon erwähnt, wie sich aber später von neuem zeigen wird, eindeutig in der Form[4])

$$x = x^\lambda e_\lambda \tag{2}$$

darstellbar sein. Die x^i nennen wir die *Koordinaten* der Schraube oder des Vektors x, bezogen auf den Kern der Basisvektoren e_i. Läßt man die x^i unabhängig voneinander alle endlichen komplexen Zahlen durchlaufen, so erhält man sämtliche komplexen Vektoren einschließlich des Nullvektors, dem geometrisch kein Gebilde, kinematisch die momentane Ruhe entspricht.

---

[3]) Klein, Vorl. ü. d. hypergeometrische Funktion. Berlin 1933. S. 179—196.

[4]) Über Glieder, die Paare gleicher Indizes verschiedener Stellung enthalten, werde nach der im Tensorkalkül seit Einstein üblichen Vereinbarung von 1 bis $n = 3$ addiert.

Will man für einen gegebenen Vektor x die Koordinaten x^i berechnen, so kann man das mit Hilfe der aus (2) folgenden linearen Gleichungen

$$x^\lambda (e_\lambda, e_i) = (x, e_i)$$

tun. Wir werden aber erst später einsehen können, daß die Determinante dieses Gleichungssystems vermöge (1) nicht verschwinden kann.

3. Eine einfachere Berechnungsart für die x^i erhalten wir nach dem Vorbild der uns gewohnten Vektorrechnung durch Einführung der zur Basis der e_i *reziproken Basis*, die aus den Vektoren e^i besteht, die den Gleichungen [5])

$$(e_i, e^k) = \delta_i^k \tag{3}$$

genügen; geometrisch besagen diese: Die Achse der Schraube e^i kreuzt die der Schrauben e_k mit von i verschiedenen Indizes k; ihre Länge ist durch den Vektor e_i bestimmt. Die Vektoren e^i der reziproken Basis stellen also die drei, mit gewissen komplexen Längen versehenen gemeinsamen Lote der Seiten des ursprünglichen Kerns der e_i dar; sie bilden, in der Ausdrucksweise von Klein, dessen „Polarkern". Zwei zueinander polare Kerne verbinden sich zu einem „Doppelkern", einem im allgemeinen windschiefen, rechtwinkligen Sechsseit [3]).

Man schließt auf eine Weise, die der aus der Vektorrechnung bekannten analog ist, wobei jedoch bei allen Überlegungen geometrischer Natur auf die Unterschiede in der Bedeutung der Größen wohl zu achten ist, daß

$$e^i = [e_{i+1}, e_{i-1}] : [e_1, e_2, e_3] \tag{4}$$

ist, wobei die Indizes auf ihre kleinsten positiven Reste mod 3 reduziert zu denken sind. Auch die Vektoren e^i sind linear unabhängig; rechnerisch erkennt man dies, wenn man auf die übliche Art aus (4) durch Anwendung der Zerlegungsformel [6])

$$[e^{i+1}, e^{i-1}] = e_i : [e_1, e_2, e_3]$$

und hieraus

$$[e^1, e^2, e^3] = 1 : [e_1, e_2, e_3] \neq 0 \tag{1'}$$

ableitet.

---

[5]) Auf der rechten Seite der Gleichung steht das Kronecker'sche Symbol.

[6]) Siehe die in Fußnote 1) genannte Arbeit S. 762. Der dort in Fußnote 7) erwähnte Umstand, daß die *Zerlegungsformel* erst gilt, nachdem die In- und Kovarianten mit geeignet aufeinander abgestimmten Zahlenfaktoren versehen sind, wirft ein bezeichnendes Licht auf die bekannte Tatsache, daß in der reellen Vektorrechnung der allgemeine Bau dieser Formel bis auf einen Zahlenfaktor leicht zu finden ist, die Bestimmung dieser Zahl aber unverhältnismäßig große Mühe bereitet. Vgl. etwa M. Lagally, Vorl. ü. Vektorrechnung, Leipzig 1945, S. 31 f.

Daß sich die e_i durch die e^i ebenso ausdrücken wie die e^i durch die e_i, wie schon aus der Symmetrie der Beziehungen (3) hervorgeht, die die Gegenseitigkeit der Polaritätsbeziehung zum Ausdruck bringen, sei nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Aus (2) finden wir jetzt durch skalare Multiplikation mit e^i

$$x^i = (x, e^i). \tag{5}$$

Nunmehr wollen wir, unabhängig von unseren bisherigen Überlegungen, rein rechnerisch verifizieren, daß (5) in der Tat eine Lösung von (2) ist, und zwar wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren die einzige: nach (4) und vermöge der Zerlegungsformel wird

$$\begin{aligned} x &= x + e_3(x, e^3) - e_3(x, [e_1, e_2]) : [e_1, e_2, e_3] \\ &= -[[e_1, e_2], [e_3, x]] : [e_1, e_2, e_3] + e_3(x, e^3) \\ &= (e_1[e_2, e_3, x] - e_2[e_1, e_3, x]) : [e_1, e_2, e_3] + e_3(x, e^3) = e_\lambda(x, e^\lambda). \end{aligned}$$

Der Vektor x kann ebenso wie mittels seiner „kontravarianten" Koordinaten x^i auf die ursprüngliche Basis der e_i mit Hilfe seiner „kovarianten" Koordinaten x_i auf die reziproke Basis der e^i bezogen werden[7]; es ist

$$x = x_\lambda e^\lambda, \tag{2'}$$

wobei die x_i den Gleichungen $x_\lambda(e^\lambda, e^i) = (x, e^i)$ oder einfach

$$x_i = (x, e_i) \tag{5'}$$

genügen.

Aus der Einzigkeit der Lösungen (5) von (2) und (5') von (2') schließen wir, daß die Determinanten der Gleichungssysteme (2) und (2'),

$$|(e_i, e_k)| \quad \text{und} \quad |(e^i, e^k)|,$$

von Null verschieden sind, was sich später noch einmal auf anderem Wege erweisen wird.

4. Als Ausdrücke für das *skalare Produkt* von zwei beliebigen komplexen Vektoren x und y in ihren Koordinaten erhalten wir nach (2) und (2'), wenn wir die üblichen Bezeichnungen

$$(e_i, e_k) = g_{ik}, \quad (e^i, e^k) = g^{ik}, \quad (e_i, e^k) = g_i^k = \delta_i^k \tag{6}$$

auch in der verallgemeinerten Bedeutung benützen:

$$(x, y) = g_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu = g^{\lambda\mu} x_\lambda y_\mu = x_\lambda y^\lambda = x^\lambda y_\lambda. \tag{7}$$

Ebenso bekannt, was den formalen Bau anbelangt, sind die drei Ausdrücke für das, die Schraubungsgröße kennzeichnende Quadrat der komplexen Länge von x: Ternäre quadratische Formen, über die

[7] Über die Bezeichnungen ko- und kontravariant, ko- und kontragredient hat sich G. Hessenberg in den Math. Annalen 78 (1918), S. 196, Fußnote *) ausgesprochen.

wir aber im Bereich des Komplexen nicht mehr aussagen können, als daß sie nicht singulär sind, weil $|g_{ik}|$, $|g_i^k|$ und $|g^{ik}| \neq 0$ sind.

Wir wollen aber auch hier von dem komplexen symmetrischen *Maßtensor* mit den kovarianten, gemischten oder kontravarianten Koordinaten g_{ik}, g_i^k oder g^{ik} sprechen, der wegen $g_i^k = \delta_i^k$ die Bedeutung des Einheitstensors hat, daher den Übergang von den kovarianten zu den kontravarianten Koordinaten eines Vektors oder allgemein eines Tensors und umgekehrt vermittelt: Nach (5), (2) und (6) gilt

$$x_i = g_{i\lambda} x^\lambda, \quad x^i = g^{i\lambda} x_\lambda. \tag{8}$$

5. Jetzt können wir den Zusammenhang des Wertes der Determinante $|g_{ik}|$ mit dem des dreifachen Produktes der Basisvektoren (1) herstellen. Da das *vektorielle Produkt* der Vektoren x und y sich zu

$$[x, y] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} : [e_1, e_2, e_3] = \begin{vmatrix} e^1 & e^2 & e^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} : [e^1, e^2, e^3] \tag{9}$$

ergibt, so wird das *dreifache Produkt* von beliebigen Vektoren x, y, z

$$[x, y, z] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} : [e_1, e_2, e_3] = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} : [e^1, e^2, e^3]. \tag{10}$$

Multiplizieren wir zwei solche Produkte in verschiedenen der beiden Darstellungen (10) miteinander und berücksichtigen dabei die dritte oder vierte der Formen (7) sowie (1'), so finden wir die Gültigkeit eines bekannten Satzes bestätigt, der aber hier in einer neuen Bedeutung erscheint:

$$[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = \begin{vmatrix} (x, x') & (x, y') & (x, z') \\ (y, x') & (y, y') & (y, z') \\ (z, x') & (z, y') & (z, z') \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Aus ihm folgt, daß die Determinante des Maßtensors, die GRAM'sche Determinante der Basisvektoren, den Wert hat

$$g = |g_{ik}| = [e_1, e_2, e_3]^2 \neq 0. \tag{12}$$

6. Viele Rechnungen werden natürlich auch hier besonders bequem, wenn man eine Basis zu Grunde legt, die mit ihrer reziproken übereinstimmt. Es muß dann der Kern mit seinem Polarkern zusammenfallen: Jeder der Vektoren e_i muß die beiden anderen e_{i+1}, e_{i-1} kreuzen, d. h. die drei Achsen der Schrauben e_i müssen sich gegenseitig senkrecht schneiden; außerdem müssen sie Einheitsvektoren sein. Es gelten deshalb die gewöhnlichen *Orthogonalitätsbedingungen* für ein System von drei senkrechten Einheitsvektoren, mit deren Hilfe wir demnach die Beziehungen der Kongruenz auch in der Geradenmannigfaltigkeit des hyperbolischen Raumes beherrschen.

7. Einen Sonderfall wollen wir besonders hervorheben, zu dessen Betrachtung man bisher in der analytischen Geometrie keinen Anlaß fand, nämlich den einer Basis von drei verschiedenen, sonst aber beliebigen *isotropen Vektoren* f_i, d. h. reellen Linienelementen der absoluten Fläche; solche Vektorentripel sind nämlich stets linear unabhängig, wie man sich am Beispiel der durch die binären quadratischen Formen $\eta^2, \xi^2, \xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2$ in der ursprünglichen KLEIN'schen Art dargestellten Punktstrahlen ∞, 0, 1 klar machen mag[1]), einem Tripel von Minimalvektoren, dem alle Tripel untereinander verschiedener derartiger Vektoren im nichteuklidischen Sinn kongruent sind, was ja nur eine Folge des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie ist.

Die zu den f_i reziproken Vektoren f^i werden durch die Verbindungsgeraden der Punktstrahlen f_i dargestellt. Es wird

$$(f^1, f^1) = ([f_2, f_3], [f_2, f_3]) : [f_1, f_2, f_3]^2 = ((f_2, f_2)(f_3, f_3) - (f_2, f_3)^2) : [f_1, f_2, f_3]^2$$

oder, da nach (11)

$$[f_1, f_2, f_3]^2 = |(f_i, f_k)| = 2(f_2, f_3)(f_3, f_1)(f_1, f_2)$$

ist,

$$(f^1, f^1) = -(f_2, f_3) : 2(f_3, f_1)(f_1, f_2) \quad \text{usw.}$$

Ähnlich finden wir

$$(f^2, f^3) = 1 : 2(f_2, f_3) \quad \text{usw.}$$

Da $[f_1, f_2, f_3]$, wie schon gesagt, nicht null ist, also keine der Zahlen (f_i, f_k), wenn $i \neq k$, verschwinden kann, so gibt es drei, übrigens bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte Zahlen ϱ, σ, τ, durch deren Multiplikation mit f_1, f_2, f_3 wir neue, immer noch isotrope Basisvektoren ϱf_1, σf_2, τf_3 bekommen, für die, wenn wir für sie die alten Bezeichnungen f_1, f_2, f_3 beibehalten, gilt:

$$(f_2, f_3) = (f_3, f_1) = (f_1, f_2) = \tfrac{1}{2},$$

so daß für unsere Basis

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0, \quad g_{23} = g_{31} = g_{12} = \tfrac{1}{2}, \text{ also } |g_{ik}| = \tfrac{1}{4}$$

wird. Die Unbestimmtheit des Vorzeichens der drei Zahlen ϱ, σ, τ ermöglicht es uns noch, über das Vorzeichen von $[f_1, f_2, f_3] = \sqrt{g}$ nach Belieben zu verfügen; wir setzen

$$[f_1, f_2, f_3] = \tfrac{1}{2}.$$

Aus den obigen Ergebnissen oder aus $g^{i\lambda} g_{\lambda k} = g^i_k$ finden wir ferner

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1, \quad g^{23} = g^{31} = g^{12} = 1, \text{ also } |g^{ik}| = 4.$$

Folglich wird wegen $f^i = g^{i\lambda} f_\lambda$

$$f^1 = -f_1 + f_2 + f_3, \quad f^2 = f_1 - f_2 + f_3, \quad f^3 = f_1 + f_2 - f_3,$$

mithin, aber auch vermöge $f_i = g_{i\lambda} f^\lambda$

$$f_1 = (f^2 + f^3) : 2, \quad f_2 = (f^3 + f^1) : 2, \quad f_3 = (f^1 + f^2) : 2.$$

Das komplexe Längenquadrat des Vektors x wird

$$(x, x) = x^3 x^3 + x^2 x^1 + x^1 x^2 = 2 x_3 x_3 + 2 x_3 x_1 + 2 x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 .$$

Sind i, j, $\mathfrak{k}$ drei reelle, zu je zweien aufeinander senkrechte Einheitsvektoren, so bilden, mit i als imaginärer Einheit,

$$f_1 = (-i\,\mathfrak{i} + \mathfrak{j}) : 2, \quad f_2 = (i\,\mathfrak{i} + \mathfrak{j}) : 2, \quad f_3 = \mathfrak{j} + i\,\mathfrak{k}$$

ein Beispiel einer Basis von Minimalvektoren, wie wir sie soeben allgemein betrachtet haben, das es erlaubt, ohne Mühe alle abgeleiteten Beziehungen nachzuprüfen.

8. Schließlich möge noch eine *Realitätsfrage* gestreift werden: Was stellen, zunächst im Fall einer Basis von Einheitsvektoren, deren Achsen sich in einem Punkt O kreuzen (wie wir sie im Abschnitt 6 besprachen), diejenigen Vektoren x dar, deren Koordinaten $x_i = x^i$ sämtlich reell sind?

Bedeuten α, β, γ die Maße der Achse von x mit den orthogonalen Koordinatenachsen, so folgt aus der Realität von $\cos \alpha = x_1 : \sqrt{(x, x)}$ usw., wie man durch Zerlegen von $\cos \alpha = \cos (\alpha_1 + i \alpha_2)$ in seinen reellen und imaginären Teil erkennen kann, daß entweder der Imaginärteil von α, d. h. der kürzeste Abstand α_2 der Geraden x und der ersten Achse null oder der Realteil von α, d. h. der Winkel α_1 zwischen diesen beiden Geraden, ein ganzzahliges Vielfaches von π sein muß; das bedeutet: Die Achse von x liegt mit der ersten Koordinatenachse, ebenso aber auch mit den beiden anderen je in einer Ebene, sie muß folglich durch den Schnittpunkt O der drei Achsen gehen.

Wir finden also die gleichen Verhältnisse vor wie im reellen euklidischen Raum unter der Voraussetzung, daß wir uns auf die Betrachtung des Bündels der an einen Punkt O gehefteten Vektoren beschränken; in diesem Sinne können wir sagen, daß die gewöhnliche Vektorrechnung in der hier behandelten komplexen enthalten ist.

(Eingegangen am 25. Januar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 136—140 (1951).

Hilbert Rings and the Hilbert Nullstellensatz[1]).

By

Oscar Goldman in Cambridge, Mass. (USA.).

The HILBERT Nullstellensatz, as originally stated, asserts that if a polynomial $f(x_1, \ldots, x_n)$ vanishes at every zero of an ideal $\mathfrak{A}$ in $k[x_1, \ldots, x_n]$, then some power of f is in $\mathfrak{A}$. On the basis of this result one can establish a one-to-one correspondence between the maximal ideals in $k[x_1, \ldots, x_n]$ and the points in the affine n-dimensional space over the algebraic closure of k. Using this correspondence, the Nullstellensatz can be re-interpreted to state that the intersection of all maximal ideals which contain $\mathfrak{A}$ is the radical of $\mathfrak{A}$, i. e., the ideal composed of all polynomials some power of which is in $\mathfrak{A}$. Should one form the factor ring $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{A}$, then it is evident that in this ring the two notions of radical: the sum of the nilpotent ideals, and the intersection of the maximal ideals, coincide. Thus, the polynomial rings furnish an example of a class of rings R (commutative and with a unit element) having the property that in $R/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ an arbitrary ideal in R, the two notions of radical coincide. As will be seen below, this fact implies already the HILBERT Nullstellensatz.

Since in an arbitrary ring R, the radical of an ideal $\mathfrak{A}$ is the intersection of prime ideals, it is evident that above property is the same as stating that every prime ideal is the intersection of maximal ideals. Because this fact in polynomial rings is the basis upon which the truth of the HILBERT Nullstellensatz rests, we shall call a *HILBERT ring* any commutative ring whith a unit element in which every prime ideal is the intersection of maximal ideals. By the remarks above we have:

Theorem 1: *A ring R is a HILBERT ring if, and only if, for every ideal $\mathfrak{A}$ in R, the two notions of radical coincide in $R/\mathfrak{A}$.*

It is an immediate consequence of the definition that a homomorphic image of a HILBERT ring is also one. Namely:

Theorem 2: *If R is a HILBERT ring, and $\mathfrak{A}$ an ideal in R, then $R/\mathfrak{A}$ is also a HILBERT ring.*

---

[1]) The material presented in this paper arose from discussion with I. S. COHEN. The author wishes to thank Dr. COHEN for his valuable suggestions.

During the recent International Mathematical Congress, W. KRULL presented, without proof, some ideas similar to those contained here. However, these results were found prior to the Congress, and without the knowledge that Professor KRULL was interested in these questions.

That the class of rings with which we are concerned is directly related to the objects dealt with in algebraic geometry is confirmed by the following result:

Theorem 3: *If R is a ring, x transcendental over R, then $R[x]$ is a* HILBERT *ring simultaneously with R.*

Suppose first that $R[x]$ is a HILBERT ring. Let $\mathfrak{P}$ be a prime ideal in R, and a an element of R which is not in $\mathfrak{P}$. We must show the existence of a maximal ideal in R containing $\mathfrak{P}$ and not containing a. The ideal $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}R[x] + xR[x]$, in $R[x]$, consists of all polynomials whose constant term is in $\mathfrak{P}$. Thus, $\mathfrak{Q}$ is a prime ideal, and a is not in $\mathfrak{Q}$. Because $R[x]$ is a HILBERT ring there is a maximal ideal $\mathfrak{M}$ containing $\mathfrak{Q}$, but not containing a. Because $x \in \mathfrak{M}$, we must have $R \cap \mathfrak{M}$ a maximal ideal in R. Namely, the field $R[x]/\mathfrak{M}$ is generated by the residue class of x, which is zero, and the elements of $R/R \cap \mathfrak{M}$. Thus, $R/R \cap \mathfrak{M}$ is a field, $R \cap \mathfrak{M}$ is a maximal ideal which contains $\mathfrak{P}$ but does not contain a. R is therefore a HILBERT ring.

Assume now that R is a HILBERT ring. Let $\mathfrak{P}$ be a prime ideal in $R[x]$; form $\mathfrak{Q} = R \cap \mathfrak{P}$, and $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{Q}R[x]$. Then, $\mathfrak{P}_0$ is a prime ideal in $R[x]$, and $\mathfrak{P}_0 \leq \mathfrak{P}$. The factor ring $R[x]/\mathfrak{P}_0$ is isomorphic with the ring $R/\mathfrak{Q}[x]$. If we set $R_1 = R/\mathfrak{Q}$, then R_1 is a HILBERT integral domain, and $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$ is a prime ideal in $R_1[x]$ which is such that $\mathfrak{P}_1 \cap R_1 = \{0\}$. It is sufficient to prove that $\mathfrak{P}_1$ is the intersection of maximal ideals in $R_1[x]$. We are thus reduced to the case where the HILBERT ring R is an integral domain, and we must prove that every prime ideal $\mathfrak{P}$ in $R[x]$, for which $R \cap \mathfrak{P} = \{0\}$, is the intersection of maximal ideals.

We first dispose of the zero ideal. If $f(x)$ represents a polynomial in $R[x]$, which is irreducible over the quotient field of R, the ideal generated by $f(x)$ is a prime ideal having only 0 in common with R. Furthermore, only 0 belongs to the prime ideals generated by all these irreducible $f(x)$. Thus, the zero ideal in $R[x]$ will be the intersection of maximal ideals, when it is proved that every non-zero prime ideal $\mathfrak{P}$ in $R[x]$, for which $\mathfrak{P} \cap R = \{0\}$, is the intersection of maximal ideals.

Let now $\mathfrak{P}$ be a non-zero prime ideal in $R[x]$ such that $\mathfrak{P} \cap R = \{0\}$, and assume that $\mathfrak{P}$ is not the intersection of maximal ideals — let $g(x)$ belong to all maximal ideals containing $\mathfrak{P}$, but $g(x)$ itself is not in $\mathfrak{P}$. Let $f(x)$ be a non-zero polynomial in $\mathfrak{P}$ whose degree is smallest among all polynomials in $\mathfrak{P}$, and let a be the leading coefficient of $f(x)$; a is itself not in $\mathfrak{P}$. The polynomial $f(x)$ has two properties of importance, consequences of the manner in which it was chosen: $f(x)$ is irreducible over the quotient field of R, and every element of $\mathfrak{P}$, when multiplied by a power of a, is divisible by $f(x)$.

Because $g(x) \overline{\in} \mathfrak{P}$, the irreducibility of $f(x)$ asserts the existence of a non-zero $b \in R$ such that $b \in \mathfrak{P} + g(x)R[x]$. Since $g(x)$ is contained in

every maximal ideal which contains $\mathfrak{P}$, it follows that b is contained in every maximal ideal which contains $\mathfrak{P}$; and, since $\mathfrak{P} \cap R = \{0\}$, $b \bar{\in} \mathfrak{P}$.

Since R is a HILBERT ring, and an integral domain, there is a maximal ideal $\mathfrak{M}_0$ in R which does not contain a. For such an ideal, $\mathfrak{M}_0 R[x] + \mathfrak{P}$ is not all of $R[x]$. For, if it were, we would have $1 = p(x) + m(x)$, $p(x) \in \mathfrak{P}$, $m(x) \in \mathfrak{M}_0 R[x]$. For a suitable power n, we have $a^n p(x)$ divisible by $f(x)$, i. e., $a^n = h(x) f(x) + r(x)$, $r(x) \in \mathfrak{M}_0 R[x]$. If we ignore temporarily the origin of this equation, we may clearly suppose that no coefficient of $h(x)$ is in $\mathfrak{M}_0$, for any such coefficient could be absorbed by $r(x)$. Furthermore, $h(x)$ cannot be zero since $a \bar{\in} \mathfrak{M}_0$. An impossible conclusion is then arrived at upon examination of the highest degree terms in the equation. Thus $\mathfrak{M}_0 R[x] + \mathfrak{P}$ is a proper ideal.

Let now $\mathfrak{M}$ be a maximal ideal in $R[x]$ which contains $\mathfrak{M}_0 R[x] + \mathfrak{P}$; $\mathfrak{M} \cap R$ is not R and contains the maximal ideal $\mathfrak{M}_0$, so that $\mathfrak{M} \cap R = \mathfrak{M}_0$. Furthermore, $\mathfrak{M}$ contains $\mathfrak{P}$, so that it contains b, and therefore $b \in \mathfrak{M}_0$. We arrive thus to the conclusion that b is contained in every maximal ideal in R which does not contain a — or, that ab is contained in every maximal ideal in R. This cannot be the case in view of the fact that $ab \neq 0$, and R is a HILBERT integral domain. This completes the proof of the theorem.

Corollary: *If k is a field, then $k[x_1, \ldots, x_n]$ is a HILBERT ring.*

A field is certainly a HILBERT ring; the application of Theorem 3 n times gives the desired result.

It should be observed that this conclusion about the ring of polynomials, which is a consequence of the Nullstellensatz as observed in the introduction, was obtained directly, without the use of the Nullstellensatz.

A characteristic property of HILBERT rings is given by the following:

Theorem 4: *A ring R is a HILBERT ring if, and only if, every non-maximal prime ideal in R is the intersection of properly larger prime ideals.*

If R is a HILBERT ring, the above property certainly holds. For the converse, suppose that $\mathfrak{P}$ is a prime ideal, not a maximal ideal, and suppose that $a \in R$ is not in $\mathfrak{P}$. Form the set of all prime ideals which contain $\mathfrak{P}$ but not a — $\mathfrak{P}$ is in this set. It is clear that this set has the inductive order property required by ZORN's Lemma — let $\mathfrak{Q}$ be a maximal element of this set. $\mathfrak{Q}$ must be a maximal ideal. Otherwise, $\mathfrak{Q}$ is the intersection of properly larger prime ideals. Since $\mathfrak{Q}$ is maximal in the above set of prime ideals, all properly larger prime ideals must contain a. It would follow from this that a is in $\mathfrak{Q}$. Because this is not the case, we may conclude that $\mathfrak{Q}$ is indeed a maximal ideal. We have therefore proved that the intersection of the maximal ideals which contain $\mathfrak{P}$ is $\mathfrak{P}$ itself, and so R is a HILBERT ring.

An important characteristic property of HILBERT rings is the following:

Theorem 5: *A ring R is a* HILBERT *ring if, and only if, every maximal ideal in $R[x]$ contracts in R to a maximal ideal.*

Suppose first that every maximal ideal in $R[x]$ contracts to a maximal ideal in R. Let $\mathfrak{P}$ be a prime ideal in R, a an element in R, not in $\mathfrak{P}$; we shall prove the existence of a maximal ideal in R which contains $\mathfrak{P}$, but does not contain a. Namely, $\mathfrak{P}R[x] + (ax-1)R[x]$ is not all of $R[x]$. For, if it were, we would have $1 = f(x)(ax-1) + g(x)$, $g(x) \in \mathfrak{P}$, $f(x) \in R[x]$. We may certainly assume that no coefficient of $f(x)$ is in $\mathfrak{P}$, and that $f(x) \neq 0$. But then, if c is the leading coefficient of $f(x)$, we have $ac \in \mathfrak{P}$, $a \bar{\in} \mathfrak{P}$. This nonsensical conclusion shows that $\mathfrak{P}R[x] + (ax-1)R[x]$ is a proper ideal in $R[x]$. Let then $\mathfrak{M}$ be a maximal ideal in $R[x]$ containing $\mathfrak{P}R[x] + (ax-1)R[x]$. Since $ax - 1 \in \mathfrak{M}$, we must have $a \bar{\in} \mathfrak{M}$. Then, because of the property assumed about the maximal ideals in $R[x]$, we find that $R \cap \mathfrak{M}$ is a maximal ideal in R, containing $\mathfrak{P}$, but not containing a. Thus R is a HILBERT ring.

Suppose now that R is a HILBERT ring, but it is not true that every maximal ideal in $R[x]$ contracts to a maximal ideal in R. Let $\mathfrak{M}$ be a maximal ideal in $R[x]$ such that $\mathfrak{P}_0 = R \cap \mathfrak{M}$ is not a maximal ideal in R. Form $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 R[x]$, and $R[x]/\mathfrak{P} = R/\mathfrak{P}_0[x]$. Then, $R_1 = R/\mathfrak{P}_0$ is a HILBERT integral domain, but not a field, while $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}/\mathfrak{P}$ is a maximal ideal in $R_1[x]$ which is such that $R_1 \cap \mathfrak{M}_1 = \{0\}$. We are thus reduced to the case where R is a HILBERT integral domain, not a field, $\mathfrak{M}$ a maximal ideal in $R[x]$ for which $R \cap \mathfrak{M} = \{0\}$.

$\mathfrak{M}$ cannot be the zero ideal, for that would mean that $R[x]$ is a field. Let now $f(x)$ be a non-zero polynomial in $\mathfrak{M}$ whose degree is least among the degrees of the polynomials in $\mathfrak{M}$, and let a be the leading coefficent of $f(x)$.

Let now $\mathfrak{M}_0$ be a maximal ideal in R. Since R is not a field, $\mathfrak{M}_0$ is not the zero ideal, whence $\mathfrak{M}_0$ not in $\mathfrak{M}$. Let b be an element of $\mathfrak{M}_0$, not in $\mathfrak{M}$. Then, we have $1 = bg(x) + h(x)$, $h(x) \in \mathfrak{M}$, $g(x) \in R[x]$. We can apply the division algorithm to $g(x)$ and $f(x)$: there is an integer n, polynomials $s(x)$, $r(x)$ in $R[x]$, with $a^n g(x) = s(x) f(x) + r(x)$, and the degree of $r(x)$ is less than that of $f(x)$. This gives $a^n = br(x) + bs(x)f(x) + h(x)$, from which follows $a^n - br(x) \in \mathfrak{M}$. However, the degree of $a^n - br(x)$ is less than that of $f(x)$, so that $a^n - br(x) = 0$, $r(x) \in R$, and $a^n \in \mathfrak{M}_0$ or $a \in \mathfrak{M}_0$. Thus, a belongs to every maximal ideal in R, an impossibility in view of the fact that R is a HILBERT integral domain. This completes the proof of the theorem.

Applying this to the case of the polynomial ring, we find:

Corollary: *If k is a field, and $\mathfrak{M}$ is a maximal ideal in $k[x_1, \ldots, x_n]$, then $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{M}$ is algebraic over k.*

We prove this by induction on n, observing first that the case $n = 1$ is trivial. Assuming the corollary proved for polynomials of

fewer than n indeterminates, let $R = k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. By the corollary to Theorem 3, R is a HILBERT ring, so that $\mathfrak{M}_0 = R \cap \mathfrak{M}$ is a maximal ideal in R, and therefore by the inductive assumption $R/\mathfrak{M}_0$ is algebraic over k. If we form $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_0 R[x_n]$, then $R[x_n]/\mathfrak{P}$ is isomorphic with $R/\mathfrak{M}_0[x_n]$, and $\mathfrak{M}/\mathfrak{P}$ is a maximal ideal in $R/\mathfrak{M}_0[x_n]$. But then $(R/\mathfrak{M}_0[x_n])/(\mathfrak{M}/\mathfrak{P})$ is algebraic over $R/\mathfrak{M}_0$, and therefore algebraic over k. However, $(R/\mathfrak{M}_0[x_n])/(\mathfrak{M}/\mathfrak{P})$ is isomorphic with $R[x_n]/\mathfrak{M}$, proving thereby that $k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{M}$ is algebraic over k.

From this corollary, which is a version of the Nullstellensatz, follows the one-to-one correspondence between the maximal ideals in $k[x_1, \ldots, x_n]$ and the points in the n-dimensional affine space over the algebraic closure of k. If now $\mathfrak{A}$ is any ideal in $k[x_1, \ldots, x_n]$, and $f(x)$ a polynomial in $k[x_1, \ldots, x_n]$ which vanishes at every zero of $\mathfrak{A}$, then, by the preceding remark, $f(x)$ belongs to every maximal ideal which contains $\mathfrak{A}$. Since $k[x_1, \ldots, x_n]$ is a HILBERT ring, it follows that $f(x)$ is in the radical of $\mathfrak{A}$, i. e., some power of $f(x)$ is in $\mathfrak{A}$.

Theorem 5 has, for polynomial ideals, a simple geometric interpretation. If $\mathfrak{A}$ is an ideal in $k[x_1, \ldots, x_n]$ corresponding to a variety V, then to $\mathfrak{A} \cap k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ corresponds the projection of V along the x_n-axis. If now $\mathfrak{A}$ is maximal, so that V is a point, then the theorem referred to asserts that the projection of V is also a point.

(Eingegangen am 1. Dezember 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 141—159 (1951).

Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation.

Von

Gerrit Bol in Freiburg i. Br.

Bei vielen Fragen der Differentialgeometrie treten Größen auf, die nur bis auf eine Umnormung festgelegt sind, man denke etwa an den Fundamentaltensor einer WEYL'schen Geometrie, oder an den Koordinatenvektor

$$\mathfrak{x}(u, v) = \{x_0(u, v), x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)\} \tag{1}$$

der Punkte einer Fläche im projektiven Raum, bei denen noch Umnormungen der Form

$$\mathfrak{x}^*(u, v) = \varrho(u, v)\,\mathfrak{x}(u, v) \tag{2}$$

zugelassen sind.

Solche Umnormungsmöglichkeiten stören besonders, wenn mehrfach differenziert werden muß; dann gelten für höhere Ableitungen von $\mathfrak{x}(u, v)$ bei den Umnormungen (2) Transformationsformeln, in denen die Ableitungen von ϱ bis zur gleichen Ordnung eingehen. Diesen Ableitungen ist daher kein geometrisch invarianter Sinn beizulegen.

Man kann diesen Mangel dadurch beseitigen, daß die Normierung irgendwie invariant fixiert wird, etwa indem eine Größe zu 1 normiert wird. Es zeigt sich aber, daß dieses Verfahren doch nicht immer das geometrisch zweckmäßigste ist. Statt dessen lohnt es sich in vielen Fällen, abgewandelte „halbinvariante" Differentiationsverfahren zu verwenden, die sich dadurch auszeichnen, daß die mit ihnen gebildeten Ableitungen bei Umnormungen ebenfalls nur mit einer Potenz des Normungsfaktors multipliziert werden, während dessen Ableitungen sozusagen automatisch eliminiert werden.

Insbesondere in der projektiven Flächentheorie haben wir in den letzten Jahren mit Erfolg derartige Verfahren angewendet, zunächst unter Verwendung von Asymptotenlinienparametern [1]), später auch bei beliebigen Parametern unter Verwendung geeigneter affiner Übertragungen [2]).

---

[1]) Über einen neuen Aufbau der projektiven Flächentheorie, Comm. Math. Helv. **18**, S. 129—153 (1946). Die Arbeit wird weiterhin mit C. H. zitiert.

[2]) Math. Annalen **122**, 279—295 (1950).

Neuerdings hat nun Herr G. Reeb gezeigt, daß man entsprechende Methoden auch beim Kalkül der alternierenden Differentialformen von E. Cartan mit Erfolg verwenden kann.

Wir wollen hier zunächst den Grundgedanken dieses Verfahrens demonstrieren und uns dann mit der Anwendung auf die projektive Flächentheorie beschäftigen. Man gelangt dabei zu einem sehr übersichtlichen und eleganten Formelapparat, der älteren Theorien gegenüber erhebliche Vereinfachungen aufweist, und aus dem sich u. a. die oben erwähnte halbinvariante Theorie in Asymptotenlinienparametern fast zwangsläufig durch Spezialisierung ergibt.

Es besteht daher wohl kein Zweifel, daß das Verfahren von Reeb sich auch auf andere Probleme mit Erfolg wird anwenden lassen.

§ 1.

Halbinvariante äußere Differentiation.

Das Verfahren, das wir hier erörtern wollen, läßt sich stets dann anwenden, wenn die Größen und alternierende Differentialformen, die betrachtet werden, einer Gruppe von Umnormungen unterliegen. Jede der vorkommenden Größen wird bei einer solchen Unnormung mit einer von Null verschiedenen Umnormungsfunktion ϱ multipliziert.

Ein Skalar oder eine Form ω, für die bei diesen Umnormungen die Transformationsformel

$$\omega^* = \varrho^c \omega \qquad c = \text{konst.} \tag{1. 1}$$

gilt, nennen wir halbinvariant vom Gewicht c. Im Beispiel der Einleitung ist also $\mathfrak{x}$ halbinvariant vom Gewicht 1.

Es sei nun außerdem eine Pfaff'sche Form π gegeben, für die bei unseren Umnormungen die Transformationsformel

$$\pi^* = \pi - d(\log \varrho) \tag{1. 2}$$

gilt. Dann wollen wir die halbinvariante äußere Ableitung der Form oder des Skalares ω mit dem Gewicht c erklären durch

$$\bar{d}\omega = d\omega + c\pi \wedge \omega \text{ [3]}. \tag{1. 3}$$

$\bar{d}\omega$ ist wieder halbinvariant vom Gewicht c. Denn aus (1. 1) folgt

$$d\omega^* = \varrho^c d\omega + c\varrho^c d(\log \varrho)$$

und daher nach (1. 2)

$$\bar{d}\omega^* = d\omega^* + c\pi^* \wedge \omega^* = \varrho^c (d\omega + c\pi \wedge \omega) = \varrho^c \bar{d}\omega.$$

Für dieses Ableitungsverfahren gelten, wie man leicht nachprüft, die üblichen Regeln; sind ω_1 und ω_2 halbinvariante Formen oder

[3] Durch das Zeichen $\wedge$ wird das alternierende Produkt zweier Formen angedeutet.

Skalare, und hat ω_1 die Stufe q, so ist

$$\bar{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \bar{d}\,\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^q \omega_1 \wedge \bar{d}\,\omega_2 \tag{1. 4}$$

und wenn ω_1 und ω_2 das gleiche Gewicht haben, ist außerdem

$$\bar{d}(\omega_1 + \omega_2) = \bar{d}\,\omega_1 + \bar{d}\,\omega_2. \tag{1. 5}$$

Dagegen ist

$$\bar{d}(\bar{d}\,\omega) = d\,(d\,\omega + c\,\pi \wedge \omega) + c\,\pi \wedge (d\,\omega + c\,\pi \wedge \omega),$$

also nach (1. 3) und wegen $d(d\,\omega) = 0$

$$\bar{d}(\bar{d}\,\omega) = c\,d\,\pi \wedge \omega. \tag{1. 6}$$

Zweimalige Ableitung führt hier also nicht auf 0, wie bei der gewöhnlichen äußeren Ableitung. Das ist vielmehr genau dann für jedes ω der Fall, wenn

$$d\,\pi = 0, \tag{1. 7}$$

also wenn π ein totales Differential ist.

Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, daß sich nach (1. 2) genau in diesem und nur in diesem Fall eine Umnormung angeben läßt, bei der $\pi^* = 0$ wird. Das zugehörige ϱ ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig festgelegt. Nach dieser Normung reduziert sich die halbvariante äußere Ableitung auf die gewöhnliche. Falls (1. 7) gilt, so gibt es also in der Tat eine vernünftige invariante Festlegung der Normierung. Im anderen Falle aber stellt sich eine solche immer als mehr oder weniger künstlich heraus.

Zu beachten ist, daß nach (1. 2)

$$d\,\pi^* = d\,\pi. \tag{1. 8}$$

$d\,\pi$ ist also halbinvariant vom Gewicht 0, oder wie wir auch sagen, absolut invariant.

Offenbar führt der oben eingeführte Kalkül nicht aus dem Bereich der halbinvarianten Formen hinaus. Gerade auf diesem Umstand beruht seine vielseitige Verwendbarkeit.

Natürlich drängt sich die Frage auf, woher man in jedem einzelnen Fall eine Form π mit dem gewünschten Transformationsverhalten (1, 2) nehmen soll. Eine solche Form ist aber fast stets durch das behandelte geometrische Problem sinnvoll erklärt.

Bei einer Weyl'schen Geometrie kann man etwa den Eichvektor auf naheliegende Weise zur Bildung einer derartigen Form π verwenden.

Bei einer Fläche (1) des projektiven Raumes erhält man die gewünschte Form, indem man in jeder Tangentenebene eine Gerade g festlegt, die nicht durch den Flächenpunkt geht. An jeder Flächenstelle lassen sich dann die Größen a und b eindeutig so bestimmen,

daß die Punkte

(1. 9) $$\mathfrak{x}_u + a\,\mathfrak{x},\quad \mathfrak{x}_v + b\,\mathfrak{x}$$ [4])

die stets auf den Tangenten der Parameterkurven liegen, in den Schnittpunkt dieser Tangenten mit g fallen.

Die Form

(1. 10) $$\pi = a\,du + b\,dv$$

hat dann die richtige Transformationseigenschaft.

Zunächst ist nämlich unsere Form eindeutig durch die Forderung festgelegt, daß der Punkt

$$d\mathfrak{x} + \pi\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_u + a\,\mathfrak{x})\,du + (\mathfrak{x}_v + b\,\mathfrak{x})\,dv$$

auf der Geraden g liegen soll. Daraus folgt ihre Invarianz bei einer Transformation der Parameter u, v.

Weiter ist aber bei zunächst beliebig gewähltem π^*

$$d\mathfrak{x}^* + \pi^*\,x^* = \varrho\,[d\mathfrak{x} + \pi\,\mathfrak{x} + (\pi^* - \pi + d\log\varrho)\,\mathfrak{x}].$$

Soll hier die linke Seite wieder einen Punkt von g darstellen, so muß (1. 2) gelten, denn $d\mathfrak{x} + \pi\,\mathfrak{x}$ liegt schon auf g.

(1. 11) $$\bar{d}\,\mathfrak{x} = d\mathfrak{x} + \pi\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_u + a\,\mathfrak{x})\,du + (\mathfrak{x}_v + b\,\mathfrak{x})\,dv$$

ist hier offenbar ein Punkt der Geraden g.

Ist umgekehrt zu einer Fläche (1) eine Form (1. 10) gegeben, die sich bei den Umnormungen (2) gemäß (1. 2) verhält, so ist dadurch in jeder Tangentenebene der Fläche eine Gerade festgelegt, die den Flächenpunkt nicht enthält, nämlich der Ort der Punkte $\bar{d}\,\mathfrak{x}$. Wegen der Halbinvarianz von $\bar{d}\,\mathfrak{x}$ ist ja dieser Ort von der Normierung (2) unabhängig.

Hängen die verwendeten Funktionen von r Veränderlichen ab und sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ linear unabhängige PFAFF'sche Formen in diesen Veränderlichen, so kann man bekanntlich durch den Ansatz

$$d\,m = m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2 + \cdots\, m_r\,\omega_r$$

die Ableitungen m_i einer Größe m in Bezug auf das nicht holonome Bezugssystem mit den Basisformen ω_i erklären. Gemischte zweite Ableitungen sind hier im allgemeinen nicht vertauschbar.

In unserem Falle ist es zweckmäßig, das Verfahren so einzurichten, daß die Ableitungen einer Halbinvarianten auch hier wieder halbinvariant sind. Das läßt sich immer erreichen, wenn die ω_i halbinvariant sind, setzt man dann

(1. 12) $$\bar{d}\,m = m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2 + \cdots\, m_r\,\omega_r,$$

so sind die m_i ebenfalls Halbinvarianten. Hat m das Gewicht c und ω_i das Gewicht c_i, so hat m_i das Gewicht $c - c_i$. In die Vertauschungsregel für solche Ableitungen geht hier naturgemäß auch $d\pi$ ein.

[4]) Die angehängten Indizes bedeuten Differentiation.

Sehr oft kommt es vor, daß in den Umnormungsformeln mehrere Normungsfunktionen ϱ_k eingehen. In den folgenden Anwendungen sind es 4, so daß eine beliebige halbinvariante Form eine Transformationsformel der Gestalt

$$\omega^* = \varrho_0^{c_0}\varrho_1^{c_1}\varrho_2^{c_2}\varrho_3^{c_3}\,\omega; \qquad c_i = \text{konst.} \tag{1. 13}$$

hat. Das Zahlenquadrupel

$$(c_0, c_1, c_2, c_3) \tag{1. 14}$$

nennen wir hier das Gewicht von ω.

Naturgemäß soll hier zu jedem ϱ_k eine Form π_k gehören, die sich nach

$$\pi_k^* = \pi_k - d(\log \varrho_k) \tag{1. 15}$$

transformiert.

Setzt man dann

$$\bar{d}\,\omega = d\,\omega + \sum c_k \pi_k \wedge \omega,$$

so gelten wieder die gewöhnlichen Differentiationsregeln und es ist

$$\bar{d}\,(\bar{d}\,\omega) = \sum c_k\, d\,\pi_k \wedge \omega.$$

§ 2.

Das bewegliche Tetraeder.

Im projektiven R_3 sei jetzt ein Tetraeder gegeben, dessen Lage von den Parametern u, v abhängt[5]). Gibt man die Eckpunkte durch ihre Koordinatenvektoren

$$\mathfrak{x}_0(u, v), \quad \mathfrak{x}_1(u, v), \quad \mathfrak{x}_2(u, v), \quad \mathfrak{x}_3(u, v) \tag{2. 1}$$

an, so kann jeder dieser Vektoren noch umgenormt werden;

$$\mathfrak{x}_i^*(u, v) = \varrho_i(u, v)\,\mathfrak{x}(u, v). \tag{2. 2}$$

Die zugehörigen Formen π_i kann man festlegen, indem man in der Tangentenebene[6]) der von jedem Eckpunkt beschriebenen Fläche eine Gerade g_i vorgibt, die nicht durch $\mathfrak{x}$ hindurchgeht. Am einfachsten ist es, hierfür die Schnittgerade mit der gegenüberliegenden Seitenebene des Tetraeders zu wählen. Dann liegt $\bar{d}\,\mathfrak{x}_i$ in jener Ebene und wir haben daher Ableitungsformeln der Gestalt

$$\bar{d}\,\mathfrak{x}_i = \sum_{k=0}^{3} \mathfrak{x}_k \omega_{ik}. \qquad \omega_{ii} = 0;\ i = 0, 1, 2, 3 \tag{2. 3}$$

Die ω_{ik} sind jetzt halbinvariant.

---

[5]) Die Anzahl der Parameter ist im übrigen hier zunächst unwesentlich.

[6]) Die Tangentenebene kann unbestimmt sein. Man verlangt dann, daß $\bar{d}\,\mathfrak{x}_i$ in einer vorgegebenen, nicht durch $\mathfrak{x}_i$ gehenden Ebene liegt.

Die Integrierbarkeitsbedingungen erhalten wir, indem wir noch einmal ableiten. Das gibt

$$\mathfrak{x}_i\, d\,\pi_i = \sum_{k,l} \mathfrak{x}_l \omega_{kl} \wedge \omega_{ik} + \sum_k \mathfrak{x}_k\, \bar{d}\,\omega_{ik}. \tag{2. 4}$$

In der ersten Summe stehen dabei nur Glieder für die $k \neq i$, $l \neq k$.

Durch Aufspalten nach den $\mathfrak{x}_i$ ergibt sich

$$d\,\pi_i = -\sum_{k \neq i} \omega_{ik} \wedge \omega_{ki}, \tag{2. 5}$$

$$\bar{d}\,\omega_{il} = \sum_{k \neq i,\, l} \omega_{ik} \wedge \omega_{kl}. \tag{2. 6}$$

Man hat hier den Vorteil, daß in (2. 6) auf der rechten Seite nur jeweils 2 Glieder stehen, bei Verwendung der gewöhnlichen äußeren Ableitung sind dagegen jeweils 4 Glieder vorhanden.

Aus (2. 5) folgt durch Addition

$$\sum d\,\pi_i = 0. \tag{2. 7}$$

Man kann also die Normungsfaktoren ϱ_i so einrichten, daß

$$\sum \pi_i = 0 \tag{2. 8}$$

wird.

Diese Eigenschaft bleibt dann bei solchen weiteren Umnormungen erhalten für die

$$\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = k = \text{konst.} \tag{2. 9}$$

Man beschränkt sich hier zweckmäßig auf Umnormungen für die

$$\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = 1. \tag{2. 10}$$

Auf Umnormungen der Vektoren mit konstanten Faktoren können wir ja schon deshalb verzichten, weil sie nur auf eine projektive Transformation hinauskommen.

Die Normierung (2. 8) bedeutet, daß die Determinante

$$D = (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \tag{2. 11}$$

unserer Koordinatenvektoren eine Konstante ist.

Es ist nämlich

$$\bar{d}\,(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = (\bar{d}\,\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_0, \bar{d}\,\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \bar{d}\,\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) + \\ + (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \bar{d}\,\mathfrak{x}_3) = 0,$$

da in jeder Determinante rechts das $\bar{d}\,\mathfrak{x}_i$ sich aus den anderen Vektoren nach (2. 3) linear kombinieren läßt. Da D das Gewicht (1, 1, 1, 1) hat, ist

$$\bar{d}\,D = d\,D + \sum \pi_i \cdot D,$$

also, wenn (2. 8) gilt

$$d\,D = 0, \qquad D = \text{konst.} \tag{2. 12}$$

§ 3.

Flächentheorie.

Wenden wir die gefundenen Formeln an auf die Untersuchung einer Fläche im projektiven R_3. Wir werden dann $\mathfrak{x}_0$ in den Flächenpunkt legen und deshalb mit $\mathfrak{x}$ bezeichnen, für $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ wählen wir Punkte in der Tangentenebene. $d\mathfrak{x}$ und deshalb auch $\bar{d}\mathfrak{x}$ lassen sich dann aus $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ linear kombinieren, es ist also

$$\omega_{03} = 0. \tag{3.1}$$

Für ω_{01} und ω_{02} schreiben wir jetzt der Einfachheit halber ω_1 und ω_2, statt π_0 schreiben wir π. Wie stets üblich, setzen wir voraus, daß an jeder Flächenstelle die Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v$ linear unabhängig sein sollen.

Wir haben

$$\bar{d}\mathfrak{x} = d\mathfrak{x} + \pi\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv + \pi\mathfrak{x}. \tag{3.2}$$

$\bar{d}\mathfrak{x}$ kann also nur dann verschwinden, wenn $du = dv = 0$. Andererseits ist nach (2, 3)

$$\bar{d}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1\omega_1 + \mathfrak{x}_2\omega_2. \tag{3.3}$$

Daraus folgt, daß ω_1 und ω_2 linear unabhängig sind, denn es gibt keine Richtung auf der Fläche, für die ω_1 und ω_2 beide verschwinden.

Wir können also ω_1 und ω_2 als Basisformen für eine halbinvariante Differentiation wählen. Aus (3, 3) folgt dann, daß

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2. \tag{3.4}$$

Wegen (3, 1) vereinfachen sich die Ableitungsformeln und Integrierbarkeitsbedingungen, insbesondere ist nach (2.6)

$$\bar{d}\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \qquad \bar{d}\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \tag{3.5}$$

$$\bar{d}\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \qquad \bar{d}\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}, \tag{3.6}$$

$$\bar{d}\omega_{03} = 0 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}. \tag{3.7}$$

Besonders wichtig ist natürlich die Vertauschungsregel der halbinvarianten Differentiation. Ist a eine Halbinvariante vom Gewicht (c_0, c_1, c_2, c_3), so ist

$$\bar{d}a = a_1\omega_1 + a_2\omega_2, \tag{3.8}$$

$$a\sum c_i d\pi_i = \bar{d}(\bar{d}a) = \bar{d}a_1 \wedge \omega_1 + \bar{d}a_2 \wedge \omega_2 + a_1\bar{d}\omega_1 + a_2\bar{d}\omega_2$$
$$= (a_{21} - a_{12})\omega_1 \wedge \omega_2 + a_1\bar{d}\omega_1 + a_2\bar{d}\omega_2.$$

Die gesuchte Regel hat also die Gestalt

$$a_{12} - a_{21} = h_1 a_1 + h_2 a_2 + g a \tag{3.9}$$

mit

$$(3.9\,a)\qquad h_1 = \frac{\bar{d}\,\omega_1}{\omega_1 \wedge \omega_2},\quad h_2 = \frac{\bar{d}\,\omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2},\quad g = -\frac{\sum c_i\, d\,\pi_i}{\omega_1 \wedge \omega_2};$$

g hängt vom Gewicht von a ab, h_1 und h_2 aber nicht.

Die Regel (3. 9) enthält also genau dann keine ersten Ableitungen und ist deshalb besonders einfach, wenn

$$h_1 = h_2 = 0.$$

Nach (3. 9a) ist das dann und nur dann der Fall, wenn

$$(3.10)\qquad \bar{d}\,\omega_1 = \bar{d}\,\omega_2 = 0,$$

oder nach (3. 5), wenn

$$(3.11)\qquad \omega_2 \wedge \omega_{21} = 0, \qquad \omega_1 \wedge \omega_{12} = 0.$$

Es wird also zweckmäßig sein, die Punkte $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ so zu wählen, daß (3. 11) gilt. Nun ist

$$(3.12)\qquad \begin{aligned} \bar{d}\,\mathfrak{x}_1 &= \omega_{10}\mathfrak{x} + \omega_{12}\mathfrak{x}_2 + \omega_{13}\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_{11}\omega_1 + \mathfrak{x}_{22}\omega_2, \\ \bar{d}\,\mathfrak{x}_2 &= \omega_{20}\mathfrak{x} + \omega_{21}\mathfrak{x}_1 + \omega_{23}\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{x}_{21}\omega_1 + \mathfrak{x}_{22}\omega_2. \end{aligned}$$

Bewegen wir uns auf der Fläche längs einer Kurve mit der Tangente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)$, für die also $\omega_1 = 0$, so bedeutet die zweite Gleichung (3. 11), daß auch $\omega_{12} = 0$, also nach (3. 12), daß

$$(3.13)\qquad \mathfrak{x}_{12} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1}\ ^{7}).$$

Ebenso ist die erste Gleichung (3. 11) gleichbedeutend mit

$$(3.14)\qquad \mathfrak{x}_{21} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2}.$$

$\mathfrak{x}_{12}$ ist ein Punkt der Tangente der von $\mathfrak{x}_1$ für $\omega_1 = 0$ beschriebenen Kurve. Denn das gilt für $d\,\mathfrak{x}_1$ und deshalb auch für $\bar{d}\,\mathfrak{x}_1 = d\,\mathfrak{x}_1 + \pi_1\mathfrak{x}_1$. Diese Tangente soll also nach (3. 13) die Gerade $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)$ unseres Tetraeders treffen und das gleiche gilt für die Tangente der von $\mathfrak{x}_2$ längs $\omega_2 = 0$ beschriebenen Kurve.

Sind an jeder Flächenstelle die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ in der Tangentenebene beliebig vorgegeben, so kann man im allgemeinen $\mathfrak{x}_3$ so dazu bestimmen, daß (3. 10) gilt. Man hat dazu nur $\mathfrak{x}_3$ zu legen auf die durch $\mathfrak{x}$ gehende Transversale der oben betrachteten Tangenten.

Das ist nur dann nicht möglich, wenn eine dieser Tangenten in der Tangentenebene der Fläche $\mathfrak{x}$ liegt, also wenn eine der Bedingungen

$$\mathfrak{x}_{12} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2}, \qquad \mathfrak{x}_{21} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2}$$

erfüllt ist.

---

[7]) Das soll heißen, daß $\mathfrak{x}_{12}$ sich aus den Vektoren im Modul linear kombinieren läßt.

Nach (3. 12) führt das auf die beiden Gleichungen

$$\omega_1 \wedge \omega_{12} = 0, \qquad \omega_2 \wedge \omega_{21} = 0. \tag{3.15}$$

Diese bedingen sich nach (3. 7) gegenseitig. Das folgt auch daraus, daß die Differenz von $\mathfrak{x}_{12}$ und $\mathfrak{x}_{21}$ nach (3. 9) eine Linearkombination von $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}$ ist, so daß beide Punkte stets gleichzeitig in der Tangentenebene liegen müssen.

Wir wollen noch zeigen, daß (3. 15) bedeutet, daß $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ an jeder Flächenstelle auf konjugierten Tangenten liegen. Dazu normieren wir so, daß ω_1 und ω_2 totale Differentiale werden. Dann können wir

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dv$$

setzen. Für jede Halbinvariante g ist dann

$$g_1 du + g_2 dv = dg = \bar{d}g + \sum c_i \boldsymbol{\pi}_i \cdot g = g_u du + g_v dv + \sum c_i \boldsymbol{\pi}_i \cdot g.$$

Setzen wir

$$\sum c_i \boldsymbol{\pi}_i = \sigma = s_1 du + s_2 dv \quad [8]),$$

so folgt daraus

$$g_1 = g_u + s_1 g, \qquad g_2 = g_v + s_2 g. \tag{3.16}$$

Wenden wir das auf unsere Vektoren an, so folgt

$$\mathfrak{x}_1 \equiv \mathfrak{x}_u \pmod{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{x}_2 \equiv \mathfrak{x}_v \pmod{\mathfrak{x}}, \quad \mathfrak{x}_{12} \equiv \mathfrak{x}_{uv} \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v}. \tag{3.17}$$

$\mathfrak{x}_{12}$ liegt also dann und nur dann in der Tangentenebene, wenn das gleiche für $\mathfrak{x}_{uv}$ gilt:

$$\mathfrak{x}_{uv} = a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v + c\mathfrak{x}. \tag{3.18}$$

Das bedeutet aber, daß die Parameterkurven auf der Fläche ein konjugiertes Netz bilden. Daraus folgt die Behauptung, denn nach (3. 17) liegen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ auf den Tangenten der Netzkurven.

Bei der Untersuchung konjugierter Netze kann es natürlich erwünscht sein, $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ auf die Netztangenten zu legen. Man kann aber auch dann erreichen, daß (3. 10) gilt, wenn man $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ mit den beiden LAPLACE-Transformationen des Netzes zusammenfallen läßt. In diesem Fall ist nämlich

$$\mathfrak{x}_{1v} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1}, \qquad \mathfrak{x}_{2u} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2}$$

und deshalb auch

$$\mathfrak{x}_{1z} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1}, \qquad \mathfrak{x}_{21} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2}.$$

Da $\mathfrak{x}_{12}$ kein Glied mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_{21}$ kein Glied mit $\mathfrak{x}_2$ enthalten kann [9]), wird

$$\mathfrak{x}_{12} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}}, \qquad \mathfrak{x}_{21} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{x}}. \tag{3.19}$$

---

[8]) s_1 und s_2 hängen offenbar vom Gewicht von g ab. Das stört im Folgenden nicht.

[9]) Das gleiche gilt schon für $\bar{d}\mathfrak{x}_1$ bzw. $\bar{d}\mathfrak{x}_2$.

(3. 13) und (3. 14) und damit (3. 10) sind hier also für jede Wahl des vierten Eckpunktes $\mathfrak{x}_3$ befriedigt.

Man nennt eine Gerade durch den Flächenpunkt, die nicht in der Tangentenebene liegt, oft eine Normale erster Art. Diesen Geraden entsprechen dual solche, die in der Tangentenebene liegen, aber nicht durch den Flächenpunkt gehen. Dementsprechend nennen wir $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_3)$ die erste, $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ die zweite Normale unseres Begleittetraeders.

§ 4.

Flächentheorie in Asymptotenlinienparametern.

Ist auf unserer Fläche kein besonderes Kurvennetz durch die Natur der geometrischen Aufgabe ausgezeichnet, so wird man zweckmäßig $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ auf die Schmiegtangenten legen. Die Fläche darf dann natürlich keine Torse sein, diesen Fall wollen wir also hier ausschließen.

Durch Vorgabe der Normalen zweiter Art des Begleittetraeders kann man jetzt $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ eindeutig festlegen. Nach § 3 gibt es dann an jeder Flächenstelle eine eindeutig bestimmte Normale erster Art, auf der $\mathfrak{x}_3$ gewählt werden soll, damit (3. 10) gilt.

Man kann zeigen, daß zwei so einander zugeordnete Normalen erster und zweiter Art stets reziproke Polaren in bezug auf die Quadriken von Darboux an unserer Flächenstelle sind. Die Zuordnung ist also auch in umgekehrter Richtung eindeutig.

Liegt $\mathfrak{x}_1$ auf einer Schmiegtangente, so stellt $\omega_2 = 0$ die dazugehörige Schar von Asymptotenlinien dar. Für sie darf dann $d\mathfrak{x}_1$ kein Glied mit $\mathfrak{x}_3$ enthalten und das gleiche gilt deshalb für $\bar{d}\mathfrak{x}_1$. Da

$$\bar{d}\mathfrak{x}_1 = \omega_{10}\mathfrak{x} + \omega_{12}\mathfrak{x}_2 + \omega_{13}\mathfrak{x}_3,$$

muß also für unsere Kurven auch $\omega_{13} = 0$ gelten.

Daher ist

$$\omega_2 \wedge \omega_{13} = 0 \tag{4. 1}$$

und ebenso liegt $\mathfrak{x}_2$ dann und nur dann auf einer Schmiegtangente, wenn

$$\omega_1 \wedge \omega_{23} = 0. \tag{4. 2}$$

Da (3. 11) gelten soll, folgt jetzt aus (3. 6), daß nicht nur

$$\bar{d}\omega_1 = \bar{d}\omega_2 = 0, \tag{4. 3}$$

sondern auch

$$\bar{d}\omega_{13} = \bar{d}\omega_{23} = 0. \tag{4. 4}$$

Wegen (4. 1), (4. 2) können wir

$$\omega_{13} = \alpha\omega_2, \qquad \omega_{23} = \tilde{\alpha}\omega_1 \tag{4. 5}$$

setzen.

Setzt man das in (3. 7) ein, so ergibt sich

$$(\alpha - \tilde{\alpha})\,\omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

also wegen der linearen Unabhängigkeit von ω_1 und ω_2

$$\alpha = \tilde{\alpha}.$$

Durch Ableitung von (4. 5) unter Verwendung von (4. 3), (4. 4) folgt jetzt

$$0 = \bar{d}\,\alpha \wedge \omega_2, \qquad 0 = \bar{d}\,\alpha \wedge \omega_1.$$

Da ω_1 und ω_2 linear unabhängig sind, ist also

$$\bar{d}\,\alpha = 0. \tag{4. 6}$$

Nun hat α das Gewicht $(-1, 1, 1, -1)$, denn $\omega_2 = \omega_{0\,2}$ hat das Gewicht $(1, 0, -1, 0)$ und $\omega_{1\,3}$ das Gewicht $(0, 1, 0, -1)$. Also ist

$$\bar{d}\,\alpha = d\,\alpha + (-\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 - \pi_3)\,\alpha.$$

Verwenden wir also nur solche Normierungen, für die

$$\alpha = 1 \text{ [10]}, \tag{4. 7}$$

so ist

$$-\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 = 0,$$

zusammen mit (2. 8) führt das auf

$$\pi_0 + \pi_3 = 0, \qquad \pi_1 + \pi_2 = 0. \tag{4. 8}$$

Damit (4. 7), (4. 8) richtig bleiben, dürfen wir jetzt nur noch Umnormungen anwenden, für die

$$\varrho_0 \varrho_3 = k, \quad \varrho_1 \varrho_2 = k^{-1}, \quad k = \text{konst.}$$

Da Umnormungen sämtlicher Vektoren mit konstanten Faktoren uninteressant sind, können wir uns auf Umnormungen mit

$$\varrho_0 \varrho_3 = \varrho_1 \varrho_2 = \pm 1 \tag{4. 9}$$

beschränken.

Stellen wir die Grundgleichungen der so aufgebauten Flächentheorie jetzt zusammen, so haben wir, wenn statt $\mathfrak{x}_3$ noch $\mathfrak{y}$ geschrieben wird

$$\begin{aligned}
\bar{d}\,\mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_1 \omega_1 + \mathfrak{x}_2 \omega_2, \\
\bar{d}\,\mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x}\,\omega_{1\,0} + \mathfrak{x}_2 \omega_{1\,2} + \mathfrak{y}\,\omega_2, \\
\bar{d}\,\mathfrak{x}_2 &= \mathfrak{x}\,\omega_{2\,0} + \mathfrak{x}_1 \omega_{2\,1} + \mathfrak{y}\,\omega_1, \\
\bar{d}\,\mathfrak{y} &= \mathfrak{x}\,\omega_{3\,0} + \mathfrak{x}_1 \omega_{3\,1} + \mathfrak{x}_2 \omega_{3\,2},
\end{aligned} \tag{4. 10}$$

[10] $\alpha = 0$ bedeutet $\omega_{1\,3} = \omega_{2\,3} = 0$. Die Asymptotenlinien müßten dann ein konjugiertes Netz bilden, was nur möglich ist, wenn sie unbestimmt und die Fläche eine Ebene ist. Das schließen wir natürlich aus.

$$(4.\ 11)\qquad \begin{aligned} d\pi_0 &= -\omega_1\wedge\omega_{10}-\omega_2\wedge\omega_{20},\\ 2\,d\pi_1 &= -2\,\omega_{12}\wedge\omega_{21}+\omega_1\wedge(\omega_{32}+\omega_{10})-\omega_2\wedge(\omega_{31}+\omega_{20}),\end{aligned}$$

$$(4.\ 12)\qquad 0=\omega_1\wedge(\omega_{32}-\omega_{10})+\omega_2\wedge(\omega_{31}-\omega_{20}),$$

$$(4.\ 13)\qquad \bar d\,\omega_1=\bar d\,\omega_2=0,\qquad \omega_2\wedge\omega_{21}=\omega_1\wedge\omega_{12}=0,$$

$$(4.\ 14)\qquad \bar d\,\omega_{12}=\omega_2\wedge(\omega_{32}-\omega_{10}),\quad \bar d\,\omega_{21}=\omega_1\wedge(\omega_{31}-\omega_{20}),$$

$$(4.\ 15)\qquad \bar d\,\omega_{10}=\omega_2\wedge\omega_{30}+\omega_{12}\wedge\omega_{20},\quad \bar d\,\omega_{20}=\omega_1\wedge\omega_{30}+\omega_{21}\wedge\omega_{10},$$

$$(4.\ 16)\qquad \begin{aligned}\bar d\,\omega_{31}&=-\omega_1\wedge\omega_{30}-\omega_{21}\wedge\omega_{32},\\ \bar d\,\omega_{32}&=-\omega_2\wedge\omega_{30}-\omega_{12}\wedge\omega_{31},\end{aligned}$$

$$(4.\ 17)\qquad \bar d\,\omega_{30}=\omega_{31}\wedge\omega_{10}+\omega_{32}\wedge\omega_{20}.$$

Es ist nützlich, hier noch zur halbinvarianten Differentiation in bezug auf die Basisformen ω_1, ω_2 überzugehen. Nach (4. 13) können wir

$$(4.\ 18)\qquad \omega_{12}=\beta\,\omega_1,\qquad \omega_{21}=\gamma\,\omega_2$$ [11])

setzen. Weiter sei gesetzt

$$(4.\ 19)\qquad d\pi_0-d\pi_1=2\sigma\,\omega_1\wedge\omega_2,\qquad d\pi_0+d\pi_1=-2\tau\,\omega_1\wedge\omega_2$$ [11]),

$$(4.\ 20)\qquad \begin{aligned}\omega_{10}&=l\,\omega_1+p\,\omega_2,\qquad \omega_{32}=\tilde l\,\omega_1+\tilde p\,\omega_2,\\ \omega_{20}&=q\,\omega_1+m\,\omega_2,\qquad \omega_{31}=\tilde q\,\omega_1+\tilde m\,\omega_2,\end{aligned}$$

$$(4.\ 21)\qquad \omega_{30}=s\,\omega_1+t\,\omega_2.$$

Beachten wir noch, daß für jede halbinvariante Form

$$\omega=a\,\omega_1+b\,\omega_2$$

aus (4. 13) folgt

$$\begin{aligned}\bar d\,\omega&=\bar d\,a\wedge\omega_1+\bar d\,b\wedge\omega_2\\ &=(b_1-a_2)\,\omega_1\wedge\omega_2,\end{aligned}$$

so erhalten wir jetzt aus den Formeln (4. 10) bis (4. 17) die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_1=x_1,\qquad \mathfrak{x}_2=x_2,$$

$$(4.\ 22)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{x}_{11}&=\beta\,\mathfrak{x}_2+l\,\mathfrak{x},\\ \mathfrak{x}_{12}&=\mathfrak{y}+p\,\mathfrak{x},\\ \mathfrak{x}_{21}&=\mathfrak{y}+q\,\mathfrak{x},\\ \mathfrak{x}_{22}&=\gamma\,\mathfrak{x}_1+m\,\mathfrak{x},\end{aligned}\qquad (4.\ 23)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{y}_1&=\tilde q\,\mathfrak{x}_1+\tilde l\,\mathfrak{x}_2+s\,\mathfrak{x},\\ \mathfrak{y}_2&=\tilde m\,\mathfrak{x}_1+\tilde p\,\mathfrak{x}_2+t\,\mathfrak{x},\end{aligned}$$

[11]) β, γ, σ und τ sind hier Halbinvarianten, keine Formen. Die Bezeichnung ist im Anschluß an C. H. gewählt.

$$\sigma - \tau = q - p, \tag{4.24}$$

$$2\sigma + 2\tau = 2\beta\gamma - p - \tilde{p} - q - \tilde{q}, \tag{4.25}$$

$$\tilde{p} - p = \tilde{q} - q, \tag{4.26}$$

$$\beta_2 \quad \tilde{l} - l, \qquad \gamma_1 = \tilde{m} - m, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} p_1 - l_2 &= -s + \beta m, \\ m_1 - q_2 &= t - \gamma l, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1 - \tilde{q}_2 &= -t + \gamma \tilde{l}, \\ \tilde{p}_1 - \tilde{l}_2 &= s - \beta \tilde{m}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$t_1 - s_2 = p\tilde{q} - q\tilde{p} + m\tilde{l} - l\tilde{m}. \tag{4.30}$$

Diese Formeln sind mit denjenigen identisch, die wir früher[12]) mit Hilfe eines ganz anders erklärten halbinvarianten Differentiationsverfahrens in Asymptotenlinienparametern gefunden hatten.

Wir wollen noch zeigen, daß beide Verfahren auch wirklich auf das gleiche hinauskommen. Sind u, v Asymptotenlinienparameter, so ist etwa

$$\omega_1 = h(u, v)\, du, \qquad \omega_2 = k(u, v)\, dv. \tag{4.31}$$

Wir normen um mit

$$\varrho_0^{-1}\varrho_1 = h, \qquad \varrho_0^{-1}\varrho_2 = k,$$

also wegen (4. 9)

$$\varrho_0^{-1} = \varrho_3 = \sqrt{\pm hk}, \qquad \varrho_1 = \varrho_2^{-1} = \sqrt{\pm hk^{-1}}\ ^{13}).$$

Nach der Umnormung ist

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dv, \tag{4.32}$$

also

$$d\omega_1 = d\omega_2 = 0. \tag{4.33}$$

Bei vorgegebenen Asymptotenlinienparametern ist die Normierung der Vektoren jetzt eindeutig festgelegt.

Daraus und aus (4. 3) gewinnen wir die Beziehungen

$$0 = (\pi_0 - \pi_1) \wedge \omega_1, \quad 0 = (\pi_0 - \pi_2) \wedge \omega_2. \tag{4.34}$$

Wir können also

$$\pi_1 - \pi_0 = 2A\, du, \quad \pi_2 - \pi_0 = 2B\, dv \tag{4.35}$$

setzen.

---

[12]) Vgl. C. H., Formeln (23), (34), (24), (31), (33), (30), (35), (36).

[13]) In beiden Formeln steht das gleiche Vorzeichen, das wir so wählen, daß die Wurzeln reell sind.

Bei Transformationen

$$u = f(u^*), \quad v = g(v^*) \tag{4.36}$$

der Asymptotenlinienparameter wird

$$\omega_1 = f' \, du^*, \quad \omega_2 = g' \, dv^*.$$

Um die zu diesen neuen Parametern gehörige Normierung der Vektoren zu erhalten, für die

$$\omega_1^* = du^*, \quad \omega_2^* = dv^*,$$

muß man eine Umnormung anwenden. Offenbar genügt es

$$\varrho_0^{-1} \varrho_1 = f', \quad \varrho_0^{-1} \varrho_2 = g' \tag{4.37}$$

zu nehmen.

Jede Transformation (4.36) der Asymptotenlinienparameter wird also jetzt gekoppelt mit der Umnormung für die (4.37).

Bei der Umnormung (4.37) wird jede Halbinvariante G mit einem Potenzprodukt von f' und g' multipliziert:

$$G^* = f'^a g'^b G = (\varrho_0^{-1} \varrho_1)^a (\varrho_0^{-1} \varrho_2)^b G. \tag{4.38}$$

Es ist daher

$$\bar{d} G = d G + [a(\pi_1 - \pi_0) + b(\pi_2 - \pi_0)] G.$$

Wegen (4.35) und der Definition der halbinvarianten Differentiation folgt daraus

$$\bar{d} G = G_1 \, du + G_2 \, dv = G_u \, du + G_v \, dv + (2 a A \, du + 2 b B \, dv) G$$

oder

$$G_1 = G_u + 2 a A G, \quad G_2 = G_v + 2 b B G. \tag{4.39}$$

Das stimmt überein mit der Definition der halbinvarianten Ableitung beim oben zitierten Verfahren, man braucht nur

$$A = \frac{1}{2} \frac{\lambda_u}{\lambda}, \quad B = \frac{1}{2} \frac{\mu_v}{\mu} \tag{4.40}$$

zu setzen[14]).

Da nach (4.35)

$$d(\pi_1 - \pi_0) = -2 A_v \, du \wedge dv, \quad d(\pi_2 - \pi_0) = 2 B_u \, du \wedge dv$$

findet man für σ und τ aus (4.19)

$$\sigma = A_v = \tfrac{1}{2} (\log \lambda)_{uv}, \quad \tau = B_u = \tfrac{1}{2} (\log \mu)_{uv}, \tag{4.41}$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit den dortigen Formeln[15]).

Damit ist die Identität beider Verfahren bewiesen. Daraus folgt insbesondere, daß auch hier die beiden Normalen unserer Begleit-

[14]) C. H., (16).

[15]) C. H., (18).

tetraeder stets reziproke Polaren in bezug auf die DARBOUX-Quadriken sind [16]).

Die jetzigen Formeln sind aber deshalb allgemeiner, weil sie bei beliebiger Wahl der Parameter auf der Fläche verwendbar bleiben. Zu beachten ist aber, daß (4.34) nur gilt, wenn die Basisformen ω_1 und ω_2 totale Differentiale sind, also im „holonomen Fall".

Die Vertauschungsregel (3.8) nimmt hier für eine Größe G mit der Transformationsformel (4.38) die Gestalt an

$$(G_{21} - G_{12})\,\omega_1 \wedge \omega_2 = [a(d\pi_1 - d\pi_0) + b(d\pi_2 - d\pi_0)]\,G$$

oder

$$G_{12} - G_{21} = [2a\sigma - 2b\tau)\,G. \tag{4.42}$$

§ 5.

Konjugierte Netze.

Schon in § 3 deuteten wir an, wie wir unser Verfahren zur Behandlung der Theorie der konjugierten Netze ausnutzen können. Das soll hier noch etwas näher ausgeführt werden.

Betrachten wir zunächst ein beliebiges Kurvennetz auf einer Fläche des R_3, dessen Kurven aber an keiner Stelle eine Asymptotenlinie berühren sollen. Die Tangenten jeder Netzkurvenschar bilden eine Geradenkongruenz, von der die Netzfläche eine Brennfläche ist. Die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ legen wir jetzt in die Berührungspunkte der beiden Kongruenzstrahlen mit ihren zweiten Brennflächen. $\mathfrak{x}_3 = \mathfrak{y}$ wählen wir auf der Schnittgerade der Tangentenebenen dieser beiden Brennflächen in $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$.

In diesem Falle enthält $d\mathfrak{x}_1$ kein Glied mit $\mathfrak{x}_2$, $d\mathfrak{x}_2$ kein Glied mit $\mathfrak{x}_1$, und es ist also

$$\omega_{12} = \omega_{21} = 0. \tag{5.1}$$

Da außerdem $\omega_{03} = 0$, nehmen die Ableitungs- und Integrierbarkeitsformeln jetzt die Gestalt an

$$\begin{aligned}
\bar{d}\,\mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_1\omega_1 + \mathfrak{x}_2\omega_2,\\
\bar{d}\,\mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x}\,\omega_{10} + \mathfrak{y}\,\omega_{13},\\
\bar{d}\,\mathfrak{x}_2 &= \mathfrak{x}\,\omega_{20} + \mathfrak{y}\,\omega_{23},\\
\bar{d}\,\mathfrak{y} &= \mathfrak{x}\,\omega_{30} + \mathfrak{x}_1\omega_{31} + \mathfrak{x}_2\omega_{32},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
d\pi_0 &= \omega_{10}\wedge\omega_1 + \omega_{20}\wedge\omega_2,\\
d\pi_1 &= \omega_1 \wedge \omega_{10} + \omega_{31}\wedge\omega_{13},\\
d\pi_2 &= \omega_2 \wedge \omega_{20} + \omega_{32}\wedge\omega_{23},\\
d\pi_3 &= \omega_{13}\wedge\omega_{31} + \omega_{23}\wedge\omega_{32},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

[16]) Vgl. C. H. § 6.

$$\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0,$$

(5. 4)
$$\omega_{10} \wedge \omega_2 + \omega_{13} \wedge \omega_{32} = 0,$$
$$\omega_{20} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_{31} = 0,$$

(5. 5)
$$\bar{d}\,\omega_1 = \bar{d}\,\omega_2 = 0,$$
$$\bar{d}\,\omega_{13} = \bar{d}\,\omega_{23} = 0,$$

(5. 6) $$\bar{d}\,\omega_{10} = \omega_{13} \wedge \omega_{30}, \quad \bar{d}\,\omega_{20} = \omega_{23} \wedge \omega_{30},$$

(5. 7) $$\bar{d}\,\omega_{31} = \omega_{30} \wedge \omega_1, \quad \bar{d}\,\omega_{32} = \omega_{30} \wedge \omega_2,$$

(5. 8) $$\bar{d}\,\omega_{30} = \omega_{31} \wedge \omega_{10} + \omega_{32} \wedge \omega_{20},$$

Wir wollen auch hier wieder von den Formen zu halbinvarianten Ableitungen übergehen. Dazu setzen wir

(5. 9) $$d\pi_0 = \Theta\,\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\pi_1 = \sigma\,\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\pi_2 = \tau\,\omega_1 \wedge \omega_2,$$

(5. 10) $$\omega_{10} = j\,\omega_1 + k\,\omega_2, \quad \omega_{20} = h\,\omega_1 + i\,\omega_2,$$

(5. 11) $$\omega_{13} = a\,\omega_1 + b\,\omega_2, \quad \omega_{23} = c\,\omega_1 + e\,\omega_2,$$

(5. 12) $$\omega_{31} = p\,\omega_1 + l\,\omega_2, \quad \omega_{32} = m\,\omega_1 + q\,\omega_2,$$

(5. 13) $$\omega_{30} = s\,\omega_1 + t\,\omega_2.$$

Setzt man das ein, so findet man

(5. 14) $$\mathfrak{x}_1 = x_1, \quad \mathfrak{x}_2 = x_2,$$

(5. 15)
$$\mathfrak{x}_{11} = a\,\mathfrak{y} + j\,\mathfrak{x},$$
$$\mathfrak{x}_{12} = b\,\mathfrak{y} + k\,\mathfrak{x},$$
$$\mathfrak{x}_{21} = c\,\mathfrak{y} + h\,\mathfrak{x},$$
$$\mathfrak{x}_{22} = e\,\mathfrak{y} + i\,\mathfrak{x},$$

(5. 16)
$$\mathfrak{y}_1 = p\,\mathfrak{x}_1 + m\,\mathfrak{x}_2 + s\,\mathfrak{x},$$
$$\mathfrak{y}_2 = l\,\mathfrak{x}_1 + q\,\mathfrak{x}_2 + t\,\mathfrak{x},$$

(5. 17) $$\Theta = h - k,$$

(5. 18)
$$\sigma = k - a\,l + b\,p,$$
$$\tau = -\,h + e\,m - c\,q,$$

(5. 19) $$b - c = 0,$$

(5. 20)
$$j + a\,q - b\,m = 0,$$
$$i + e\,p - c\,l = 0,$$

(5. 21) $$a_2 - b_1 = 0, \quad e_1 - c_2 = 0,$$

(5. 22) $$k_1 - j_2 = a\,t - b\,s, \quad h_2 - i_1 = e\,s - c\,t,$$

(5. 23) $$p_2 - l_1 = t, \quad q_1 - m_2 = s,$$

(5. 24) $$t_1 - s_2 = p\,k - l\,j + m\,i - q\,h.$$

Um mit diesen Formeln arbeiten zu können, braucht man noch das Gewicht der einzelnen Größen. Wegen (2. 10) multipliziert sich jede Größe bei den Umnormungen mit einem Potenzprodukt von $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$. Ist

$$G^* = \varrho_0^{c_0} \varrho_1^{c_1} \varrho_2^{c_2} G, \tag{5.25}$$

so sagen wir, daß G das Gewicht (c_0, c_1, c_2) hat.

Wir stellen die Gewichter sämtlicher verwendeter Größen in einer Tabelle zusammen, in der c_0, c_1, c_2 in dieser Reihenfolge untereinander aufgeführt wird.

(5.26)

$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{x}_1$	$\mathfrak{x}_2$	$\mathfrak{y}$	ω_1	ω_2	ω_{13}	ω_{23}	ω_{10}	ω_{20}	ω_{31}	ω_{32}	ω_{30}
1	0	0	−1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−2
0	1	0	−1	−1	0	2	1	1	0	−2	−1	−1
0	0	1	−1	0	−1	1	2	0	−1	−1	−2	−1

$\Theta, \sigma, \tau, h, k$	a	b, c	e	i	j	p, q	l	m	s	t
−2	0	0	0	−2	−2	−2	−2	−2	−3	−3
1	3	2	1	0	2	−1	−2	0	0	−1
1	1	2	3	2	0	−1	0	−2	−1	0

Für eine Größe G mit dem Gewicht (c_0, c_1, c_2) gilt die Vertauschungsregel

$$G_{21} - G_{12} = (c_0 \Theta + c_1 \sigma + c_2 \tau)\, G. \tag{5.27}$$

Damit ist der Apparat zur Behandlung unserer Netze fertiggestellt. Wir wollen hier jedoch ihre Theorie nicht weiter verfolgen, sondern uns auf den Fall beschränken, daß das Netz konjugiert ist. Wie wir gesehen haben, ist das dann und nur dann der Fall, wenn (3. 13) gilt, also nach (5. 11), wenn

$$b = c = 0. \tag{5.28}$$

In diesem Falle vereinfachen sich nun die Formeln sehr erheblich. Nach (5. 20) können wir

$$i = -ep, \quad j = -aq \tag{5.29}$$

setzen. Dann wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= a(\mathfrak{y} - q\mathfrak{x}), \\ \mathfrak{x}_{12} &= k\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{21} &= h\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{x}_{22} &= e(\mathfrak{y} - p\mathfrak{x}), \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_1 &= p\mathfrak{x}_1 + m\mathfrak{x}_2 + s\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{y}_2 &= l\mathfrak{x}_1 + q\mathfrak{x}_2 + t\mathfrak{x}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\Theta = h - k, \tag{5.32}$$

$$\sigma = k - al, \quad \tau = -h + em, \tag{5.33}$$

$$a_2 = b_1 = 0. \tag{5.34}$$

$$k_1 = a(t - q_2), \quad h_2 = e(s - p_1), \tag{5.35}$$

$$p_2 - l_1 = t, \quad q_1 - m_2 = s, \tag{5.36}$$

$$t_1 - s_2 = p(k - e\,m) - q(h - a\,l). \tag{5.37}$$

Durch Umnormung kann man auch hier wieder erreichen, daß ω_1 und ω_2 totale Differentiale werden:

$$d\,\omega_1 = d\,\omega_2 = 0. \tag{5.38}$$

Setzen wir dann

$$\omega_1 = d\,u, \quad \omega_2 = d\,v, \tag{5.39}$$

so ist $\mathfrak{x}_1$ die LAPLACE-Transformierte des Netzes $\mathfrak{x}(u, v)$ in der u-Richtung, $\mathfrak{x}_2$ die in der v-Richtung.

Durch Zurückgehen auf die gewöhnliche Differentiation prüft man leicht nach, daß in diesem Falle h und k die LAPLACE-Invarianten des Netzes in Punktkoordinaten sind. Für die Invarianten in Ebenenkoordinaten findet man

$$\tilde{h} = e\,m = h + \tau, \quad \tilde{k} = a\,l = k + \sigma. \tag{5.40}$$

Die Asymptotenlinien der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ werden dargestellt durch

$$a\,d\,u^2 + e\,d\,v^2 = 0. \tag{5.41}$$

Nehmen wir an, daß diese Fläche keine Torse ist, so können wir also a und e von Null verschieden voraussetzen.

Für die Asymptotenlinien der Fläche $\mathfrak{x}_1(u, v)$ findet man

$$a\,m\,d\,u^2 + k\,d\,v^2 = 0, \tag{5.42}$$

die von den Tangenten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)$ der u-Kurven erzeugte Kongruenz ist also dann und nur dann ein W-Strahlensystem, wenn

$$k - e\,m = 0, \tag{5.43}$$

oder nach (5.32); (5.33), wenn

$$\tau + \Theta = 0. \tag{5.44}$$

Ebenso erzeugt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2)$ dann und nur dann ein W-Strahlensystem, wenn

$$h - a\,l = 0 \tag{5.45}$$

oder auch

$$\sigma + \Theta = 0. \tag{5.46}$$

Das Netz ist ein R-Netz, wenn

$$\sigma + \tau + 2\,\Theta = 0. \tag{5.47}$$

$\Theta = 0$ bedeutet, daß die zweite Achse $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ eine zur Netzfläche harmonische Kongruenz bildet, $\tau = 0$, daß die erste Achse für die

Fläche $\mathfrak{x}_1(u, v)$ die gleiche Eigenschaft hat, aber auch daß die Kurven $v = \text{const.}$ auf der Netzfläche pangeodätisch nach C. SEGRE sind. Ist $\sigma = \tau = 0$, so ist das Netz ein Netz von TERRACINI. Kennzeichnend für diese Netze ist also, daß sie aus zwei Scharen von Pangeodätischen bestehen.

Es ist zweckmäßig, durch

$$a = e r^2 \tag{5.48}$$

eine weitere Halbinvariante r vom Gewicht $(0, -1, 1)$ einzuführen, deren Vorzeichen wir uns in beliebiger Weise fixiert denken. Weiter setzen wir

$$a_1 = 2\beta a, \quad e_2 = 2\gamma e. \tag{5.49}$$

Dann wird wegen (5.34)

$$r_1 = \beta r, \quad r_2 = -\gamma r. \tag{5.50}$$

Aus (5.49), (5.34) erhalten wir die Integrierbarkeitsbedingungen

$$\beta_2 = -\tfrac{1}{2}(3\sigma + \tau), \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma + 3\tau). \tag{5.51}$$

Die Kurven $v = \text{konst.}$ sind dann und nur dann DARBOUX-Kurven der Netzfläche, wenn $\beta = 0$.

Auf die zahlreichen geometrischen Anwendungen unserer Formeln wollen wir hier nicht eingehen, da sie in Kürze in einem Lehrbuch zusammengestellt werden sollen[17]).

[17]) G. BOL, Projektive Differentialgeometrie, Bd. II (in Vorbereitung).

(Eingegangen am 15. Februar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 160–167 (1951).

On some integrals involving the hypergeometric function ${}_2F_1(a, b; c; -x)$.

By

N. N. Bose in Lucknow, India.

1.

In a former paper [4], I have obtained several properties of MACROBERT's E-function [8] which is defined as

$$E(\alpha, \beta :: x) = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,e^{\frac{1}{2}x}\,x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)}\,W_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(x).$$

When $x \to \infty$, $E(\alpha, \beta :: x) \to \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$ and when $x \to 0$, $E(\alpha, \beta :: x) \to 0$, provided $R(\alpha), R(\beta) > 0$. In this paper I shall obtain certain integrals involving ${}_2F_1(a, b; c; -x)$ with the help of the E-function. I shall use the method of operational calculus.

The following results proved by B. VAN DER POL [1] and GOLDSTEIN [2] will be required in the sequel. The notation $\Phi(p) \doteqdot f(x)$ means that $\Phi(p)$ and $f(x)$ are operationally related by

$$\Phi(p) = p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx, \tag{1}$$

provided the integral converges. It is easy to see that

$$\frac{p}{p+a}\,\Phi(p+a) \doteqdot e^{-ax} f(x) \tag{A}$$

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(p)}{p}\,dp = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx. \tag{B}$$

If $\Phi(p) \doteqdot f(x)$, $\Psi(p) \doteqdot g(x)$, then

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(p)\,g(p)}{p}\,dp = \int_0^\infty \frac{f(x)\,\Psi(x)}{x}\,dx; \tag{C}$$

and TRICOMI [3] has proved that

$$\frac{1}{p^{\nu-1}}\,\Phi\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}\nu} J_\nu(2\sqrt{xs})\,f(s)\,ds. \tag{D}$$

2. Integral representation of the E-function.

The E-function has been defined as

$$(2) \quad \frac{1}{p^{\beta-1}} E(\alpha, \beta :: p) = \Gamma(\alpha)\, p \int_0^\infty e^{-px} \frac{x^{\beta-1}\, dx}{(1+x)^\alpha} \doteqdot \Gamma(\alpha) \frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^\alpha} \quad (R(\beta) > 0).$$

Let us write $k\,p$ for p. The relation (2) becomes

$$\frac{1}{p^{\beta-1}} E(\alpha, \beta :: k\,p) \doteqdot \Gamma(\alpha)\, k^\alpha \frac{x^{\beta-1}}{(k+x)^\alpha}.$$

Making use of the relation (A), we get

$$\frac{p}{(p+1)^\beta} E(\alpha, \beta :: k(p+1)) \doteqdot \Gamma(\alpha)\, k^\alpha \frac{e^{-x} x^{\beta-1}}{(k+x)^\alpha}.$$

Hence we get

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{E(\alpha, \beta :: k(t+1))\, dt}{(t+1)^\beta} = \Gamma(\alpha)\, k^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{\beta-2}}{(k+t)^\alpha}\, dt = \Gamma(\alpha)\, k^{\beta-1} \int_0^\infty \frac{e^{-kt} t^{\beta-2}}{(1+t)^\alpha}\, dt$$

$$= E(\alpha, \beta - 1 :: k) \qquad (R(\beta) > 1).$$

3. Other integrals.

From (D) we get

$$\frac{1}{p^{\nu-1}} \Phi\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}\nu} J_\nu(2\sqrt{xs})\, f(s)\, ds.$$

I have shown that [4]

$$p\, E\left(\alpha, \beta :: \frac{1}{p}\right) \doteqdot 2\, x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-1} K_{\beta-\alpha}(2\sqrt{x}).$$

Let $\Phi(p) = p\, E\left(\alpha, \beta :: \frac{1}{p}\right)$. Then

$$\frac{1}{p^\nu} E(\alpha, \beta :: p) \doteqdot 4\, x^{\frac{1}{2}\nu} \int_0^\infty s^{\alpha+\beta-1-\nu} J_\nu(2\sqrt{x\,s})\, K_{\beta-\alpha}(2s)\, ds$$

$$\doteqdot \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu+1; -x)$$

$(R(\alpha+\beta) > 0,\ |x| < 1)$. Writing $\nu - 1$ for ν, we get

$$(4) \quad \frac{1}{p^{\nu-1}} E(\alpha, \beta :: p) \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -x).$$

It is known that the function ${}_2F_1(a, b; c; -x)$ can be analytically continued [5] when $|x| \geqq 1$ and is an one-valued analytic function, regular in the whole plane supposed cut along the real axis from

-1 to $-\infty$. Also

$$ {}_2F_1(a, b; c; -x) \sim \frac{A}{x^a} + \frac{B}{x^b} $$

when x is large. We again make use of TRICOMI's relation (D). Applying it to (4), we get

$$ \frac{1}{p^{\mu-1}} p^{\nu-1} E\left(\alpha, \beta :: \frac{1}{p}\right) $$

$$ \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}\mu} s^{\nu-\frac{1}{2}\mu-1} J_\mu(2\sqrt{xs})\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -s)\, ds. \tag{5} $$

Let $\mu = \nu - 1$. After slight reductions we find that

$$ \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty J_{\nu-1}(2xs)\, s^\nu\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -s^2)\, ds = x^{\alpha+\beta-\nu-1} K_{\beta-\alpha}(2x) \tag{6} $$

$(R(\nu) > 0,\ R(\alpha) \geqq R(\beta) > \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4})$. From (5), we easily deduce that

$$ p^2 E\left(\alpha, \beta :: \frac{1}{p}\right) \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \{(xs)^{\frac{1}{2}(\nu-1)} J_{\nu-1}(2\sqrt{xs})\}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -s)\, ds. $$

In other words

$$ \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}\nu-1} s^{\frac{1}{2}\nu} J_{\nu-2}(2\sqrt{xs})\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -s)\, ds $$

$$ = 2 \frac{d}{dx} \{x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-2)} K_{\beta-\alpha}(2\sqrt{x})\}. $$

In a similar manner we can prove that

$$ \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty s^{\nu+m} J_{\nu-m-1}(2xs)\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -s^2)\, ds $$

$$ = x^{m+1-\nu} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx}\right)^m \{x^{\alpha+\beta-2} K_{\beta-\alpha}(2x)\} \tag{7} $$

$(R(\nu) > 0,\ R(\alpha) \geqq R(\beta) > \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4})$. We can also write (6) in the form

$$ \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty s^{2\nu-1} (2xs)^{-(\nu-1)} J_{\nu-1}(2xs)\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -s^2)\, ds $$

$$ = x^{\alpha+\beta-2\nu} K_{\beta-\alpha}(2x). $$

Differentiating with respect to x, we get

$$ \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty s^{\nu+1} J_\nu(2xs)\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \nu; -s^2)\, ds $$

$$ = (-1)\, x^\nu \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx}\right) \{x^{\alpha+\beta-2\nu} K_{\beta-\alpha}(2x)\}. $$

Proceeding exactly as before, we easily find that

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty s^{\nu+m}\,J_{\nu+m-1}(2xs)\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\nu;-s^2)\,ds$$

$$(8)\qquad = (-1)^m\,x^{m-1+\nu}\left(\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^m\{x^{\alpha+\beta-2\nu}\,K_{\beta-\alpha}(2x)\}$$

$\left(R(\nu+m)>0,\ R(\alpha)\geqq R(\beta)>\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}\right)$. Two particular cases of (6) are

$$\int_0^\infty \frac{s^\alpha J_{\alpha-1}(2xs)}{(1+s^2)^\beta}\,ds = \frac{x^{\beta-1}K_{\beta-\alpha}(2x)}{\Gamma(\beta)};$$

$$(9)\qquad \int_0^\infty J_1(2xs)\log(1+s^2)\,ds = x^{-1}K_0(2x).$$

4. Certain deductions.

We can deduce several interesting integrals from the relation (6). When n is an even integer,

$$2^{2n-1}\cos^{2n}\Theta = \cos 2n\Theta + 2n\cos(2n-2)\Theta + \frac{2n(2n-1)}{2!}\cos(2n-4)\Theta + \cdots + \frac{1}{2}\frac{2n!}{n!\,n!}.$$

When n is an odd integer,

$$2^{2n-2}\cos^{2n-1}\Theta = \cos(2n-1)\Theta + (2n-1)\cos(2n-3)\Theta + \frac{(2n-1)(2n-2)}{2!}\cos(2n-5)\Theta + \cdots + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}\cos\Theta.$$

Let $\alpha=\beta=n$ where n is a positive integer and $\nu=1$. Writing $x\cos\Theta$ for x, we get

$$\int_0^\infty s\,J_0(2xs\cos\Theta)\,{}_2F_1(n,n;1;-s^2)\,ds$$

$$= \frac{x^{2n-2}}{2^{2n-3}\{\Gamma(n)\}^2}\Big\{\cos(2n-2)\Theta + (2n-2)\cos(2n-4)\Theta + \frac{(2n-2)(2n-3)}{2!}\cos(2n-6)\Theta + \cdots + \frac{1}{2}\frac{(2n-2)!}{\{n-1!\}^2}\Big\}K_0(2x\cos\Theta).$$

Integrating both sides with respect to Θ between the limits zero and $\frac{1}{2}\pi$ and changing the order of integrations, we get

$$\int_0^\infty s\,J_0^2(xs)\,{}_2F_1(n,n;1;-s^2)\,ds$$

$$(10)\qquad = (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{2^{2n-3}\{\Gamma(n)\}^2}\Big\{I_{n-1}(x)K_{n-1}(x) - (2n-2)I_{n-2}(x)K_{n-2}(x) + \frac{(2n-2)(2n-3)}{2!}I_{n-3}(x)K_{n-3}(x) - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2}I_0(x)K_0(x)\Big\}.$$

If we take $n = 1$, we get

$$\int_0^\infty \frac{s J_0^2(x s)}{1 + s^2} d s = I_0(x) K_0(x).$$

Replacing $\cos \Theta$ by $\cos h \Theta$ and putting $\nu = \frac{3}{2}$ and proceeding as before, we get (the limits of integration being zero and infinity):

$$(11) \quad \int_0^\infty s J_0(2 x s) {}_2F_1(n, n; \tfrac{3}{2}, -s^2) d s$$
$$= \frac{x^{2n-2}}{2^{2n-2} \{\Gamma(n)\}^2} \left\{ K_{n-1}^2(x) + (2n-2) K_{n-2}^2(x) + \cdots + \frac{1}{2} \frac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2} K_0^2(x) \right\}.$$

Putting $\nu = \frac{1}{2}$, we obtain

$$(12) \quad \int_0^\infty Y_0(2 x s) {}_2F_1(n, n; \tfrac{1}{2}; -s^2) d s$$
$$= -\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-2} \{\Gamma(n)\}^2} \left\{ K_{n-\frac{1}{2}}^2(x) + (2n-1) K_{n-\frac{3}{2}}^2(x) + \cdots + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\, n!} K_{\frac{1}{2}}^2(x) \right\}.$$

Again when n is a positive integer,

$$2^{2n-1} \sin h^{2n} \Theta = \cos h\, 2n\Theta - 2n \cos h(2n-2)\Theta + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2} \frac{2n!}{(n!)^2}.$$

Putting $x \sin h \Theta$ for x in (6) and $\nu = 1$, and integrating with respect to Θ between the limits zero and infinity, we get on changing the order of integration,

$$\int_0^\infty s I_0(x s) K_0(x s) {}_2F_1(n, n; 1; -s^2) d s$$
$$(13) \quad = \frac{\pi^2 x^{2n-2}}{2^{2n} \{\Gamma(n)\}^2} \left\{ (J_{n-1}^2(x) + Y_{n-1}^2(x)) - (2n-2)(J_{n-2}^2(x) + Y_{n-2}^2(x)) + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \frac{(2n-2)!}{(n-1!)^2} (J_0^2(x) + Y_0^2(x)) \right\}.$$

A particular case of this is

$$\int_0^\infty \frac{s I_0(x s) K_0(x s)}{1 + s^2} d s = \frac{\pi^2}{8} (J_0^2(x) + Y_0^2(x)).$$

Similarly putting $x \cos \Theta$ for x and $\nu = \frac{3}{2}$, and proceeding as before, we get (the limits of integration being zero and $\frac{1}{2}\pi$),

$$\int_0^\infty s H_0(2 x s) {}_2F_1(n, n; \tfrac{3}{2}, -s^2) d s$$
$$(14) \quad = \pi \frac{x^{2n-2} (-1)^{n-1}}{2^{2n-2} \{\Gamma(n)\}^2} \left\{ I_{n-1}(x) K_{n-1}(x) - (2n-2) I_{n-2}(x) K_{n-2}(x) + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \frac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2} \right\}.$$

5. Certain operational representations.

GOLDSTEIN ([2], 119) has proved that

$$e^{-\frac{1}{2}t}\,t^{l-1}\,W_{k,m}(t) \doteqdot \frac{\Gamma(l+m+\frac{1}{2})\,\Gamma(l-m+\frac{1}{2})}{\Gamma(l-k+1)}\,p \times$$
$$\times\, {}_2F_1(l+m+\tfrac{1}{2},\, l-m+\tfrac{1}{2};\; l-k+1;\; -p)$$

$(l \mp m + \frac{1}{2} > 0)$. Also we know that

$$\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}n} J_n(2\sqrt{a\,t}) \doteqdot e^{-\frac{a}{p}}\,p^{-n}.$$

Making use of (C), we get

$$\int_0^\infty e^{-\frac{a}{t}-\frac{1}{2}t}\,t^{l-n-2}\,W_{k,m}(t)\,dt$$
$$= 2\,\frac{\Gamma(l+m+\frac{1}{2})\,\Gamma(l-m+\frac{1}{2})}{\Gamma(l-k+1)\,a^{\frac{1}{2}n}} \int_0^\infty t^{n+1}\,J_n(2\sqrt{a\,t}) \times$$
$$\times\, {}_2F_1(l+m+\tfrac{1}{2},\, l-m+\tfrac{1}{2};\; l-k+1;\; -t^2)\,dt.$$

Let $n = r+l-k$. We have, on writing $a = p = q^2$, t^{-1} for t and making use of (8),

$$p\int_0^\infty e^{-pt-\frac{1}{2t}}\,t^{r-k}\,W_{k,m}\left(\frac{1}{t}\right)dt = (-1)^r\,2\,q^2\left(\frac{1}{2\,q}\,\frac{d}{d\,q}\right)^r\{q^{2k-1}\,K_{2m}(2\,q)\};$$

on interpretation, we have

$$2\,q^2\left(\frac{1}{2\,q}\,\frac{d}{d\,q}\right)^r\{q^{2k-1}\,K_{2m}(2\,q)\} \doteqdot (-1)^r\,e^{-\frac{1}{2t}}\,t^{r-k}\,W_{k,m}\left(\frac{1}{t}\right). \tag{15}$$

It is also easy to see that

$$\frac{d^r}{d\,t^r}\{e^{-\frac{1}{2}t}\,t^{l-1}\,W_{k,m}(t)\} \doteqdot \frac{\Gamma(l+m+\frac{1}{2})\,\Gamma(l-m+\frac{1}{2})}{\Gamma(l-k+1)}\,p^{r+1} \times$$
$$\times\, {}_2F_1(l+m+\tfrac{1}{2},\, l-m+\tfrac{1}{2};\; l-k+1;\; -p)$$

$(l \mp m + \frac{1}{2} \geqq r > 0)$. Proceeding exactly as above, we obtain, from (7),

$$\int_0^\infty e^{-\frac{a}{t}}\,\frac{d^r}{d\,t^r}\{e^{-\frac{1}{2}t}\,t^{l-1}\,W_{k,m}(t)\}\,t^{k+r-l-1}\,dt$$
$$= 2\,a^{k+r-l}\left(\frac{1}{2\,q}\,\frac{d}{d\,q}\right)^r\{q^{2l-1}\,K_{2m}(2\,q)\}.$$

Let $t' = t^{-1}$. Then

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[\left\{\left(\frac{d}{d\,t'}\right)^r e^{-\frac{1}{2}t'}\,t'^{l-1}\,W_{k,m}(t')\right\}t'^{(k+r-l+1)}\right]dt$$
$$= 2\,q^{2(k+r-l)}\left(\frac{1}{2\,q}\,\frac{d}{d\,q}\right)^r\{q^{2l-1}\,K_{2m}(2\,q)\}.$$

Hence

$$\left[\left\{\left(\frac{d}{dt'}\right)^r e^{-\frac{1}{2}t'} t'^{l-1} W_{k,m}(t')\right\} t'^{(k+r-l+1)}\right]_{t'=\frac{1}{t}}$$

(16)

$$\doteqdot 2\, q^{2(k+r-l+1)} \left(\frac{1}{2q}\frac{d}{dq}\right)^r \{q^{2l-1} K_{2m}(2q)\}.$$

If we put $r = 0$, we fall back upon the results of GOLDSTEIN [6].

It now remains for us to justify the process of changing the order of integration and of differentiation under the sign of integration. They can be justified by means of the following two theorems (cf. CARSLAW [6]):

I. Let $f(y) = \int_a^\infty F(x,y)\,dx$, where $F(x,y)$ is a continuous function of (x,y) in $a \leqq x \leqq a'$, $b \leqq y \leqq b'$, a' being arbitrary. Also let $\int_a^\infty F(x,y)\,dx$ converge uniformly in (b,b'). Then

$$\int_{y_0}^{y} dy \int_a^\infty F(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_{y_0}^{y} F(x,y)\,dy,$$

where y_0, y are any two points in (b,b').
When the upper limit of y is infinite, the process is justifiable, the conditions being given by HOBSON [7].

II. Let $F(x,y)$ be a continuous function of (x,y) in the interval $a \leqq x \leqq a'$, $b \leqq y \leqq b'$, a' being arbitrary. Also let $F(x,y)$ have a partial differential coefficient $\frac{\partial F}{\partial y}$ which satisfies the same conditions. Then if the integral $\int_a^\infty F(x,y)\,dx$ converges to $f(y)$, and the integral $\int_a^\infty \frac{\partial F}{\partial y}\,dx$ converges uniformly in (b,b'), $f(y)$ has a differential coefficient at every point in (b,b') and $f'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial y}\,dx$.

The theorem also holds good if $F(x,y)$ is of the form $f_1(x,y)\psi_1(x)$, where $f_1(x,y)$ is continuous as above and $\psi_1(x)$ ist bounded and integrable in the arbitrary interval (a,a').

I wish to express my indebtedness to Dr. S. C. MITRA for his help and guidance in the preparation of the paper.

References.

[1] B. VAN DER POL.
Laboratorie N. V. Philips' Gloeilampen fabrieken, Eindhoven, Holland, **1935**, 18—32.

[2] S. Goldstein.
Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, **34** (1932), 103—125.
[3] F. Tricomi.
Rendic. Acc. dei Lincei (6) **21** (1935), 232, 332, 420.
[4] N. N. Bose.
Bull. Calcutta Math. Soc. **42** (1950), 94.
[5] Whittaker and Watson.
Modern Analysis, 3rd ed. (1920), 289.
[6] H. S. Carslaw.
Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals. 3rd ed. (1930), 200—202.
[7] E. W. Hobson.
The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series (1907), 587.
[8] Mac Robert.
Quart. Journ. of Math. **13**, 65—68 (1942).

(Eingegangen am 8. Dezember 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 168–180 (1951).

Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen.

Von

Tibor Szele in Debrecen (Ungarn).

§ 1.

Einleitung.

Es ist eine wichtige Aufgabe, sämtliche Ringe[1]) zu bestimmen, die eine gegebene (additive) ABELsche Gruppe $\mathfrak{G}$ zur Additionsgruppe haben, oder — wie wir uns im folgenden ausdrücken wollen — die sich auf $\mathfrak{G}$ aufbauen lassen. Dabei kann es geschehen, daß diese Ringe durch ihre Additionsgruppe $\mathfrak{G}$ in sehr hohem Maße determiniert sind. Die stärkste Forderung, die man in dieser Hinsicht aufstellen kann, besteht darin, daß man von der Gruppe $\mathfrak{G}$ verlangt, daß sich auf $\mathfrak{G}$ nur ein einziger Ring aufbauen läßt[2]). Eine Gruppe von dieser Eigenschaft nennen wir eine *Nilgruppe*. Da sich auf jeder Additionsgruppe ein Ring von trivialer multiplikativer Struktur — üblicherweise *Zeroring* genannt — aufbauen läßt, in dem jedes Elementenprodukt gleich Null ist, sind die Nilgruppen auch dadurch charakterisiert, daß sich auf ihnen nur Zeroringe aufbauen lassen. In einer früheren Arbeit [8] sind sämtliche Niltorsionsgruppen angegeben und ist die Nichtexistenz von gemischten Nilgruppen nachgewiesen[3]). (Vgl. auch Hilfssätze 4, 9 in der vorliegenden Arbeit.) Alle torsionsfreien Nilgruppen anzugeben gelang mir bisher nicht. (Bezüglich einer hinreichenden Bedingung siehe jedoch Hilfssatz 3.)

Der Begriff der Nilgruppe läßt sich in zweierlei Richtungen verallgemeinern. Es stellt sich vor allem die Frage: Auf welchen Gruppen lassen sich genau r Ringe (d. h. genau $r-1$ Nichtzeroringe) aufbauen?[2]) Eine Gruppe von dieser Eigenschaft wird als eine *Quasinilgruppe r-ter Art* bezeichnet. Die Quasinilgruppen erster Art sind also nichts anders, als die Nilgruppen. Die Quasinilgruppen *zweiter Art* — die uns jetzt allein interessieren und in der vorliegenden Arbeit sämtlich angegeben werden — nennen wir *Quasinilgruppen* schlechthin.

---

[1]) Es sind nicht nur kommutative Ringe gemeint.

[2]) Isomorphe Ringe werden als gleich betrachtet.

[3]) Bezüglich der verwendeten Benennungen und Bezeichnungen siehe Ende der Einleitung. — Die Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf die Arbeiten, die im Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit angeführt sind.

Eine andere Möglichkeit zur Verallgemeinerung des Begriffes der Nilgruppe ergibt sich aus folgender Charakterisierung der Nilgruppen: $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann eine Nilgruppe, wenn für jeden auf $\mathfrak{G}$ aufgebauten Ring R die Idealgleichung $R^2 = (0)$ gilt. Demgemäß schreibe man einer Gruppe $\mathfrak{G}$ die *Nilstufe* s $(= 1, 2, 3, \ldots)$ zu, wenn sich auf $\mathfrak{G}$ ein Ring R mit $R^s \neq (0)$, dagegen kein Ring R mit $R^{s+1} \neq (0)$ aufbauen läßt. Dann sind die Nilgruppen identisch mit den Gruppen von der Nilstufe 1. Es stellt sich die Frage, ob Gruppen von beliebig vorgeschriebener Nilstufe existieren. In dieser Arbeit werden wir diese Frage ausführlich behandeln, und zwar wird dies je für Torsionsgruppen, gemischte und torsionsfreie Gruppen einzeln geschehen.

Betreffs der verwendeten Bezeichnungen und Benennungen bemerken wir folgendes: Unter einer *Gruppe* verstehen wir durchweg eine additive Abel'sche Gruppe mit mehr als einem Element. Gruppen und Ringe sind mit einem großen gotischen bzw. lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die Buchstaben $x, a, b, \ldots, g$ bezeichnen immer Elemente von Gruppen oder Ringen, dagegen sind die übrigen kleinen lateinischen Buchstaben für ganze rationale Zahlen (insbesondere p für Primzahlen) reserviert. Mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen wir immer rationale Zahlen. Die durch die Elemente $a, b, \ldots$ einer Gruppe erzeugte Untergruppe bezeichnen wir mit $\{a, b, \ldots\}$. Eine Gruppe mit lauter Elementen endlicher Ordnung heißt eine *Torsionsgruppe*. Im entgegengesetzten Falle, wo nämlich alle Elemente $(\neq 0)$ einer Gruppe von unendlicher Ordnung sind, spricht man von einer *torsionsfreien* Gruppe. Eine Gruppe, die weder torsionsfrei, noch eine Torsionsgruppe ist, heißt eine *gemischte* Gruppe.

Gilt für irgendwelche Elemente a, b einer Gruppe die Gleichung $nb = a$ mit einer natürlichen Zahl n, so sagen wir: „Das Element a ist *teilbar* durch n" und drücken dies mit dem in der Zahlentheorie gebräuchlichen Symbol $n \mid a$ aus. Bei gegebenen $n \neq 0, m, a$ besitzt die Gleichung $nx = ma$ in einer torsionsfreien Gruppe höchstens eine Lösung x. Dieses Element x der Gruppe — falls es überhaupt existiert — kann also ohne Gefahr eines Mißverständnisses durch $\frac{m}{n} a$ bezeichnet werden. Die Additionsgruppe sämtlicher rationaler Zahlen bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{R}$ und $a \neq 0$ ein solches Element in einer torsionsfreien Gruppe $\mathfrak{G}$, mit welchem das Element ϱa in $\mathfrak{G}$ für jede rationale Zahl $\varrho \in \mathfrak{U}$ existiert, so bilden alle diese ϱa eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die mit $\mathfrak{U} a$ bezeichnet wird und isomorph zur Gruppe $\mathfrak{U}$ ist. Einige Untergruppen der *rationalen Gruppe* $\mathfrak{R}$ spielen im folgenden eine besonders wichtige Rolle. Für eine bestimmte natürliche Zahl n sei die Untergruppe $\mathfrak{P}_n$ von $\mathfrak{R}$ durch

$$\mathfrak{P}_n = \left\{ \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \frac{1}{5^n}, \ldots, \frac{1}{p^n}, \ldots \right\} \tag{1}$$

definiert. Diese Gruppe besteht offenbar aus allen rationalen Zahlen,

deren Nenner durch keine $(n+1)$-te Potenz (>1) teilbar sind. Sei andererseits

$$\mathfrak{Q}_n = \left\{\mathfrak{P}_n, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \ldots\right\} \tag{2}$$

(d. i. die Additionsgruppe aller rationalen Zahlen, deren Nenner durch keine *ungerade* $(n+1)$-te Potenz (>1) teilbar sind).

Auf Grund einer Analogie mit der STEINITZ'schen Theorie der kommutativen Körper [10] nennen wir eine Gruppe $\mathfrak{G}$ *algebraisch abgeschlossen*, falls jede Gleichung $nx = g \in \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ lösbar ist. Gleichwertig damit ist die Forderung: $n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ für jede natürliche Zahl n. Die algebraisch abgeschlossenen Gruppen werden in der Literatur gewöhnlich „komplette" Gruppen genannt. Neben der Gruppe $\mathfrak{R}$ ist ein anderes wichtiges Beispiel für algebraisch abgeschlossene Gruppen PRÜFER's Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ (bisweilen auch primäre quasizyklische Gruppe genannt). Die Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ ist (für irgendeine Primzahl p) als die Faktorgruppe

$$\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \ldots\right\} / \{1\} \tag{3}$$

definiert. Sie läßt sich auch als die Gruppe definieren, die durch die unendlich vielen Elemente $c_1, c_2, \ldots$ mit den Relationen

$$c_1 \neq 0,\ pc_1 = 0,\ pc_2 = c_1,\ pc_3 = c_2, \ldots \tag{4}$$

erzeugt wird.

$\mathfrak{Z}(m)$ bezeichnet die zyklische Gruppe von der (endlichen) Ordnung m. Den Primkörper der Charakteristik 0 bzw. p bezeichnen wir mit $K(0)$ bzw. $K(p)$. Die direkte Summe (von Gruppen bzw. Ringen) soll mit $+$ bezeichnet werden; auch das Symbol Σ verwenden wir zu diesem Zweck. Die n-te Potenz R^n eines Ringes R ist als die durch sämtliche Produkte $a_1 \ldots a_n$ $(a_i \in R)$ erzeugte Untergruppe der Additionsgruppe von R definiert. R^n ist offenbar ein zweiseitiges Ideal in R. Ein Ring R heißt *nilpotent*, falls es eine natürliche Zahl n mit $R^n = (0)$ gibt. Unter einem *Annullator* eines Ringes R verstehen wir ein Element $a \neq 0$ von R, für welches $aR = Ra = (0)$ gilt. Ein Zeroring ist also ein Ring, in dem jedes Element ein Annullator ist. Den Zeroring mit $\mathfrak{G}$ als Additionsgruppe bezeichnen wir mit $[\mathfrak{G}]_0$.

§ 2.

Sätze.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist, folgende Sätze 1, 2 zu beweisen.

Satz 1. *Jede Quasinilgruppe ist isomorph zu einer der folgenden Gruppen*:

$$\mathfrak{R}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{Z}(p), \tag{6}$$

(7) $$\mathfrak{Z}(p) + \sum \mathfrak{Z}(p_\nu^\infty) \qquad (p_\nu \neq p),$$

(8) $$\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{B};$$

($\mathfrak{B}$ *ist eine torsionsfreie Nilgruppe mit* $p\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$).

In (7) *steht eine direkte Summe von beliebig vielen Gruppen* $\mathfrak{Z}(p_\nu^\infty)$, *wobei die* p_ν *von einander nicht notwendig verschiedene Primzahlen bezeichnen, die aber sämtlich* $\neq p$ *sind.*

Bemerkungen. Nach Satz 1 erschöpfen die Gruppen (5)—(8) sämtliche Additionsgruppen, auf denen sich genau zwei Ringe aufbauen lassen. Diese Gruppen sind mit Ausnahme des Types (8) explizit angegeben. Bezüglich des Types (8) können wir augenblicklich bloß die Existenz einer beliebigen Mächtigkeit solcher Gruppen zeigen. Sei nämlich $\mathfrak{R}_p$ diejenige Untergruppe der rationalen Gruppe $\mathfrak{R}$, die aus allen rationalen Zahlen besteht, deren Nenner jede von p verschiedene Primzahl mit der Vielfachheit 0 oder 1 enthalten. Dann ist die direkte Summe einer beliebigen Anzahl von Gruppen $\mathfrak{R}_p$ nach Hilfssatz 3 eine torsionsfreie Nilgruppe, in der jedes Element durch p teilbar ist.

Die Gruppen (5) und (6) sind gerade die Additionsgruppen der Primkörper und nach Satz 1 sind diese Gruppen sämtliche direkt unzerlegbaren Quasinilgruppen. (Daß diese Gruppen sämtliche Quasinilgruppen *ersten Ranges* erschöpfen, ist schon ein Resultat der Arbeit [5]). In den Fällen (5) und (6) ist also der einzige Nichtzeroring, der sich auf der betrachteten Gruppe aufbauen läßt, nullteilerfrei, sogar Körper. Dagegen wird sich zeigen, daß die einzigen Nichtzeroringe mit den Gruppen (7) bzw. (8) als Additionsgruppen in gewissem Sinne den Zeroringen nahe stehen, indem sie unendlich viele Annullatoren enthalten. Diese Tatsache gibt uns Anlaß zur folgenden gruppentheoretischen Charakterisierung der Primkörper:

Unter allen Ringen ohne Annullatoren (insbesondere also unter allen Ringen mit Einselement) sind die Primkörper dadurch ausgezeichnet, daß sich auf ihren Additionsgruppen keine weiteren Nichtzeroringe aufbauen lassen.

Wir bemerken, daß eine andersartige Kennzeichnung der Primkörper von seiten der Gruppentheorie im folgenden Satz enthalten ist: Der Endomorphismenring einer Abel'schen Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann ein Schiefkörper, wenn $\mathfrak{G}$ gleich der Additionsgruppe eines Primkörpers ist, und der Endomorphismenring ist dann gleich diesem Primkörper [7], [6].

Das Auftreten der endlichen Gruppen in diesem Zusammenhang macht die Existenz von nicht-torsionsfreien Quasinilgruppen r-ter Art (mit einem beliebig vorgeschriebenen $r > 2$) unmittelbar klar (vgl. Hilfssatz 5), vermindert aber zugleich das Interesse der Aufgabe, sämtliche solche Gruppen zu bestimmen. Merkwürdig ist dagegen, daß *die ratio-*

nale Gruppe $\mathfrak{R}$ nach Satz 1 *die einzige torsionsfreie Quasinilgruppe* (2-ter Art) *ist* und daß mir bisher keine torsionsfreie Quasinilgruppe r-ter Art mit $r > 2$ bekannt ist. Es besteht daher die Vermutung, daß sich auf einer torsionsfreien Gruppe, die keine Nilgruppe und nicht isomorph zur Gruppe $\mathfrak{R}$ ist, immer unendlich viele verschiedene Ringe aufbauen lassen.

Satz 2. *Einer Torsionsgruppe kann keine von* 1 *verschiedene Nilstufe zukommen. Eine gemischte Gruppe kann jede vorgeschriebene natürliche Zahl* $s \geqq 2$ *als Nilstufe besitzen, eine torsionsfreie Gruppe jede natürliche Zahl* $s \geqq 1$.

§ 3.

Hilfssätze.

Der Beweis der Sätze 1, 2 wird durchsichtiger, wenn wir einige Hilfssätze vorausschicken.

Hilfssatz 1 (von Baer [1], [2], [3]). *Eine algebraisch abgeschlossene Gruppe ist direkte Summe von Gruppen* $\mathfrak{Z}(p_\nu^\infty)$ *und* $\mathfrak{R}$, *und ist ein direkter Summand von jeder sie enthaltenden Gruppe.*

Für den Beweis dieses Hilfssatzes verweisen wir z. B. auf die Arbeit [10].

Hilfssatz 2 (von Kulikoff). *Für eine nicht-torsionsfreie Gruppe* $\mathfrak{G}$ *gilt entweder*

$$\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{Z}(p_\nu^\infty) + \mathfrak{U} \qquad (\mathfrak{U} \text{ ist torsionsfrei oder } \mathfrak{U} = (0)), \tag{9}$$

oder

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p^m) + \mathfrak{V}; \qquad (1 \leqq m < \infty;\ \mathfrak{V} \geqq (0) \text{ beliebig}). \tag{10}$$

Der Inhalt dieses Hilfssatzes folgt — unter Anwendung des obigen Hilfssatzes 1 — aus den Resultaten von Kulikoff [4]. Für einen kurzen Beweis verweisen wir auf die Note [9] [4]).

Hilfssatz 3. *Folgende Bedingung ist hinreichend dafür, daß eine torsionsfreie Gruppe* $\mathfrak{G}$ *eine Nilgruppe ist: Es gibt eine Menge* $\Pi = (p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots)$ *von Primzahlpotenzen* $(\alpha_i > 0)$, *die zu verschiedenen Primzahlen* p_i *gehören, mit der Eigenschaft*

$$p_1^{\alpha_1+1}\mathfrak{G} \cap p_2^{\alpha_2+1}\mathfrak{G} \cap \ldots = (0), \tag{11}$$

und zugleich ist jedes Element von $\mathfrak{G}$ *durch alle Primzahlpotenzen* $p_i^{\alpha_i}$ *aus* Π *mit Ausnahme von höchstens endlich vielen teilbar* [5]).

Beweis. Sei $\mathfrak{G}$ eine torsionsfreie Gruppe, die der Bedingung des Hilfssatzes 3 genügt, und R ein Ring mit $\mathfrak{G}$ als Additionsgruppe. Sind g_1 und g_2 zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{G}$, so gilt nach Voraussetzung $g_1 = p_i^{\alpha_i} g_1'$, $g_2 = p_i^{\alpha_i} g_2'$ $(g_1', g_2' \in \mathfrak{G})$ für „fast alle" $p_i^{\alpha_i}$ aus Π.

[4]) Die Arbeit [4] war mir beim Schreiben der Note [9] noch unbekannt.

[5]) Aus (11) folgt, daß Π eine unendliche Menge ist, und daß auch der Durchschnitt fast aller Untergruppen $p_i^{\alpha_i+1}\mathfrak{G}$ gleich (0) ist.

Folglich ist das Produkt (im Ring R) $g_1 g_2 = p_i^{a_i} g_1' \cdot p_i^{a_i} g_2' = p_i^{2a_i} g_1' g_2'$ ein Element der Untergruppe $p_i^{a_i+1}\mathfrak{G}$; und da dies für fast alle Primzahlpotenzen aus Π gültig ist, folgt aus (11) $g_1 g_2 = 0$ [5]). Demnach ist R ein Zeroring und Hilfssatz 3 richtig.

Hilfssatz 4. *Eine Torsionsgruppe ist dann und nur dann eine Nilgruppe, wenn sie von der Form*

$$\sum \mathfrak{Z}(p_i^\infty) \tag{12}$$

ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß eine Gruppe (12) eine Nilgruppe ist. Das folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß (12) eine algebraisch abgeschlossene Torsionsgruppe ist. Sind nämlich a, b beliebige Elemente der Gruppe (12), so ist $nb = 0$ und $na' = a$ für eine natürliche Zahl n und ein geeignetes Element a' der Gruppe. Mithin gilt für das Produkt von a und b in irgendeinem auf (12) aufgebauten Ring die Gleichung $ab = na'b = a' \cdot nb = 0$. (12) ist also eine Nilgruppe.

Ist andererseits $\mathfrak{G}$ eine Torsionsgruppe, die nicht von der Form (12) ist, so läßt sich $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 2 in der Form (10) darstellen. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ in (10) ist aber offenbar keine Nilgruppe, denn die direkte Summe des Restklassenringes mod p^m (gebildet im Ring der ganzen Zahlen) und des Zeroringes $[\mathfrak{B}]_0$ ist ein Ring mit $\mathfrak{G}$ als Additionsgruppe, der kein Zeroring ist. Hilfssatz 4 ist also bewiesen.

Hilfssatz 5. *Auf der zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}(p^m)$ lassen sich genau $m+1$ Ringe aufbauen.*

Sind nämlich $a, 2a, \ldots, p^m a = 0$ alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{Z}(p^m)$, so ergeben sich die Ringe mit $\mathfrak{Z}(p^m)$ als Additionsgruppe durch die Vorschrift

$$a^2 = p^k a \qquad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{13}$$

Die extremalen Fälle $k = 0, m$ entsprechen dem Ring mit Einselement (d. h. dem Restklassenring mod p^m) bzw. dem Zeroring.

Hilfssatz 6. *Ist $\mathfrak{A}$ eine torsionsfreie Gruppe, so lassen sich auf den Gruppen*

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{R}e, \tag{14}$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{Z}(p^\infty) \tag{15}$$

mehr als zwei Ringe aufbauen. (Dabei bezeichnet $\mathfrak{R}e$ eine zur Gruppe $\mathfrak{R}$ isomorphe abstrakte Gruppe.)

Beweis. Der auf (14) aufgebaute Zeroring ergibt zusammen mit der direkten Summe $[\mathfrak{A}]_0 + K(0)$ schon zwei Ringtypen mit (14) als Additionsgruppe. Wir konstruieren jetzt einen dritten Typ R, wofür $R^2 \neq (0)$, aber $R^3 = (0)$ gilt. Die Konstruktion dieses Ringes fangen wir mit dem algebraischen Abschließen der Gruppe $\mathfrak{A}$ an. Da $\mathfrak{A}$ eine torsionsfreie Gruppe ist, kann dies sehr leicht, nach dem wohlbekannten Muster der „Quotientenbildung", durchgeführt werden: Die Menge

sämtlicher Paare (a, s) mit $a \in \mathfrak{A}$ und natürlichen Zahlen s wird zu einer torsionsfreien Gruppe $\overline{\mathfrak{A}}$, wenn man für ihre Elemente eine Gleichheit und eine Addition durch

$$(a, s) = (a', s')$$

dann und nur dann, falls $s'a = sa'$,

$$(a, s) + (a', s') = (s'a + sa', ss')$$

definiert. Die Gruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ ist algebraisch abgeschlossen, da das Element $x = (a, ns)$ offenbar eine Lösung (und zwar die einzige Lösung) der Gleichung $nx = (a, s)$ in $\overline{\mathfrak{A}}$ ist. Identifiziert man die Elemente $(a, 1)$ von $\overline{\mathfrak{A}}$ mit a, so wird die Gruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ zu einer Erweiterungsgruppe von $\mathfrak{A}$. Sei $a_0 \neq 0$ ein beliebiges, aber festes Element von $\mathfrak{A}$. Die Menge aller Elemente ϱa_0 mit beliebigen rationalen Zahlen ϱ bilden die zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{R}a_0$ in $\overline{\mathfrak{A}}$, welche nach Hilfssatz 1 ein direkter Summand von $\overline{\mathfrak{A}}$ ist:

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{R}a_0 + \mathfrak{B}.$$

Demnach gilt für die Elemente von $\overline{\mathfrak{A}}$ — und insbesondere für die von $\mathfrak{A}$ — die eindeutige Darstellung

$$\varrho a_0 + b \qquad (a_0 \in \mathfrak{A},\ b \in \mathfrak{B},\ \varrho \in \mathfrak{R}). \tag{16}$$

(Man bemerke aber, daß für ein Element (16) von $\mathfrak{A}$ sehr wohl $\varrho a_0 \overline{\in} \mathfrak{A}$ und $b \overline{\in} \mathfrak{A}$ gelten kann.)

Nun definieren wir eine Multiplikation für die Elemente der Additionsgruppe (14) folgendermaßen. Sind $g = \varrho a_0 + b + \sigma e$ und $g' = \varrho' a_0 + b' + \sigma' e$ zwei beliebige Elemente der Gruppe (14), so sei

$$gg' = \varrho\varrho' e.$$

Für den so erhaltenen Ring R gilt offenbar $R^3 = (0)$, dagegen ist R wegen $a_0^2 = e \neq 0$ kein Zeroring.

Bei der Konstruktion eines auf der Additionsgruppe (15) aufgebauten Nichtzeroringes gehen wir ebenfalls von der Darstellung (16) der Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}$ aus. Wir wählen (4) zum Erzeugendensystem der Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ in (15) und definieren vor allem ϱc_m — für jede rationale Zahl ϱ und eine beliebige, aber feste natürliche Zahl m — als ein wohlbestimmtes Element der Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$. Und zwar sei ϱc_m für $\varrho = \frac{u}{p^k v}$ mit $p \nmid v$, $k \geqq 0$ als die (einzige) Lösung $x \in \{c_{m+k}\}$ der Gleichung $vx = u c_{m+k}$ definiert. Dann ist

$$(\varrho + \varrho') c_m = \varrho c_m + \varrho' c_m. \tag{17}$$

Nun kann eine Multiplikation für die Elemente der Additionsgruppe (15) folgendermaßen erklärt werden. Sind $g = \varrho a_0 + b + c$ und

$g' = \varrho' a_0 + b' + c'$ $(c, c' \in \mathfrak{Z}(p^\infty))$ zwei beliebige Elemente der Gruppe (15), dann sei

$$g g' = \varrho \varrho' c_m . \tag{18}$$

Die so definierte Multiplikation gehorcht nach (17) dem Distributivgesetz und sie ist trivialerweise assoziativ, da nämlich jedes Produkt von drei Faktoren gleich 0 ist. Wir haben also einen Ring R_m auf der Gruppe (15) aufgebaut. Aus $a_0^2 = c_m \neq 0$ folgt, daß R_m kein Zeroring ist und daß der Ring R_1 ein Element der (additiven) Ordnung p enthält, welches Quadrat eines Elements von R_1 ist. Letztere Behauptung gilt für den Ring R_2 offensichtlich nicht, da ein Quadrat $\neq 0$ in R_2 nach (18) mindestens die (additive) Ordnung p^2 haben muß. R_1, R_2 und der Zeroring ergeben also drei verschiedene Ringe mit (15) als Additionsgruppe. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes 6 beendet.

Hilfssatz 7. *Ist für eine Gruppe* $\mathfrak{B}$ *und eine Primzahl* p $p\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}$, *so lassen sich auf der Gruppe*

$$\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{B} \tag{19}$$

mehr als zwei Ringe aufbauen.

Beweis. Der Zeroring ergibt zusammen mit $K(p) + [\mathfrak{B}]_0$ schon zwei Ringtypen mit (19) als Additionsgruppe. Um die Richtigkeit des Hilfssatzes 7 zu zeigen, konstruieren wir noch einen dritten Typ R mit $R^2 \neq (0)$, $R^3 = (0)$. Da $p\mathfrak{B}$ nach Voraussetzung eine echte Untergruppe von $\mathfrak{B}$ ist, enthält die Faktorgruppe $\mathfrak{B}/p\mathfrak{B}$ mehr als ein Element, und sie zerfällt — als eine „elementare p-Gruppe" mit lauter Elementen $(\neq 0)$ p-ter Ordnung — in die direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{Z}(p)$. Folglich läßt sich $\mathfrak{B}/p\mathfrak{B}$ und somit auch $\mathfrak{B}$ auf die Gruppe $\mathfrak{Z}(p)$ homomorph abbilden. Sei nun $b \to \bar{b}$ $(b \in \mathfrak{B}, \bar{b} \in \mathfrak{Z}(p))$ eine bestimmte homomorphe Abbildung des zweiten direkten Summanden in (19) auf den ersten. Dann läßt sich eine Multiplikation für die Elemente der Additionsgruppe (19) folgendermaßen erklären: Ist $\mathfrak{Z}(p) = \{c\}$ und sind $g = ic + b$, $g' = i'c + b'$ $(b, b' \in \mathfrak{B})$ zwei beliebige Elemente der Gruppe (19) mit $\bar{b} = kc$, $\bar{b}' = k'c$, so sei

$$g g' = k k' c.$$

Für den so erhaltenen Ring R gilt offenbar $R^2 \neq (0)$, $R^3 = (0)$.

Hilfssatz 8. *Ist* p *eine beliebige Primzahl, so lassen sich auf der Gruppe*

$$\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{Z}(p^\infty) \tag{20}$$

mehr als zwei Ringe aufbauen.

Beweis. Der Zeroring ergibt zusammen mit $K(p) + [\mathfrak{Z}(p^\infty)]_0$ schon zwei Ringtypen. Wir konstruieren einen dritten Typ R eines auf (20) aufgebauten Ringes, für welchen $R^2 \neq (0)$, $R^3 = (0)$ gilt. Für diesen Zweck wählen wir (4) zum Erzeugendensystem der Gruppe $\mathfrak{Z}(p^\infty)$ in

(20) und setzen $\mathfrak{Z}(p) = \{c^*\}$. Sind dann $g = kc^* + c$, $g' = k'c^* + c'$ ($c, c' \in \mathfrak{Z}(p^\infty)$) zwei beliebige Elemente der Gruppe (20), so definieren wir ihr Produkt durch

$$gg' = kk'c_1.$$

Somit haben wir den gewünschten Ring R erhalten.

Hilfssatz 9. *Gemischte Nilgruppen existieren nicht.*

Beweis. Eine gemischte Gruppe $\mathfrak{G}$ ist nach Hilfssatz 2 entweder von der Form (9) oder von der Form (10). Folglich besitzt $\mathfrak{G}$ entweder einen direkten Summanden $\mathfrak{U} + \mathfrak{Z}(p^\infty)$ mit torsionsfreiem $\mathfrak{U}$ oder einen direkten Summanden $\mathfrak{Z}(p^m)$ ($1 \leqq m < \infty$). Diese direkten Summanden sind aber nach Hilfssatz 6 bzw. 5 keine Nilgruppen, mithin ist also auch $\mathfrak{G}$ keine.

§ 4.

Beweis des Satzes 1.

Um Satz 1 zu beweisen, zeigen wir zuerst, daß die Gruppen (5)—(8) Quasinilgruppen sind.

Sei R ein Nichtzeroring, aufgebaut auf der Additionsgruppe (5), die wir jetzt, um Mißverständnisse zu vermeiden, in der abstrakten Form $\mathfrak{R}a$ annehmen. Es soll gezeigt werden, daß R isomorph zum Körper der rationalen Zahlen ist. Da R kein Zeroring ist, muß $a^2 \neq 0$ sein. Es gilt also $a^2 = \varrho a$ mit einer bestimmten rationalen Zahl $\varrho \neq 0$. Dann genügt das Element $\frac{1}{\varrho} a = a_0$ von R der Gleichung $a_0^2 = a_0$. Demnach ist die Abbildung $\sigma a_0 \to \sigma$ (σ rational) ein Ringisomorphismus zwischen R und $K(0)$. Damit haben wir gezeigt, daß die Gruppe (5) eine Quasinilgruppe ist. — Dieselbe Behauptung ist für die Gruppe (6) ohne weiteres klar, da sich auf der Gruppe $\mathfrak{Z}(p)$ außer dem Zeroring und $K(p)$ keine weiteren Ringe aufbauen lassen (vgl. Hilfssatz 5).

Die Fälle der Gruppen (7), (8) werden wir parallel erledigen. Beide Gruppen sind von der Form $\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{B}$, wobei der direkte Summand $\mathfrak{B}$ eine Nilgruppe ist (vgl. Hilfssatz 4). Es genügt also folgendes zu beweisen: *Ist R ein beliebiger Ring, aufgebaut auf der betrachteten Additionsgruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{B}$, so sind beide Summanden $\mathfrak{Z}(p)$, $\mathfrak{B}$ zweiseitige Ideale in R.* Dann gilt nämlich entweder $R = [\mathfrak{Z}(p)]_0 + [\mathfrak{B}]_0$ oder $R = K(p) + [\mathfrak{B}]_0$. Nun sieht man die Richtigkeit unserer Behauptung so ein. Sei g ein beliebiges Element der Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{B}$ in (7) bzw. (8) und b irgendein Element aus $\mathfrak{B}$. Nach der vorausgesetzten Gleichung $p\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ (die offenbar auch im Falle (7) gültig ist!) gibt es ein $b' \in \mathfrak{B}$ mit $pb' = b$. Folglich gehören die im Ring R gebildeten Produkte bg, gb auf Grund von $bg = pb'g$ und $gb = pgb'$ zur Menge $p(\mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{B}) = p\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$. Mithin ist $\mathfrak{B}$ in der Tat ein zweiseitiges Ideal in R. Andererseits sind die Produkte cg, gc mit einem Faktor $c \in \mathfrak{Z}(p)$ Elemente von der Ordnung p oder 1 in $\mathfrak{G}$, folglich

gehören diese Produkte zur Untergruppe $\mathfrak{Z}(p)$, die nämlich sämtliche Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{G}$ enthält. Demnach ist auch $\mathfrak{Z}(p)$ ein zweiseitiges Ideal in R und unsere Behauptung richtig.

Wir haben nur noch zu zeigen, daß die Gruppen (5) — (8) alle möglichen Typen der Quasinilgruppen erschöpfen.

Sei zuerst $\mathfrak{G}$ eine *torsionsfreie* Quasinilgruppe und R *der einzige Nichtzeroring* mit $\mathfrak{G}$ als Additionsgruppe. Das zweiseitige Ideal $R^2 \neq (0)$ in R ist zugleich eine Untergruppe $\mathfrak{H} \neq (0)$ von $\mathfrak{G}$. Ist n eine beliebige natürliche Zahl, so läßt sich auf der Additionsgruppe $\mathfrak{G}$ auch ein Ring R_n aufbauen, in dem das Produkt zweier Elemente a, b durch $a \circ b = n\,a\,b$ definiert ist. ($a\,b$ bezeichnet das Produkt in R; es ist $R_1 = R$). Da $\mathfrak{G}$ eine torsionsfreie Quasinilgruppe ist, kann R_n kein Zeroring sein und somit ist R_n isomorph zu R. Nehmen wir einen bestimmten Ringisomorphismus zwischen R_n und R, der zugleich ein Automorphismus der (gemeinsamen) Additionsgruppe $\mathfrak{G}$ (der beiden Ringe R, R_n) ist. Nun gilt im Ring R_n: $R_n^2 \leq n\,\mathfrak{G}$. Daraus folgt auf Grund des betrachteten Isomorphismus $R^2 = \mathfrak{H} \leq n\,\mathfrak{G}$, da die Untergruppe $n\,\mathfrak{G}$ bei jedem Automorphismus von $\mathfrak{G}$ auf sich abgebildet wird. Wir haben also die Richtigkeit von $\mathfrak{H} \leq n\,\mathfrak{G}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) bewiesen. Folglich ist der Durchschnitt aller Untergruppen $\mathfrak{G}$, $2\,\mathfrak{G}$, $3\,\mathfrak{G}, \ldots$ wegen $\mathfrak{H} \neq (0)$ nicht leer. Sei nun $e \neq 0$ ein Element aus diesem Durchschnitt. Dann ist me für beliebige ganze rationale m in jeder Untergruppe $n\,\mathfrak{G}$ enthalten, mithin hat die Gleichung $n\,x = me$ eine Lösung $x = \frac{m}{n}\,e \in \mathfrak{G}$. Die Menge sämtlicher Elemente $\frac{m}{n}\,e$ ist eine zu $\mathfrak{R}$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{R}\,e$, die nach Hilfssatz 1 ein direkter Summand von $\mathfrak{G}$ ist:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{R}\,e.$$

Da aber $\mathfrak{G}$ eine Quasinilgruppe ist, muß hier der Summand $\mathfrak{A}$ nach Hilfssatz 6 verschwinden. Damit ist bewiesen, daß die Gruppe (5) die einzige torsionsfreie Quasinilgruppe ist.

Sei nunmehr $\mathfrak{G}$ eine *nicht-torsionsfreie* Quasinilgruppe, die also nach Hilfssatz 2 von der Form (9) oder (10) ist. (9) ist aber keine Quasinilgruppe; dies folgt im Falle $\mathfrak{U} = (0)$ unmittelbar aus Hilfssatz 4, andererseits im Fall $\mathfrak{U} \neq (0)$ daraus, daß $\mathfrak{G}$ dann einen direkten Summanden von der Form (15) enthält, auf dem sich nach Hilfssatz 6 mehr als zwei Ringe aufbauen lassen. $\mathfrak{G}$ muß also die Form (10) haben, wobei nach Hilfssatz 5 noch $m = 1$ sein muß. Gilt nun

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(p) + \mathfrak{V}, \tag{21}$$

dann ergibt sich im Falle $\mathfrak{V} = (0)$ für $\mathfrak{G}$ der Typ (6), der tatsächlich eine Quasinilgruppe ist. Im restlichen Fall $\mathfrak{V} \neq (0)$ muß $\mathfrak{V}$ eine Nilgruppe sein, denn sonst ließe sich auf $\mathfrak{G}$ außer den Ringen $[\mathfrak{Z}(p)]_0 + [\mathfrak{V}]_0$, $K(p) + [\mathfrak{V}]_0$ noch ein weiterer Ring aufbauen. Folglich ist $\mathfrak{V}$ nach

Hilfssatz 9 entweder torsionsfrei oder eine Torsionsgruppe. Ist die Nilgruppe $\mathfrak{V}$ eine Torsionsgruppe, so hat sie nach Hilfssatz 4 die Form (12), wobei noch mit Rücksicht auf Hilfssatz 8 $p_\nu \neq p$ gelten muß. In diesem Falle ist also die Gruppe (21) gleich der Gruppe (7). Ist endlich $\mathfrak{V}$ in (21) eine torsionsfreie Nilgruppe, so muß nach Hilfssatz 7 noch $p\mathfrak{V} = \mathfrak{V}$ sein, was eben den Fall (8) für $\mathfrak{G}$ ergibt. — Da wir alle möglichen Fälle erschöpft haben, ist der Beweis des Satzes 1 vollendet.

§ 5.

Beweis des Satzes 2.

Die Richtigkeit der Behauptung des Satzes 2 über Torsionsgruppen folgt unmittelbar aus den Hilfssätzen in § 3. Eine Torsionsgruppe $\mathfrak{G}$ hat nämlich nach Hilfssatz 2 die Form (9) (mit $\mathfrak{U} = (0)$) oder (10). Im ersten Fall ist $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 4 eine Nilgruppe, d. h. es kommt ihr die Nilstufe 1 zu. Im anderen Fall kann $\mathfrak{G}$ keine Nilstufe s $(= 1, 2, 3, \ldots)$ besitzen, da sich auf der Gruppe (10) ein nicht-nilpotenter Ring — nämlich die direkte Summe des Restklassenringes der ganzen Zahlen mod p^m und des Ringes $[\mathfrak{V}]_0$ — aufbauen läßt. Demnach kann eine Torsionsgruppe nur die Nilstufe 1 besitzen.

Jetzt wenden wir uns zum Beweis der Aussage des Satzes 2 über torsionsfreie Gruppen, und zwar wollen wir eine torsionsfreie Gruppe $\mathfrak{G}$ konstruieren, die eine beliebig vorgeschriebene natürliche Zahl s zur Nilstufe hat. Für diesen Zweck ziehen wir die Untergruppe $\mathfrak{P}_n$ (definiert in (1)) der Gruppe $\mathfrak{R}$ der rationalen Zahlen heran. Die wichtigste Eigenschaft der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, die uns die Konstruktion der gewünschten Gruppe $\mathfrak{G}$ ermöglicht, ist die folgende: Ist g irgendein Element der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, so gilt

$$p^n \mid g \tag{22}$$

für fast alle Primzahlen p, dagegen gibt es kein Element $g \neq 0$ in $\mathfrak{P}_n$, für welches

$$p^{n+1} \mid g \tag{23}$$

mit unendlich vielen Primzahlen p gilt.

Wir definieren die Gruppe $\mathfrak{G}$ als die direkte Summe der s Gruppen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1 a_1 + \cdots + \mathfrak{P}_s a_s . \tag{24}$$

Ferner konstruieren wir einen Ring R mit $\mathfrak{G}$ als Additionsgruppe, indem wir das Produkt der Elemente $\varrho_i a_i$, $\varrho_k a_k$ $(\varrho_j a_j \in \mathfrak{P}_j a_j;\ j = 1, \ldots, s)$ folgendermaßen erklären:

$$\varrho_i a_i \cdot \varrho_k a_k = \begin{cases} \varrho_i \varrho_k a_{i+k} & \text{für } i + k \leqq s \\ 0 & \text{für } i + k > s. \end{cases} \tag{25}$$

Diese Definition ist sinnvoll, da der Nenner des (reduzierten) Bruches $\varrho_i \varrho_k$ jede Primzahl p mit einer Vielfachheit $\leqq i+k$ als Faktor enthält, insofern $\varrho_i a_i$, $\varrho_l a_k$ Elemente der Gruppe $\mathfrak{P}_i a_i$ bzw. $\mathfrak{P}_k a_k$ sind. Das Produkt von zwei beliebigen Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sei auf Grund von (25) nach dem Distributivgesetz definiert. Damit wird die Gruppe (24) zu einem Ring R, für den $R^s \neq (0)$ gilt, denn es ist z. B. $a_1^s = a_s \neq 0$.

Es soll nur noch gezeigt werden, daß für jeden Ring R mit (24) als Additionsgruppe $R^{s+1} = (0)$ sein muß. Sei nämlich R ein beliebiger Ring mit $\mathfrak{G}$ als Additionsgruppe. Es gilt in $\mathfrak{G}$ $p \mid a_i$ für jede Primzahl p und $1 \leqq i \leqq s$. Demnach ist $p^{s+1} \mid a_{i_1} \dots a_{i_{s+1}}$ für irgendein Produkt von $s+1$ Faktoren a_i in R, woraus folgt (auf Grund der obigen Eigenschaft der Gruppen $\mathfrak{P}_n$), daß jedes solche Produkt verschwindet. Das bedeutet aber die Richtigkeit von $R^{s+1} = (0)$, w. z. b. w.

Endlich beweisen wir die Aussage des Satzes 2 über gemischte Gruppen. Nach Hilfssatz 9 hat keine gemischte Gruppe die Nilstufe 1. Wir zeigen andererseits, daß die gemischte Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}(2^\infty) + \mathfrak{Q}_1 b_1 + \dots + \mathfrak{Q}_s b_s \tag{26}$$

die Nilstufe $s+1$ besitzt ($s \geqq 1$), wobei die Untergruppe $\mathfrak{Q}_n$ der rationalen Gruppe $\mathfrak{R}$ durch (2) definiert ist.

Um einen Ring R mit $R^{s+1} \neq (0)$ auf der Gruppe (26) aufbauen zu können, wählen wir (4) mit (mit $p = 2$) zum Erzeugendensystem der Gruppe $\mathfrak{Z}(2^\infty)$ in (26), und definieren vor allem ϱc_1 für jede rationale Zahl $\varrho = \frac{u}{2^t v}$ ($2 \nmid v$, $t \geqq 0$) als (die einzige) Lösung $x \in \{c_{t+1}\}$ der Gleichung $v x = u c_{t+1}$. Die Multiplikation für die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ in (26) sei auf Grund des Distributivgesetzes durch die Vorschrift

$$\varrho_i b_i \cdot \varrho_k b_k = \begin{cases} \varrho_i \varrho_k b_{i+k} & \text{für } i+k \leqq s \\ \varrho_i \varrho_k c_1 & \text{für } i+k = s+1 \\ 0 & \text{für } i+k > s+1 \end{cases}$$

$$c g = g c = 0 \qquad (c \in \mathfrak{Z}(2^\infty),\ g \in \mathfrak{G})$$

definiert. Der somit erhaltene Ring R genügt (wegen $b_1^{s+1} = c_1 \neq 0$) der Forderung $R^{s+1} \neq (0)$.

Es soll noch bewiesen werden, daß für jeden Ring R mit (26) als Additionsgruppe $R^{s+2} = (0)$ gilt. Sei R ein beliebiger, auf der Gruppe (26) aufgebauter Ring. Vor allem zeigen wir, daß in R unbeschränkt

$$c g = g c = 0 \qquad (c \in \mathfrak{Z}(2^\infty),\ g \in \mathfrak{G}) \tag{27}$$

ist. Sind nämlich c, g beliebig gewählte Elemente aus $\mathfrak{Z}(2^\infty)$ bzw. $\mathfrak{G}$, so gibt es eine natürliche Zahl m mit $2^m c = 0$ und (da jedes Element in der Gruppe (26) durch 2 teilbar ist) ein Element $g' \in \mathfrak{G}$ mit $2^m g' = g$. Dann ist aber in der Tat $c g = c\, 2^m g' = 2^m c g' = 0$ und $g c = 2^m g' c$

$= g' 2^m c = 0$. Man beachte noch, daß der Durchschnitt sämtlicher Gruppen $p^{s+1}\mathfrak{G}$ gleich $\mathfrak{Z}(2^\infty)$ ist:

$$2^{s+1}\mathfrak{G} \cap 3^{s+1}\mathfrak{G} \cap \cdots \cap p^{s+1}\mathfrak{G} \cap \ldots = \mathfrak{Z}(2^\infty). \tag{28}$$

Nunmehr sind wir in der Lage, beweisen zu können, daß im Ring R jedes Produkt $g_1 \ldots g_{s+2}$ mit $s+2$ Faktoren verschwindet, d. h. $R^{s+2} = (0)$ ist. Diese Faktoren g_i lassen sich nach (26) in der Form

$$g_i = c^{(i)} + \varrho_1^{(i)} b_1 + \cdots + \varrho_s^{(i)} b_s \quad (c^{(i)} \in \mathfrak{Z}(2^\infty),\ \varrho_k^{(i)} b_k \in \mathfrak{Q}_k b_k,\ i = 1, \ldots, s+2)$$

angeben, mithin genügt es nach (27) zu zeigen, daß jedes Produkt $b_{k_1} \ldots b_{k_{s+2}}$ von $s+2$ Faktoren b_k in R verschwindet. Nach Definition der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist aber $p \mid b_k$ für jede Primzahl p und $1 \leqq k \leqq s$. Es gilt also

$$p^{s+1} \mid b_{k_1} \ldots b_{k_{s+1}},$$

woraus nach (28) $b_{k_1} \ldots b_{k_{s+1}} \in \mathfrak{Z}(2^\infty)$ folgt. Demnach ist wegen (27) in der Tat $b_{k_1} \ldots b_{k_{s+2}} = 0$, womit der Beweis der Behauptung $R^{s+2} = (0)$ und zugleich auch des Satzes 2 beendet ist.

Literaturverzeichnis.

Baer, R.

[1] The subgroub of the elements of finite order of an abelian group. Ann. of Math. Princeton (2) 37 (1936), 766–781.

[2] Abelian groups without elements of finite order. Duke Math. Journ. 3 (1937), 68—122.

[3] Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 800–806.

Kulikoff, L.

[4] Zur Theorie der Abelschen Gruppen von beliebiger Mächtigkeit. Recueil Mathématique (SSSR) 9 (1941), 165—181.

Rédei, L. und Szele, T.

[5] Die Ringe „ersten Ranges". Acta Sci. Math. (Szeged) 12, A (1950), 18—29.

Serre, J.-P.

[6] Sur un théoreme de T. Szele. Acta Sci. Math. (Szeged) 13 (1950), 190—191.

Szele, T.

[7] Die Abelschen Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen. Acta Sci. Math. (Szeged) 13 (1950), 54—56.

[8] Zur Theorie der Zeroringe. Mathematische Annalen 121 (1949), 242–246.

[9] Sur la décomposition des groupes abéliens. Comptes rendus (Paris) 229 (1949), 1052—1053.

[10] Ein Analagon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen. Journal f. d. reine u. angew. Math. 188 (1950), 167–192.

(Eingegangen am 8. Februar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 181—183 (1951).

The degree of completeness of a partial system of the 2-valued Propositional Calculus.

By

Alan Rose in Aberdeen (Scotland).

It has recently been shown[1]) that if a formalisation of a partial system of the Propositional Calculus satisfies the following conditions

(1) It is weakly complete,

(2) Implication can be defined in terms of the primitives,

(3) The formalisation has substitution as a rule of procedure,

(4) The formalisation has modus ponens as a rule of procedure,

then the formalisation is strongly complete.

The object of the present paper is to show that if we omit condition (2) and modify condition (4), the theorem no longer holds. We shall replace these conditions by the following

(2 a) The primitive functions are equivalence and non-equivalence,

(4 a) The formalisation has as a rule of procedure

Rule β) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ then $\mathfrak{B}$.

$X \sim Y$	T	F
T	T	F
F	F	T
X		

Y

$X \widetilde{\sim} Y$	T	F
T	F	T
F	T	F
X		

Y

We shall refer to the substitution rule as Rule α) and make the further condition

(5) The formalisation has no other primitive rules of procedure.

We shall prove the following

Theorem. *A formalisation of a partial system of the Propositional Calculus which satisfies conditions* (1), (2 a), (3), (4 a), (5) *has degree of completeness*[2]) 3.

A formalisation which satisfies these conditions has been found by Mrs. Rasiowa[3]). She also shows that a necessary and sufficient

[1]) A. Rose, Strong completeness of fragments of the Propositional Calculus, Journal Symbolic Logic **16** (1951). (In print.).

[2]) For the definition of degree of completeness see A. Tarski, Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik, Comptes rendus (Warsaw) Classe III **23** (1930), pp. 22—29.

[3]) H. Rasiowa, Axiomatisation d'un système partiel de la théorie de la déduction, Comptes rendus (Warsaw) Classe III **40** (1947), pp. 22—37.

condition that a formula is identically true is that the function $\overline{\sim}$ occurs an even number of times, and that each propositional variable occurring in the formula occurs an even number of times [4]).

Definition. The propositional function $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is said to be *mixed* if there exists an assignment of truth-values to $X_1, X_2, \ldots, X_n$ such that under this assignment Φ has the truth-value T, and there exists an assignment such that Φ has the truth-value F.

Lemma 1. *If for some* $i (1 \leqq i \leqq n)$ X_i *occurs in* $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *an odd number of times, then* Φ *is mixed.*

Let us suppose that Φ is not mixed. If Φ always takes the truth-value T, then by the theorem of Mrs. Rasiowa X_i occurs in Φ an even number of times, which is contrary to our hypothesis. If Φ always takes the truth-value F we have two cases to consider.

(1) Φ is of the form $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. In this case $\mathfrak{A} \overline{\sim} \mathfrak{B}$ always takes the truth-value T. Hence, by the theorem of Mrs. Rasiowa, X_i occurs in $\mathfrak{A} \overline{\sim} \mathfrak{B}$ an even number of times. Hence X_i occurs in Φ an even number of times, which is contrary to our hypothesis.

(2) Φ is of the form $\mathfrak{A} \overline{\sim} \mathfrak{B}$. To prove that X_i occurs in Φ an even number of times we have only to repeat the proof of (1) writing $\sim$ and $\overline{\sim}$ in place of each other.

Hence the lemma is proved.

Lemma 2. *If* $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *is mixed then there exists* $i (1 \leqq i \leqq n)$ *such that* X_i *occurs in* Φ *an odd number of times.*

Suppose that for all $i (1 \leqq i \leqq n)$ X_i occurs in Φ an even number of times. If the function $\overline{\sim}$ occurs in Φ an even number of times then it follows from the theorem of Mrs. Rasiowa that Φ always takes the truth-value T, which is contrary to our hypothesis. If $\overline{\sim}$ occurs in Φ an odd number of times we have two cases to consider.

(1) Φ is of the form $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. In this case $\overline{\sim}$ occurs in $\mathfrak{A} \overline{\sim} \mathfrak{B}$ an even number of times. Hence it follows from the theorem of Mrs. Rasiowa that $\mathfrak{A} \overline{\sim} \mathfrak{B}$ always takes the truth-value T. Hence Φ always takes the truth-value F, which is contrary to our hypothesis.

(2) Φ is of the form $\mathfrak{A} \overline{\sim} \mathfrak{B}$. To prove that Φ always takes the truth-value F we have only to repeat the proof of (1) writing $\sim$ and $\overline{\sim}$ in place of each other.

Thus the lemma is proved.

---

[4]) Since this paper was submitted my attention has been drawn to E. C. Mihailescu's paper: Recherches sur l'équivalence et la réciprocité dans le calcul des propositions, Ann. Sci. Univ. Jassy **24** (1938), pp. 116—153. Mihailescu formalises the above system by means of three axioms and shows that his formalisation is weakly complete. He also proves that no formalisation of the system can be strongly complete, thus proving a weaker form of the theorem of the present paper.

Lemma 3. *If to the axioms of the formalisation we adjoin as an axiom the mixed formula* $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *then every formula becomes provable in the formalisation.*

By Lemma 2 there exists i such that X_i occurs in Φ an odd number of times. For one such i let us substitute X for X_i in Φ by Rule α), and let us substitute $X \sim X$ for X_j whenever $j \neq i$. Let us denote the resulting formula by $\Psi(X)$. Since X occurs in $X \sim X$ exactly twice, X occurs in $\Psi(X)$ an odd number of times. Hence, by Lemma 1, Ψ is mixed. But the truth-value of $\Psi(X)$ depends only on the truth-value of X. Hence either $\Psi(X)$ always has the same truth-value as X or $\Psi(X)$ always has the same truth-value as $X \overline{\sim} (X \sim X)$. Thus, in the respective cases, we can prove in view of the weak completeness

$$\Psi(X) \sim X, \quad \Psi(X) \sim (X \overline{\sim} (X \sim X)).$$

Using Rule β) we deduce

$$X, \; X \overline{\sim} (X \sim X)$$

respectively. In the first case we can deduce any formula $\mathfrak{A}$ by means of Rule α).

In the second case we can deduce, substituting $X \sim X$ for X by Rule α),

$$(X \sim X) \overline{\sim} ((X \sim X) \sim (X \sim X)).$$

In view of the weak completeness we can prove

$$((X \sim X) \overline{\sim} ((X \sim X) \sim (X \sim X))) \sim ((X \overline{\sim} (X \sim X)) \sim X).$$

Applying Rule β) to the last three formulae we deduce X. Thus we can use Rule α) to deduce any formula $\mathfrak{A}$.

Hence the Lemma is proved.

Lemma 4. *If to the axioms of the formalisation we adjoin the formula* $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *and* Φ *always takes the truth-value* F, *then we cannot deduce any mixed formula, but we can deduce all other formulae.*

If $\mathfrak{A}$ always takes the truth-value F, then in view of the weak completeness we can deduce $\Phi \sim \mathfrak{A}$. Using Rule β) we can then deduce $\mathfrak{A}$.

If $\mathfrak{B}$ is a formula which is not mixed, then if we apply Rule α) to $\mathfrak{B}$ the resulting formula is also not mixed, since the substituted expression can take only truth-values which could also be taken by the propositional variable for which it was substituted. If $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$ are not mixed, then $\mathfrak{C}$ is not mixed, since the truth-values of $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$ uniquely determine the truth-value of $\mathfrak{C}$. Hence if we apply Rule β) to two formulae which are not mixed, the resulting formula is not mixed.

Thus the lemma is proved.

The theorem follows at once from Lemmas 3 and 4.

(Eingegangen am 5. Februar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 2, S. 184—216 (1951).

Zur affinen Differentialgeometrie.

Teil II: Über zweidimensionale Flächen im vierdimensionalen Raum.

Von

Wilhelm Klingenberg in Kiel.

Einleitung.

Im zweiten Teil wenden wir die allgemeinen Ansätze des ersten Teils[1]) auf die Affingeometrie zweidimensionaler Flächen F_2 im vierdimensionalen Raum A_4 an. Über diesen Gegenstand gibt es m. W. nur eine Arbeit von C. Burstin und W. Mayer[2]); dort wird das Einspannungsproblem mit Hilfe der Tatsache gelöst, daß die lineare Abhängigkeit der drei zweiten partiellen Ableitungen des Ortsvektors einer F_2 im A_4 eine quadratische Form definiert. Die hiermit konstruierte Normalenebene stimmt nicht mit der von uns verwandten Weiseschen Normalenebene überein[3]).

In § 1 führen wir die „konjugierten" Parameter ein und geben eine kanonische Darstellung der F_2 in einem ausgezeichneten örtlichen Vierbein an. Eine geometrische Kennzeichnung dieses kanonischen Bezugssystems liefert insbesondere auch eine Kennzeichnung der Affinnormalenebene. Es folgen die sich auf dieses System beziehenden Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen, die sich insbesondere für Schiebflächen sehr vereinfachen. Am Schluß skizzieren wir einen den Teil I nicht voraussetzenden Zugang zur Affingeometrie der F_2 im A_4 für konjugierte Parameter. Damit wird Teil II (bis auf die in Teil I gegebenen Ableitungen der kennzeichnenden Gleichungen für eine Minimalfläche und eine Sphäre) auch ohne Studium von Teil I verständlich.

In § 2 zeigen wir, daß sich in jedem nichtparabolischen Punkt 3-dimensionale Quadriken des A_4 erklären lassen, die die F_2 von 3. Ordnung berühren. Sie sind nicht eindeutig festgelegt; der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte ist ein quadratischer Kegel des A_4, der eine einfache geometrische Kennzeichnung der Affinnormalenebene vermittelt: Tangentialebene und Normalenebene sind konjugierte

---

[1]) Zur affinen Differentialgeometrie, Teil I: Über p-dimensionale Minimalflächen und Sphären im n-dimensionalen Raum. Math. Z. **54** (1951) S. 65—80.

[2]) Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4, Math. Z. **26** (1927) S. 373—407.

[3]) Im übrigen wird in jener Arbeit vor allem auf den Zusammenhang der (Tangential-)Ebenensysteme im A_4 mit den Geradensystemen im projektiven P_3 eingegangen.

Ebenen bezüglich dieses Kegels. — Es folgen einige Bemerkungen über ausgezeichnete Schmiegquadriken.

In § 3 erklären wir die Semisphären als solche Flächen, für die jede Kurve Krümmungslinie ist. Dabei bilden längs einer Krümmungslinie die Normalenebenen eine Hypertorse. Wir bestimmen die semisphärischen Schiebflächen.

In § 4 machen wir einen Ansatz zur Bestimmung aller Sphären (vgl. Teil I). Er führt für eigentliche Sphären zu einer durch eine einfache Eigenschaft gekennzeichneten Flächenklasse, und es gibt vermutlich keine weiteren eigentlichen Sphären. Die uneigentlichen Sphären werden alle bestimmt. Zu ihnen gehören die sphärischen Schiebflächen.

In § 5 bestimmen wir die Minimalschiebflächen — sie gehören zu den semisphärischen Schiebflächen — und die sphärischen Minimalflächen — sie sind mit den sphärischen Schiebflächen identisch. Damit sind u. a. die Flächen mit je zwei der Eigenschaften: Schiebfläche, Minimalfläche, Sphäre bestimmt.

§ 1.

Die konjugierten Parameter und die kanonische Darstellung.

1. Die konjugierten Parameter. Wir spezialisieren die Begriffsbildungen aus I § 1 auf die F_2 im A_4[4]). Wir denken uns also die Fläche durch einen Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^\alpha)$ beschrieben. Die Tangentialebene wird von den Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha}$ aufgespannt und bestimmt zwei kovariante Normalenvektoren $\mathfrak{N}^\varrho : \mathfrak{N}^\varrho \circ \mathfrak{x}_\alpha = 0$. Damit haben wir in

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}^1 \circ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \equiv B^1_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta; \\ &\mathfrak{N}^2 \circ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \equiv B^2_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \end{aligned} \tag{1.1}$$

zwei quadratische Differentialformen. Sie lassen sich simultan auf Diagonalgestalt bringen. Die hiermit festgelegten Richtungen nennen wir *konjugiert*. Sie teilen die Nullrichtungen jeder der beiden Formen (1.1) harmonisch und sind bekanntlich auch als die Nullrichtungen der zu dem Tensor

$$G^{\underset{\sim}{12}}_{\alpha\beta\,\underset{\sim}{12}} \equiv \tfrac{1}{2}\, \delta^{\underset{\sim}{12}}_{\varrho_1\varrho_2}\, \delta^{\alpha_1\beta_1}_{\underset{\sim}{12}}\, B^{\varrho_1}_{\alpha_1\alpha}\, B^{\varrho_2}_{\beta_1\beta}\ ^{5}) \tag{1.2}$$

---

[4]) Es ist also jetzt $p = 2$, $r \equiv n - p = 2$. Tangentialraum und Normalenraum sind zweidimensionale Ebenen. Die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ der Parametergruppe und ϱ, σ, τ der Normalenebenengruppe durchlaufen die Werte 1 und 2.

[5]) Zu den verallgemeinerten KRONECKER-Symbolen $\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$ vgl. Teil I Anm. [10]); das Symbol 12 steht sowohl für den 2-stufigen Index bei der Parametergruppe als auch für den 2-stufigen Index bei der Normalenebenengruppe. Auf eine unterschiedliche Bezeichnung haben wir verzichtet.

gehörenden quadratischen Form gekennzeichnet. Diese Form stimmt (bis auf einen gewissen hier nicht interessierenden Faktor) mit der quadratischen Form

$$(1.3) \qquad \left| \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial u^\beta} \right| du^\alpha du^\beta$$

von Burstin und Mayer[6]) überein; das lesen wir unmittelbar aus den Ableitungsgleichungen I (1. 17)[7]) für $\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ ab. Die „Nullrichtungen" von Burstin und Mayer sind also mit unseren konjugierten Richtungen identisch.

Die Realität der konjugierten Richtungen hängt von dem Vorzeichen der Determinante $\mathrm{Det}|G^{12}_{\alpha\beta\,\underset{\sim}{12}}| = \mathrm{Det}|S^{\varrho_1\varrho_2}_{(\underset{\sim}{12})^2}|$[8]) ab, wobei $S^{\varrho_1\varrho_2}_{(\underset{\sim}{12})^2}$ gemäß I (1. 4) durch

$$(1.4) \qquad S^{\varrho_1\varrho_2}_{(\underset{\sim}{12})^2} = \frac{1}{2}\,\delta^{\alpha_1\alpha_2}_{\underset{\sim}{12}}\,\delta^{\beta_1\beta_2}_{\underset{\sim}{12}}\,B^{\varrho_1}_{\alpha_1\beta_1}\,B^{\varrho_2}_{\alpha_2\beta_2} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} B^{\varrho_1}_{11} & B^{\varrho_2}_{12} \\ B^{\varrho_1}_{21} & B^{\varrho_2}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B^{\varrho_2}_{11} & B^{\varrho_1}_{12} \\ B^{\varrho_2}_{21} & B^{\varrho_1}_{22} \end{vmatrix}\right\}$$

gegeben ist. Mit $S \equiv \mathrm{Det}\,(S^{\varrho_1\varrho_2}_{(\underset{\sim}{12})^2})$[9]) nennen wir einen Punkt

$$\left.\begin{matrix}\text{elliptisch}\\ \text{parabolisch}\\ \text{hyperbolisch}\end{matrix}\right\} \text{ wenn } \left\{\begin{matrix}S>0\\ S=0\\ S<0\end{matrix}\right\}, \text{ d. h. wenn die konjugierten Richtungen } \left\{\begin{matrix}\text{konjugiert-komplex}\\ \text{zusammenfallend}\\ \text{reell verschieden}\end{matrix}\right.$$

sind. — Wir können übrigens für die F_2 im A_4 auf die Bildung der $T^{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}_{(12)^4}$ (vgl. I (1. 5)) verzichten und direkt die komplementären Elemente $\underset{\sim}{S}{}^{(12)^2}_{\varrho_1\varrho_2}$ zu $S^{\varrho_1\varrho_2}_{(\underset{\sim}{12})^2}$ bilden. Deshalb lassen wir S an die Stelle von T aus I § 1 treten.

2. Die kanonische Darstellung. Wir setzen $S \neq 0$ voraus. Dann ist nach I (1. 14) durch die zwei Vektoren $\mathfrak{n}_\varrho$ eine Affinnormalenebene bestimmt. Beziehen wir die Fläche auf das örtliche Basissystem $\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{n}_\varrho$ im Punkte $\mathfrak{x}_0$, so können wir sie zunächst in der Form

$$(1.5^*) \qquad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} u^\alpha \\ B^\varrho_{\alpha\beta}\,\frac{u^\alpha u^\beta}{2!} + C^\varrho_{\alpha\beta\gamma}\,\frac{u^\alpha u^\beta u^\gamma}{3!} + \{4\} \end{pmatrix}^{10})$$

annehmen. In diesem Koordinatensystem wird im Punkt $\mathfrak{x}_0$: $\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = B^\varrho_{\alpha\beta}\,\mathfrak{n}_\varrho$, d. h. gemäß I (1. 17): $Z^\lambda_{\alpha\beta} = 0$ und damit nach I (1. 19):

$$(1.5^{**}) \qquad B^\varrho_{\alpha\beta\gamma} = C^\varrho_{\alpha\beta\gamma}.$$

---

[6]) L. c.[2]) Teil I § 1, § 4; Teil II § 2.

[7]) Formeln aus Teil I werden mit vorangesetzter I zitiert.

[8]) Diese Gleichung verifiziert man am bequemsten im kanonischen Koordinatensystem (s. u.).

[9]) Wir schreiben der Einfachheit halber S statt $S^{(12)^2}_{(\underset{\sim}{12})^2}$.

[10]) $\{k\}$ bedeutet: Glieder mindestens k-ter Ordnung.

Beschränken wir uns zunächst auf hyperbolische Punkte. Für $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ wählen wir die konjugierten Richtungen: $B^1_{12} = B^2_{12} = 0$. Dann wählen wir

$$\mathfrak{n}^*_\varrho = B^\sigma_{\varrho\varrho}\,\mathfrak{n}_\sigma; \quad \Delta = \begin{vmatrix} B^1_{11} & B^2_{11} \\ B^1_{22} & B^2_{22} \end{vmatrix} = -4S \neq 0 \tag{1.6}$$

als neue Normalenvektoren. Damit wird aus (1.5) (mit u, v statt u^1, u^2):

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{(u)^2}{2} + \{3\} \\ \frac{(v)^2}{2} + \{3\} \end{pmatrix}; \tag{1.7}$$

es ist also jetzt

$$\begin{gathered} (B^{*1}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (B^{*2}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (S^{*\varrho_1\varrho_2}_{(12)^2}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \\ (\tilde{B}^{*\alpha\beta}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\tilde{B}^{*\alpha\beta}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad (\tilde{S}^{*(12)^2}_{\varrho_1\varrho_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{1.8}$$

und damit lautet die Apolaritätsbedingung I (1.20):

$$B^{*1}_{111} = 0; \quad B^{*2}_{112} = 0; \quad B^{*1}_{122} = 0; \quad B^{*2}_{222} = 0.$$

Hiermit erhalten wir aus (1.7) mit den Abkürzungen

$$A \equiv B^{*2}_{111}; \quad B \equiv B^{*1}_{112}; \quad C \equiv B^{*2}_{122}; \quad D \equiv B^{*1}_{222}$$

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{(u)^2}{2} + \frac{v}{6}\,(3\,B(u)^2 + D(v)^2) + \{4\} \\ \frac{(v)^2}{2} + \frac{u}{6}\,(A(u)^2 + 3\,C(v)^2) + \{4\} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \\ n^1(u, v) \\ n^2(u, v) \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

(1.9) nennen wir *die kanonische Darstellung der F_2 im kanonischen Koordinatensystem*. Sie ist vorläufig nur für hyperbolische Flächenpunkte erklärt. Fassen wir jedoch in (1.9) u und v als konjugiert-komplexe Größen auf und ebenso A bzw. B als konjugiert-komplex zu D bzw. C, so ist (1.9) die kanonische Darstellung in einem elliptischen Flächenpunkt. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß die konjugierten Richtungen in einem elliptischen Flächenpunkt konjugiert-komplex sind und daß auch die kanonischen Normalenrichtungen Nullrichtungen einer Form

$$\tilde{S}^{(12)^2}_{\varrho_1\varrho_2}\, n^{\varrho_1} n^{\varrho_2}; \quad \mathrm{Det}\,(\tilde{S}^{(12)^2}_{\varrho_1\varrho_2}) = S^{-1} \tag{1.10}$$

sind (wie wir aus (1.8) sofort ablesen), welche für elliptische Punkte definit ist. Da schließlich die durch (1.9) dargestellte Fläche reell ist, muß sie gleich ihrer konjugiert-komplexen Darstellung sein, woraus sich die Behauptungen ergeben.

Anmerkung: In I § 1, 3 haben wir gezeigt, wie sich bei der Beschränkung auf inhaltstreue Affinitäten die Normalenebene durch I (1.24) normieren läßt. Setzen wir in (1.5) diese normierten Normalenvektoren voraus, so müssen wir bei der Normalentransformation (1.6) Δ auf 1 normieren. Wir können jedoch durch eine gleichzeitige geeignete Umnormierung der kanonischen Tangentialvektoren dennoch die Form der Gleichung (1.7) erreichen, so daß wir auch bei der Beschränkung auf inhaltstreue Affinitäten zu der Darstellung (1.9) gelangen. Wir erkennen gleichzeitig, daß sich für den Fall allgemeiner Affinitäten durch eine solche Umnormierung noch eine weitere Spezialisierung der Darstellung (1.9) erreichen läßt, z. B. für B, $D \neq 0$: $B = D = 1$[11]).

3. Eine geometrische Charakterisierung des kanonischen Koordinatensystems. Zunächst ist es klar, daß das kanonische Koordinatensystem eindeutig festgelegt ist. Denn die kanonischen Tangential- bzw. Normalenrichtungen sind ja die Nullrichtungen in der Form (1.3) bzw. (1.10). Diese Richtungen sind reell für hyperbolische und konjugiert-komplex für elliptische Punkte. Jeder kovariante Normalenvektor $\mathfrak{N}$ läßt sich, da die $\mathfrak{N}^\varrho$ eine Basis bilden, in der Form $\mathfrak{N} = v_\varrho \mathfrak{N}^\varrho$ schreiben. Wir können $\mathfrak{N}$ als 3-dimensionalen ebenen Raum auffassen. Er enthält die 2-dimensionale Tangentialebene der Fläche wegen $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{x}_z = 0$. Der Schnitt von $\mathfrak{N}$ mit der F_2 ist eine in $\mathfrak{N}$ verlaufende Raumkurve.

$$\mathfrak{N} \circ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = v_\varrho B^\varrho_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0 \tag{1.11}$$

gibt die Tangentenrichtungen an dieser Schnittkurve im Ursprung in Abhängigkeit von v_ϱ an. Diese Richtungen sind reell, wenn die Determinante von (1.11):

$$\mathrm{Det}\,(v_\varrho B^\varrho_{\alpha\beta}) = S^{\varrho_1 \varrho_2}_{(12)^2} v_{\varrho_1} v_{\varrho_2} \tag{1.12}$$

negativ ist. Für geeignete v_ϱ läßt sich das immer erreichen, z. B. mit $v_\varrho B^\varrho_{11} = 0$. Fassen wir (1.12) als quadratische Form in den v_ϱ auf, so ist sie für elliptische Punkte negativ definit. Das bedeutet, daß für *elliptische Punkte* bei jeder Wahl von $\mathfrak{N} = v_\varrho \mathfrak{N}^\varrho$ der Schnitt von $\mathfrak{N}$ mit der F_2 zwei reelle Tangenten im Ursprung hat. Für *parabolische Punkte* gibt es einen ausgezeichneten kovarianten Vektor $\mathfrak{N}^*$, für den $S^{\varrho_1 \varrho_2}_{(12)^2} v_{\varrho_1} v_{\varrho_2} = 0$ gilt; bei einer vollen „Drehung" von $\mathfrak{N}$ um die Tangentialebene fallen daher einmal die beiden Tangentenrichtungen an die Schnittkurve zusammen. Für *hyperbolische Punkte* dagegen gibt es zwei ausgezeichnete Lagen von $\mathfrak{N}$ mit $S^{\varrho_1 \varrho_2}_{(12)^2} v_{\varrho_1} v_{\varrho_2} = 0$, die wir mit $\mathfrak{N}^{*1}$ und $\mathfrak{N}^{*2}$ bezeichnen. Bei einer vollen „Drehung" von $\mathfrak{N}$

[11]) Entsprechend würde sich bei der Zulassung von beliebigen Affinitäten in der kanonischen Darstellung einer F_2 im A_3 die Konstante $c \neq 0$ zu 1 normieren lassen. Vgl. Blaschke, Differentialgeometrie Bd. 2, Berlin 1923, S. 109.

um die Tangentialebene sind daher die Tangenten an die Schnittkurve nacheinander reell, zusammenfallend, komplex, zusammenfallend und schließlich wieder reell.

Wir beschränken uns auf hyperbolische Punkte — für elliptische verlaufen die Überlegungen im Komplexen analog. Aus der kanonischen Darstellung (1. 9) lesen wir jetzt ab: *Die beiden kovarianten kanonischen Normalenvektoren $\mathfrak{N}^{*1}$ und $\mathfrak{N}^{*2}$ sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Schnittkurve mit der F_2 im Ursprung eine Doppeltangente besitzt. Die kanonischen (konjugierten) Tangentenrichtungen sind als die Richtungen dieser Doppeltangenten gekennzeichnet.* Die ausgezeichneten Vektoren $\mathfrak{N}^{*1}$ und $\mathfrak{N}^{*2}$ werden, als 3-dimensionale Räume aufgefaßt, von der Tangentialebene $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ und den kanonischen Normalenvektoren $\mathfrak{n}_2^*$ und $\mathfrak{n}_1^*$ aufgespannt. Es kommt jetzt darauf an, innerhalb dieser 3-dimensionalen Räume die Vektoren $\mathfrak{n}_2^*$ und $\mathfrak{n}_1^*$ zu kennzeichnen. Denn neben diesen Vektoren spannen auch die Vektoren

$$\mathfrak{n}_\sigma = a_\sigma^\alpha \mathfrak{x}_\alpha + \mathfrak{n}_\sigma^*$$

zusammen mit der Tangentialebene die $\mathfrak{N}^{*1}$, $\mathfrak{N}^{*2}$ auf. Beziehen wir die F_2 auf das Basissystem $\mathfrak{x}_\alpha, \bar{\mathfrak{n}}_\sigma$, so wird aus (1. 9):

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} u - a_\varrho^1 n^\varrho(u, v) \\ v - a_\varrho^2 n^\varrho(u, v) \\ n^1(u, v) \\ n^2(u, v) \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Wir betrachten die Projektionen ${}_1\mathfrak{y}$ und ${}_2\mathfrak{y}$ der F_2 in der Darstellung (1. 13) in den Raum $\mathfrak{N}^{*1}$ längs $\bar{\mathfrak{n}}_1$ und den Raum $\mathfrak{N}^{*2}$ längs $\bar{\mathfrak{n}}_2$:

$${}_1\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} u - a_\varrho^1 n^\varrho(u, v) \\ v - a_\varrho^2 n^\varrho(u, v) \\ n^2(u, v) \end{pmatrix}; \quad {}_2\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} u - a_\varrho^1 n^\varrho(u, v) \\ v - a_\varrho^2 n^\varrho(u, v) \\ n^1(u, v) \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Beschränken wir uns auf ${}_1\mathfrak{y}$ — für ${}_2\mathfrak{y}$ gelten die entsprechenden Überlegungen. Die Richtung $\mathfrak{x}_2$ ist Tangente im Ursprung. Die Ebenen durch $\mathfrak{x}_2$ schneiden aus der Fläche ${}_1\mathfrak{y}$ ebene Kurven aus (Fig. 1). Nach einem Satz von TRANSON [12]) liegen die Affinnormalen aller dieser ebenen Kurven in einer Ebene. *Wir zeigen, daß diese TRANSONsche Ebene dann und nur dann von den Vektoren $\mathfrak{x}_1$ und $\bar{\mathfrak{n}}_2$ aufgespannt wird, wenn $a_2^2 = 0$ ist.* — Eine Ebene durch $\mathfrak{x}_2$ werde von $\mathfrak{x}_2$ und $\lambda \bar{\mathfrak{n}}_2 + \mu \mathfrak{x}_1$ (mit $\lambda \neq 0$) aufgespannt. Die

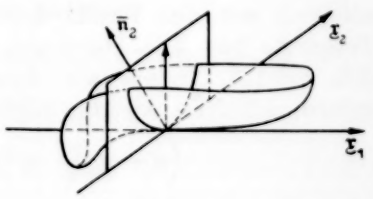

Fig. 1.

[12]) Siehe BLASCHKE [11]), S. 128, Aufgabe 3.

Schnittkurve mit ${}_1\mathfrak{y}$ wird nach (1. 14) auf diese Richtungen bezogen:

$$(*)\quad \begin{pmatrix} v - a_\varrho^2\, n^\varrho(u,v) \\ n^2(u,v) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad (**)\quad \begin{vmatrix} 0 & \mu & u - a_\varrho^1\, n^\varrho \\ 1 & 0 & v - a_\varrho^2\, n^\varrho \\ 0 & \lambda & n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir bestimmen aus (**) u als Funktion von v: $\lambda u = \frac{\mu}{2}(v)^2 + \{3\}$.

Wenn die Affinnormale dieser Kurve im Ursprung die Richtung von $\lambda \bar{\mathfrak{n}}_2 + \mu \mathfrak{x}_1$ haben soll, muß sie sich in die kanonische Form

$$\begin{pmatrix} v^* \\ \frac{(v^*)^2}{2} + \{4\} \end{pmatrix}$$

bringen lassen[13]). Wegen $n^2(u,v) \equiv \frac{(v)^2}{2} + \{3\}$ läßt sich aber (*) dann und nur dann in diese Form überführen, wenn $a_2^2 = 0$ ist. Entsprechend ist mit Hilfe von ${}_2\mathfrak{y}$ der Fall $a_1^1 = 0$ gekennzeichnet.

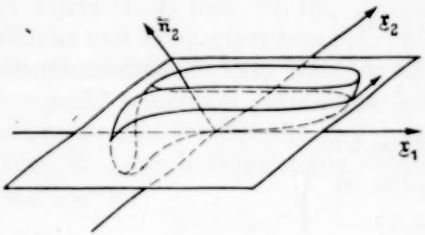

Fig. 2.

Um andererseits das Verschwinden von a_1^2 zu kennzeichnen, suchen wir die Eigenschattenkurve von ${}_1\mathfrak{y}$ für zur $\mathfrak{x}_2$-Achse paralleles Licht auf, d. h. diejenige Kurve, deren Punkte zur $\mathfrak{x}_2$-Achse parallele Tangenten gestatten. Dazu betrachten wir die zur Tangentialebene parallelen Kurven auf ${}_1\mathfrak{y}$ (Fig. 2). Sie sind (in Abhängigkeit von einem Parameter c) nach (1. 14) durch

$$(\dagger)\quad \begin{pmatrix} u - a_\varrho^1\, n^\varrho(u,v) \\ v - a_\varrho^2\, n^\varrho(u,v) \end{pmatrix} \text{ mit } (\dagger\dagger)\quad n^2(u,v) \equiv \frac{(v)^2}{2} + \frac{u}{6}(A(u)^2 + 3\,C(v)^2) + \{4\} = c$$

gegeben, wobei durch (††) u eine Funktion von v wird. Aus

$$\frac{d}{dv}(u - a_\varrho^1\, n^\varrho(u,v)) = 0, \text{ d. h. } \frac{du}{dv} = a_1^1\, u\, \frac{du}{dv} + \frac{d}{dv}\{3\}$$

erhalten wir den Punkt der Kurve, der eine zur $\mathfrak{x}_2$-Achse parallele Tangente hat. Die Ableitung von (††) wird hiermit $v + C\,u\,v + \{3\} = 0$, d. h. $v = \{3\}$. Indem wir dieses in die Darstellung (1. 14) von ${}_1\mathfrak{y}$ einsetzen, erhalten wir die Eigenschattenkurve:

$$\left(u - a_1^1 \frac{(u)^2}{2} + \{3\};\quad - a_1^2 \frac{(u)^2}{2} + \{3\};\quad \{3\}\right).$$

Die Eigenschattenkurve für zur $\mathfrak{x}_2$-Achse paralleles Licht berührt die $\mathfrak{x}_1$-Achse also dann und nur dann von 2. Ordnung, wenn $a_1^2 = 0$ ist. Entsprechend ist mit Hilfe von ${}_2\mathfrak{y}$ $a_2^1 = 0$ gekennzeichnet.

[13]) Siehe Blaschke [11]), S. 14.

Ebenso wie die Forderung an die TRANSONsche Ebene ist dieses offensichtlich eine gewisse Symmetrieforderung (im affinen Sinne) für $_1\mathfrak{y}$ bzw. $_2\mathfrak{y}$ bezüglich der $\mathfrak{x}_1$-Achse bzw. $\mathfrak{x}_2$-Achse. *Unsere ausgezeichneten Normalen des kanonischen Koordinatensystems sind dadurch gekennzeichnet, daß sie gleichzeitig den beiden vorstehenden Forderungen bezüglich der* TRANSONschen *Ebene und der Eigenschattenkurve genügen.* Zusammen mit der obigen Kennzeichnung der konjugierten Richtungen haben wir damit eine vollständige Charakterisierung des kanonischen Koordinatensystems gewonnen.

Die Normalenebene von BURSTIN und MAYER[14]) wird, bezogen auf das kanonische Koordinatensystem, von den Vektoren

$$\eta^i_{11} = \begin{pmatrix} 2C \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \eta^i_{122} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2B \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{15})$$

aufgespannt; damit läßt sich nicht eine so symmetrische Darstellung der Fläche erreichen, wie wir sie mit (1.9) gefunden haben.

4. Die Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen im kanonischen Koordinatensystem[16]). Wir betrachten nur nichtparabolische Punkte, d. h. Punkte mit $S \neq 0$. Zunächst schreiben wir alle Größen so auf, daß sie nicht die bei allgemeinen oder inhaltstreuen Affinitäten noch zusätzlich möglichen Spezialisierungen enthalten. Die partiellen Ableitungen nach u^1 und u^2 (bzw. u und v) bezeichnen wir im kanonischen Koordinatensystem durch die Indizes 1 und 2, wobei wir vor diese Ableitungsindizes ein Komma setzen. Nur bei den Ableitungen von $\mathfrak{x}$ lassen wir dieses Komma fort.

Das kanonische Koordinatensystem ist gekennzeichnet durch

$$B^1_{12} = B^1_{22} = B^2_{11} = B^2_{12} = 0. \tag{1.15}$$

Insbesondere erhalten wir für $\mathfrak{x}_{12}$ aus den Ableitungsgleichungen I (1.17):

$$\mathfrak{x}_{12} = Z^\lambda_{12}\,\mathfrak{x}_\lambda. \tag{1.16}$$

Wir können nun $\mathfrak{N}^1$ und $\mathfrak{N}^2$ in der Form ansetzen

$$\mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{v} = \lambda\,|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{v}, \mathfrak{x}_{22}|; \quad \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{v} = \lambda\,|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{v}|. \tag{1.17}$$

Hieraus ergibt sich wegen $B^\varrho_{\alpha\beta} = B^\varrho_{\beta\alpha} \equiv \mathfrak{N}^\varrho \circ \dfrac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta}$

$$B^1_{11} = B^2_{22} = \lambda\,|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22}|, \tag{1.18}$$

[14]) L. c. [2]) Teil I, § 1 (8).

[15]) Wegen $B \equiv B^{*1}_{112} = -\,G\,Z^1_{12}$, $C \equiv B^{*2}_{122} = -\,G\,Z^2_{21}$ (vgl. (1.21)) stimmt diese Normalenebene also genau für Schiebflächen (1.28) mit derjenigen von WEISE überein.

[16]) Von jetzt ab lassen wir bei den auf das kanonische System bezüglichen Größen den * fort. — Statt u^1, u^2 schreiben wir auch u, v.

so daß wir die Abkürzung $G \equiv B^1_{11} = B^2_{22}$ einführen können. Für die von uns betrachteten nicht-parabolischen Punkte ist $G \neq 0$. Aus (1.15) bis (1.17) und den Ableitungsgleichungen I (1.17) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{112} = G\,(t^2_{12} + Z^2_{11}) = \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{121} = 0; \\ &\mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{221} = G\,(t^1_{21} + Z^1_{22}) = \mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{212} = 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Damit erhalten wir aus I (1.13) für die Größen $Z^\lambda_{\alpha\beta} = Z^\lambda_{\beta\alpha}$:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad 3\,G\,Z^1_{11} = \mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{111} && 3\,G\,Z^2_{22} = \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{222} \\ &\text{(b)} \quad G\,Z^2_{12} = \mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{112} && G\,Z^2_{21} = \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{221} \\ &\text{(c)} \quad G\,Z^1_{22} = \mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{122} = 0 && G\,Z^2_{11} = \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{211} = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Für die $B^\varrho_{\alpha\beta\gamma}$ erhalten wir aus I (1.19) mit (1.20):

$$\begin{aligned} &B^1_{111} = 0;\ B^1_{112} = -\mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{112} = -G\,Z^1_{12};\ B^1_{122} = 0;\ B^1_{222} = \mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{222} = G\,t^1_{22} \\ &B^2_{222} = 0;\ B^2_{221} = -\mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{221} = -G\,Z^2_{21};\ B^2_{211} = 0;\ B^2_{111} = \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{111} = G\,t^2_{11} \end{aligned} \tag{1.21}$$

und aus I (1.14) erhalten wir mit (1.15), (1.18) und (1.20) für $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_1 &= G^{-1}\left\{\mathfrak{x}_{11} - \frac{1}{3}\,\frac{|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{111}, \mathfrak{x}_{22}|}{|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22}|}\,\mathfrak{x}_1\right\}; \\ \mathfrak{n}_2 &= G^{-1}\left\{\mathfrak{x}_{22} - \frac{1}{3}\,\frac{|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{222}|}{|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22}|}\,\mathfrak{x}_2\right\}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Im Falle allgemeiner Affinitäten können wir

$$\lambda = |\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22}|^{-1}; \quad G = 1 \tag{1.22 A}$$

setzen. Bei inhaltstreuen Affinitäten erhalten wir aus I (1.24):

$$\lambda = |\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22}|^{-\frac{2}{3}}; \quad G = |\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22}|^{\frac{1}{3}}. \tag{1.22 I}$$

Mit (1.15), (1.18), (1.19), (1.20) werden die Ableitungsgleichungen I (1.17):

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= G\,\mathfrak{n}_1 + Z^1_{11}\,\mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_{12} &= \qquad Z^\lambda_{12}\,\mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{x}_{22} &= G\,\mathfrak{n}_2 + Z^2_{22}\,\mathfrak{x}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{n}_{1,1} &= t^\varrho_{11}\,\mathfrak{n}_\varrho + \Omega^\lambda_{11}\,\mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{n}_{1,2} &= t^1_{12}\,\mathfrak{n}_1 + \Omega^\lambda_{12}\,\mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{n}_{2,1} &= t^2_{21}\,\mathfrak{n}_2 + \Omega^\lambda_{21}\,\mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{n}_{2,2} &= t^\varrho_{22}\,\mathfrak{n}_\varrho + \Omega^\lambda_{22}\,\mathfrak{x}_\lambda. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung können wir schließen:

$$\mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{111} = G_{,1} + G\,t^1_{11} + G\,Z^1_{11}; \quad \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{222} = G_{,2} + G\,t^2_{22} + G\,Z^2_{22}.$$

Hieraus ergibt sich mit (1.20a):

$$(\lg G)_{,1} = 2\,Z^1_{11} - t^1_{11}; \quad (\lg G)_{,2} = 2\,Z^2_{22} - t^2_{22}. \tag{1.24}$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen sich alle zu Paaren zusammenfassen, die bei der Vertauschung der Indizes 1 und 2 ineinander übergehen. Wenn wir daher im folgenden eine Gleichung mit Indizes i und k schreiben, so repräsentiert sie zwei Gleichungen, die durch die

Substitionen $i = 1$, $k = 2$ und $i = 2$, $k = 1$ aus der gegebenen hervorgehen. Insbesondere sind also i und k keine Summationsindizes.

Zusammen mit den Gleichungen (1. 15), (1. 18), (1. 19) und (1. 24), die wir unter (1. 25 e) zusammenstellen, werden die Integrabilitätsbedingungen I (1. 18):

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad G\,\Omega^i_{ik} = -\,Z^i_{ii,k} + Z^i_{ik,i} + Z^k_{ik}\,Z^i_{ki} \\
&\qquad\quad G\,\Omega^k_{ik} = Z^k_{ik,i} + Z^k_{ik}\,Z^k_{ik} - Z^k_{ik}\,Z^i_{ii} \\
&\text{(b)} \quad t^i_{ik} = Z^i_{ik} - (\lg G)_{,k}\,; \quad t^k_{ik} = 0 \\
&\text{(c)} \quad \Omega^i_{ii,k} - \Omega^i_{ik,i} + \Omega^i_{ii}(\lg G)_{,k} + \Omega^i_{ik}(Z^i_{ii} - (\lg G)_{,i}) - \Omega^k_{ik}\,Z^i_{ki} + t^k_{ii}\,\Omega^i_{kk} = 0 \\
&\qquad\quad \Omega^k_{ii,k} - \Omega^k_{ik,i} + \Omega^\lambda_{ii}\,Z^k_{\lambda k} - \Omega^k_{ik}\,Z^k_{ik} + t^\sigma_{ii}\,\Omega^k_{\sigma k} - t^i_{ik}\,\Omega^k_{ii} = 0 \\
&\text{(d)} \quad G\,\Omega^k_{ii} = -\,t^k_{ii,k} - t^k_{ii}\,t^k_{kk} + t^i_{ik}\,t^k_{ii} \\
&\qquad\quad G\,\Omega^i_{ik} = t^i_{ii,k} - t^i_{ik,i} + t^i_{kk}\,t^k_{ii} \\
&\text{(e)} \quad B^i_{ii} = G\,; \quad B^i_{ik} = B^i_{kk} = 0\,; \quad Z^i_{kk} = 0\,; \quad t^i_{ii} = 2\,Z^i_{ii} - (\lg G)_{,i}\,.
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Für inhaltstreue Affinitäten kommt I (1. 29 b) (mit (1. 21)) hinzu[17]):

$$Z^i_{ik} + 3\,t^\sigma_{\sigma k} = 0. \tag{1.25 I}$$

Bei allgemeinen Affinitäten setzen wir gemäß (1. 22 A):

$$G = 1. \tag{1.25 A}$$

In jedem Falle lassen sich mit Hilfe von (1. 25 b) und (1. 25 e) noch t^i_{ik} und t^i_{ii} aus den Gleichungen (1. 25) eliminieren. Das ergibt, indem wir die erwähnten Gleichungen (1. 25 b) und (1. 25 e) unter (1. 26 g) zusammenfassen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a, b)} \quad G\,\Omega^i_{ik} = -\,Z^i_{ii,k} + Z^i_{ik,i} + Z^k_{ik}\,Z^i_{ki} = 2\,Z^i_{ii,k} - Z^i_{ik,i} + t^i_{kk}\,t^k_{ii} \\
&\text{(c)} \quad G\,\Omega^k_{ik} = Z^k_{ik,i} + Z^k_{ik}\,Z^k_{ik} - Z^k_{ik}\,Z^i_{ii} \\
&\text{(d)} \quad G\,\Omega^k_{ii} = -\,t^k_{ii,k} + t^k_{ii}(Z^i_{ik} - 2\,Z^k_{kk}) \\
&\text{(e)} \quad \Omega^i_{ii,k} - \Omega^i_{ik,i} + \Omega^i_{ii}(\lg G)_{,k} + \Omega^i_{ik}(Z^i_{ii} - (\lg G)_{,i}) - \Omega^k_{ik}\,Z^i_{ki} + t^k_{ii}\,\Omega^i_{kk} = 0 \\
&\text{(f)} \quad \Omega^k_{ii,k} - \Omega^k_{ik,i} + \Omega^\lambda_{ii}\,Z^k_{\lambda k} - \Omega^k_{ik}\,Z^k_{ik} + t^k_{ii}\,\Omega^k_{kk} + (2\,Z^i_{ii} - (\lg G)_{,i})\,\Omega^k_{ik} \\
&\qquad\qquad - (Z^i_{ik} - (\lg G)_{,k})\,\Omega^k_{ii} = 0 \\
&\text{(g)} \quad B^i_{ii} = G\,; \quad B^i_{ik} = B^i_{kk} = 0\,; \quad Z^i_{kk} = 0\,; \quad t^i_{ii} = 2\,Z^i_{ii} - (\lg G)_{,i}\,; \\
&\qquad\quad t^i_{ik} = Z^i_{ik} - (\lg G)_{,k}\,; \quad t^k_{ik} = 0
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

$$2\,Z^k_{ki} + 3\,Z^i_{ii} = 3\,(\lg G)_{,i} \tag{1.26 I}$$

$$G = 1. \tag{1.26 A}$$

In elliptischen Punkten sind die hierin vorkommenden Größen komplex. Da jedoch die Fläche reell ist, muß die Reihenentwicklung

[17]) Diese Gleichung erhält man auch direkt, indem man (1. 22 I) differenziert und (1. 25) verwendet.

im kanonischen Koordinatensystem mit der konjugiert-komplexen Reihenentwicklung übereinstimmen. Hieraus ergeben sich folgende weitere Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Ableitungsgleichungen:

$$B^i_{ii} = \overline{B}^k_{kk} = G\,; \quad Z^i_{ii} = \overline{Z}^k_{kk}; \quad Z^i_{ik} = \overline{Z}^k_{ki};$$

$$\Omega^i_{ii} = \overline{\Omega}^k_{kk}; \quad \Omega^k_{ik} = \overline{\Omega}^i_{ki}; \quad \Omega^i_{kk} = \overline{\Omega}^k_{ii}; \quad \Omega^i_{ik} = \overline{\Omega}^k_{ki}; \tag{1.26*}$$

$$t^i_{ii} = \overline{t}^k_{kk}; \quad t^i_{kk} = \overline{t}^k_{ii}; \quad t^i_{ik} = \overline{t}^k_{ki}.$$

5. Ein direkter Zugang zur Theorie der F_2 im A_4. Unabhängig von den allgemeinen Entwicklungen in Teil I können wir den Zugang zur affinen Flächentheorie einer F_2 im A_4 und damit zum Inhalt des vorliegenden Teils II folgendermaßen gewinnen: Wir beziehen uns ausschließlich auf die konjugierten Parameter, die wir als die Nullinien der Form (1.3) definieren. Sie sind also durch

$$(*) \qquad |\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}| = 0; \quad |\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}| = 0$$

gekennzeichnet, während wir $|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{22}| \neq 0$ voraussetzen wollen. $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ nennen wir auch kanonische Tangentenrichtungen. Kanonische kovariante Normalenvektoren $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{N}^2$ erklären wir durch (1.17) und hiermit die Größen $B^\varrho_{\alpha\beta}$ durch $\mathfrak{N}^\varrho \circ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$, d. h. durch (1.15) und (1.18). Die Größen $B^\varrho_{\alpha\beta\gamma}$ erklären wir durch die skalaren Produkte in (1.21) [18]. Die kanonischen kontravarianten Normalenvektoren $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2$ und damit die Affinnormalenebene definieren wir durch (1.22) mit (1.22 A) oder (1.22 I), je nachdem wir allgemeine Affinitäten zulassen oder uns auf inhaltstreue beschränken. Diese Vektoren sind offenbar bei Umnormierungen der konjugierten Parameter bis auf einen Faktor oder absolut invariant. Aus (*) entnehmen wir $\mathfrak{x}_{12} \equiv 0\,(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ und zusammen mit (1.22) ergibt sich das erste Tripel der Ableitungsgleichungen (1.23), in denen wir die Bezeichnungen für die Koeffizienten als Abkürzungen übernehmen. Aus $\mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{112} = \mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{x}_{121} = 0$ und $\mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{221} = \mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{x}_{122} = 0$ folgt $\mathfrak{N}^2 \circ \mathfrak{n}_{1,2} = \mathfrak{N}^1 \circ \mathfrak{n}_{2,1} = 0$ und damit die Form der letzten vier Gleichungen (1.23). Es folgen wie oben (1.24) ff. Ebenso folgt die Gültigkeit von (1.15) ff. und wir gelangen so zum Verständnis von § 1.1 und aller folgenden Abschnitte.

6. Schiebflächen. Unter einer *Schiebfläche* verstehen wir eine Fläche, die sich in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(u) + \mathfrak{v}(v) \tag{1.27}$$

darstellen läßt, wobei die Parameter auch konjugiert-komplex sein können. Die in (1.27) verwendeten Parameter sind offenbar die konjugierten Parameter der Fläche: Es ist $B^1_{12} = B^2_{12} = 0$ wegen $\mathfrak{x}_{12} = 0$.

[18] Diese Definitionen gelten natürlich nur für unsere speziellen Parameter und kovarianten Normalenvektoren.

Umgekehrt kennzeichnet diese Gleichung auch die Schiebflächen, so daß ihre Differentialgleichung für konjugierte Parameter durch

$$Z^1_{12} = Z^2_{21} = 0 \tag{1.28}$$

gegeben ist (vgl. (1.16)). Für allgemeine Parameter sind sie durch $P_t \equiv B^{\varrho_1}_{x_1\beta_1\gamma_1} B^{\varrho_2}_{x_2\beta_2\gamma_2} \breve{B}^{x_1x_2}_{\varrho_1} \breve{B}^{\beta_1\beta_2}_{\varrho_2} \breve{B}^{\gamma_1\gamma_2}_{t} = 0$ gekennzeichnet, wie man durch den Übergang ins kanonische System leicht nachprüft.

Betrachten wir insbesondere Schiebflächen mit ebenen Erzeugenden:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(u) + \mathfrak{v}(v) = \begin{pmatrix} P_1(u) \\ P_2(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1(v) \\ Q_1(v) \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

so erhalten wir unmittelbar aus (1.22) für die Normalen:

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{u}'' - \frac{1}{3}\frac{d}{du}\lg(P_1'P_2'' - P_2'P_1'')\,\mathfrak{u}'; \quad \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{v}'' - \frac{1}{3}\frac{d}{dv}\lg(Q_1'Q_2'' - Q_2'Q_1'')\,\mathfrak{v}'.$$

Die Affinnormalenebene einer Schiebfläche mit ebenen Erzeugenden wird also von den Affinnormalen der ebenen Erzeugenden aufgespannt.

Zum Abschluß schreiben wir die Integrabilitätsbedingungen und Folgerungen aus der Wahl des kanonischen Koordinatensystems auf, wie sie sich aus (1.26) mit (1.28) für Schiebflächen ergeben. Zunächst lesen wir aus (1.26a, b) wegen (1.28) ab: $Z^i_{ii,k} = Z^k_{kk,i}$. Wir setzen daher $Z^i_{ii} \equiv H_{,i}$. Dann folgt aus (1.26a, b): $\Omega^i_{ik} = \Omega^k_{ki} \equiv I$, so daß wir damit erhalten:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \ \Omega^i_{ik} = I; && GI = -H_{,12} \\
&\text{(b)}\ \ Z^i_{ii} = H_{,i}; && t^i_{kk}t^k_{ii} = -3H_{,12} \\
&\text{(c)}\ \ \Omega^k_{ik} = 0; && \text{(d)}\ \ t^k_{ii,k} + 2H_{,k}t^k_{ii} + G\Omega^k_{ii} = 0 \\
&\text{(e)}\ \ \Omega^i_{ii,k} - I_{,i} + \Omega^i_{ii}(\lg G)_{,k} + I(H_{,i} - (\lg G)_{,i}) + t^k_{ii}\Omega^k_{kk} = 0 \\
&\text{(f)}\ \ \Omega^k_{ii,k} + \Omega^k_{ii}H_{,k} + t^k_{ii}\Omega^k_{kk} + (\lg G)_{,k}\Omega^k_{ii} = 0 \\
&\text{(g)}\ \ \begin{matrix} B^i_{ii} = G;\ B^i_{ik} = B^i_{kk} = 0;\ Z^i_{kk} = 0;\ t^i_{ii} = 2H_{,i} - (\lg G)_{,i} \\ t^i_{ik} = -(\lg G)_{,k};\ t^k_{ik} = 0;\ Z^i_{ik} = 0 \end{matrix}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$H_{,i} = (\lg G)_{,i} \tag{1.30 I}$$

$$G = 1. \tag{1.30 A}$$

§ 2.

Die Schmiegquadriken.

1. Die allgemeine Schmiegquadrik. In einem örtlichen Basissystem $\mathfrak{x}_a$, $\mathfrak{n}_\varrho$ der F_2 sei

$$a_{lm}x^l x^m + 2a_{l0}x^l + a_{00} = 0 \qquad (l, m = 1, 2, 3, 4) \tag{2.1*}$$

oder, indem wir eine Zerlegung in tangentiale (Indizes α, β, γ) und normale (Indizes ϱ, σ, τ) Terme vornehmen,

$$(2.1^{**}) \quad c_{\varrho\sigma} y^\varrho y^\sigma + 2 b_{\alpha\varrho} x^\alpha y^\varrho + a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2 c_{\varrho 0} y^\varrho + 2 a_{\alpha 0} x^\alpha + a_{00} = 0$$

mit $$(a_{l0}) = (a_{\alpha 0}, c_{\varrho 0}); \; (a_{lm}) = \begin{pmatrix} a_{\alpha\beta} & b_{\alpha\sigma} \\ b_{\varrho\beta} & c_{\varrho\sigma} \end{pmatrix}; \; (x^l) = (x^\alpha, y^\varrho)$$

die Gleichung einer Quadrik. Die F_2 werde durch (1.5) dargestellt [19]). Wir erhalten eine die F_2 von 3. Ordnung berührende Quadrik [20]), wenn wir ihre Koeffizienten so wählen, daß die Gleichung (2.1**) für

$$(2.2) \qquad x^\alpha = u^\alpha + \{4\}; \; y^\varrho = B^\varrho_{\alpha\beta} \frac{u^\alpha u^\beta}{2!} + B^\varrho_{\alpha\beta\gamma} \frac{u^\alpha u^\beta u^\gamma}{3!} + \{4\}$$

mit geeigneten Termen $\{4\}$ identisch erfüllt ist. Wie man durch Koeffizientenvergleich sieht, muß gelten

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad a_{00} = 0 && \text{Berührung 0. Ordnung,} \\ &\text{(b)} \quad a_{\alpha 0} = 0 && \text{Berührung 1. Ordnung,} \\ &\text{(c)} \quad a_{\alpha\beta} + c_{\varrho 0} B^\varrho_{\alpha\beta} = 0 && \text{Berührung 2. Ordnung,} \\ &\text{(d)} \quad b_{\alpha\varrho} B^\varrho_{\beta\gamma} + b_{\beta\varrho} B^\varrho_{\gamma\alpha} \\ &\qquad\qquad + b_{\gamma\varrho} B^\varrho_{\alpha\beta} + c_{\varrho 0} B^\varrho_{\alpha\beta\gamma} = 0 && \text{Berührung 3. Ordnung.} \end{aligned}$$

Wir fassen die $c_{\varrho 0}$ als Parameter auf. Dann ergeben sich unmittelbar die Werte von a_{00}, $a_{\alpha 0}$, $a_{\alpha\beta}$. Die Determinante von (2.3 d) ist gleich $-36\,S$, so daß für nichtparabolische Punkte auch die $b_{\alpha\varrho}$ bestimmt sind. Wir erhalten

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &a_{00} = 0; \; a_{\alpha 0} = 0; \; a_{\alpha\beta} = -c_{\varrho 0} B^\varrho_{\alpha\beta}. \\ &b_{\alpha\varrho} = -\tfrac{1}{6} c_{\sigma_1 0} B^{\sigma_1}_{\alpha\beta_1\beta_2} \breve{B}^{\beta_1\beta_2}_{\varrho} - \tfrac{1}{6} c_{\sigma_1 0} B^{\sigma_1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \underset{\smile}{G^{\alpha_2\alpha_3}_{12}} \underset{\smile}{\delta^{\alpha_1\beta_1}_{12}} B^{\sigma_1}_{\beta_1\alpha} \underset{\smile}{\delta^{12}_{\varrho\sigma_1}} \\ &\qquad\qquad \equiv -c_{\sigma_1 0} K^{\sigma_1}_{\varrho\alpha} \; [21]), \end{aligned}$$

wobei $\underset{\smile}{G^{\alpha\beta 12}_{12}}$ das komplementäre Element von $G^{12}_{\alpha\beta}$ (vgl. (1.2)) ist.

Falls die $c_{\varrho 0}$ beide verschwinden, verschwinden auch die Koeffizienten aus (2.4) und damit für eine Berührung 3. Ordnung auch die $c_{\varrho\sigma}$, d. h. es verschwinden alle Koeffizienten der Quadrik (2.1). Diesen Fall müssen wir also ausschließen.

Falls die $c_{\varrho 0}$ nicht beide verschwinden, sind die $c_{\varrho\sigma}$ beliebig. Denn jetzt lassen sich die Terme $\{4\}$ von y^ϱ in (2.2) immer so wählen, daß

---

[19]) Diese Darstellung bedeutet für unsere Zwecke eine nur unwesentliche Spezialisierung; die Gleichungen (2.3) lauten im allgemeinen Fall ebenso.

[20]) Eine Berührung 4. Ordnung ist mit den vierzehn Konstanten i. a. nicht zu erreichen.

[21]) Dieses verifiziert man am bequemsten im kanonischen Koordinatensystem, für das sich (2.3) sehr vereinfacht (vgl. (2.7)).

die Terme $\{4\}$ von $c_{\varrho 0}\, y^\varrho$ und $c_{\varrho\sigma}\, y^\varrho y^\sigma$ sich in (2. 1**) herausheben: *Die Gleichungen* (2. 4) *bestimmen bei beliebiger Wahl der* $c_{\varrho 0}$ *(die nur nicht beide gleich Null sein dürfen) zusammen mit beliebig gewählten* $c_{\varrho\sigma}$ *eine die* F_2 *von 3. Ordnung berührende Quadrik* (2. 1).

2. Der Kegel für die Mittelpunkte der Schmiegquadriken. Wir haben also mit den $c_{\varrho 0}$ und $c_{\varrho\sigma}$ vier wesentliche Parameter in unserer Schmiegquadrik. Die Mittelpunkte sind jedoch bereits bis auf drei Parameter festgelegt. Denn:

$$x^l_M = -\breve{a}^{lm}\, a_{m0} \quad ^{22)} \qquad (\text{mit } \breve{a}^{lm}\, a_{lm'} = \delta^m_{m'})$$

ergibt den Mittelpunkt der Quadrik (2. 1). Hieraus folgt wegen (2. 4):

$$x^l_M\, a_{l\alpha} = -a_{\alpha 0} = 0, \text{ d. h. } y^\varrho_M\, b_{\varrho\alpha} + x^\lambda_M\, a_{\lambda\alpha} = 0.$$

Das bedeutet aber mit den Werten aus (2. 4):

$$c_{\sigma 0}(y^\varrho_M\, K^\sigma_{\varrho\alpha} + x^\lambda_M\, B^\sigma_{\lambda\alpha}) = 0. \tag{2. 5}$$

Die $c_{\sigma 0}$ dürfen nicht beide verschwinden. Es muß also

$$\operatorname{Det}(y^\varrho_M\, K^\sigma_{\varrho\alpha} + x^\lambda_M\, B^\sigma_{\lambda\alpha}) = 0 \tag{2. 6}$$

gelten. Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Schmiegquadriken ist also ein 3-dimensionaler quadratischer Kegel. Das Besondere ist nun, daß die Koeffizienten von $y^\varrho_M\, x^\lambda_M$ herausfallen. Wir erkennen dies bequem im kanonischen Koordinatensystem. (2. 4) lautet dort

$$\begin{matrix} a_{00} = 0 \\ a_{\alpha 0} = 0 \end{matrix} \quad (a_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -c_{10} & 0 \\ 0 & -c_{20} \end{pmatrix}; \quad (b_{\alpha\varrho}) = \begin{pmatrix} -c_{20}\frac{A}{3} & -c_{20}C \\ -c_{10}B & -c_{10}\frac{D}{3} \end{pmatrix} \tag{2. 7}$$

und die Gleichungen (2. 5) und (2. 6) erhalten die Form

$$c_{10}\, x^1_M + c_{20}\left(y^1_M \frac{A}{3} + y^2_M C\right) = 0; \quad c_{20}\, x^2_M + c_{10}\left(y^1_M B + y^2_M \frac{D}{3}\right) = 0 \tag{2. 8}$$

$$x^1_M\, x^2_M - \left(y^1_M \frac{A}{3} + y^2_M C\right)\left(y^1_M B + y^2_M \frac{D}{3}\right) = 0 \quad ^{23)}. \tag{2. 9}$$

Durch eine Basistransformation innerhalb der Tangential- und Normalenebene bringen wir (2. 9) für hyperbolische Punkte auf die Form [24])

$$(x_1)^2 - (x_2)^2 + \varepsilon_1 (y_1)^2 - \varepsilon_2 (y_2)^2 = 0 \tag{2. 10 H}$$

und für elliptische Punkte auf die (jetzt reelle) Form

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 - \varepsilon_1 (y_1)^2 - \varepsilon_2 (y_2)^2 = 0, \tag{2. 10 E}$$

---

[22]) Hierfür müssen wir $\operatorname{Det}(a_{lm}) \neq 0$ voraussetzen; diese und die folgenden Gleichungen gelten aber auch im Falle $\operatorname{Det}(a_{lm}) = 0$, wenn wir statt x^l_M: $\operatorname{Det}(a_{lm})\, x^l_M$ betrachten.

[23]) Der Kegel schneidet die Tangentialebene also in den konjugierten Richtungen.

[24]) Wir bezeichnen die neuen Koordinaten mit y_ϱ, x_α.

worin ε_1, ε_2 in Abhängigkeit von den 3. Ableitungen von $\mathfrak{x}$ die Werte 1 oder 0 annehmen können. Wir erkennen: *Jedem nichtparabolischen Flächenpunkt ist ein 3-dimensionaler quadratischer Kegel* (2. 6) *bzw.* (2. 10) *zugeordnet. Er läßt sich für* $\mathrm{Det}(a_{lm}) \neq 0$ *als geometrischer Ort der eigentlichen Mittelpunkte der Schmiegquadriken* (2. 1), (2. 4) *charakterisieren — für* $\mathrm{Det}(a_{lm}) = 0$ *enthält er die zulässigen Durchmesserrichtungen dieser Schmiegquadriken. Tangentialebene und Normalenebene sind konjugierte Ebenen bezüglich dieses Kegels.* Wir haben damit eine geometrische Kennzeichnung der Normalenebene als ganzer gewonnen.

3. Die ausgezeichneten Schmiegquadriken. Beschränken wir uns auf hyperbolische Punkte, so hat der Mittelpunktskegel (2. 10 H) i. a. zwei reelle Geraden mit der Normalenebene gemeinsam; auf diesen Geraden kann der Mittelpunkt beliebig gewählt werden. Solche Schmiegquadriken sind also durch

$$x_M^1 = 0; \quad x_M^2 = 0 \tag{2. 11 a}$$

gekennzeichnet. Damit folgt aus (2. 8):

$$c_{20}\left(y_M^1 \frac{A}{3} + y_M^2 C\right) = 0; \quad c_{10}\left(y_M^1 B + y_M^2 \frac{D}{3}\right) = 0. \tag{2. 12}$$

$c_{10} = c_{20} = 0$ ist ausgeschlossen. $c_{10} \neq 0$, $c_{20} \neq 0$ ist nur möglich für $\frac{AD}{9} - BC = 0$, was jedoch i. a. nicht zu gelten braucht. Wir können aber jedenfalls den Gleichungen (2. 12) immer genügen, und i. a. ist es auch notwendig, wenn wir

$$\text{(I)} \quad c_{10} = 0; \; c_{20} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \text{(II)} \quad c_{10} \neq 0; \; c_{20} = 0 \tag{2. 11 b}$$

[25]

setzen. Wenn die Beziehungen (2. 11 a) und (2. 11 b) beide gelten, sprechen wir von einer *ausgezeichneten Schmiegquadrik.* Wir finden z. B. für die ausgezeichnete Schmiegquadrik (I) mit (2. 11 a, b) aus (2. 7):

$$a_{00} = 0$$
$$(a_{l0}) = (0, 0, 0, c_{20}); \; (a_{lm}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{A}{3} & -C \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{A}{3} & 0 & \sigma\frac{A}{3} & \sigma C \\ -C & 0 & \sigma C & \frac{c_{22}}{c_{20}} \end{pmatrix}; \quad \sigma, \frac{c_{22}}{c_{20}} \text{ bel.}$$

Aus $\mathrm{Det}(a_{lm}) = \frac{A}{3}\left(\frac{A}{3}\frac{c_{22}}{c_{20}} - \sigma(C)^2\right)$ folgt, daß die ausgezeichneten Schmiegquadriken (I) dann und nur dann notwendig ein Paraboloid

[25]) Da der 3-dimensionale Tangentialraum an die Schmiegquadrik im Ursprung durch $y^2 c_{20} = 0$ gegeben ist, haben diese Quadriken die kennzeichnende Eigenschaft, daß ihr Tangentialraum ($y^2 = 0$ bzw. $y^1 = 0$) die Normalenebene in einer kanonischen Normalen schneidet.

sind (d. h. Det $(a_{lm}) = 0$ gilt), wenn $A = 0$ ist. Andernfalls läßt sich nämlich $\frac{c_{22}}{c_{20}}$ immer so wählen, daß Det $(a_{lm}) \neq 0$ ist.

Unter einer *paraboloidischen Fläche* verstehen wir eine Fläche, für die die ausgezeichneten Schmiegquadriken (I) und (II) immer notwendig Paraboloide sind. Wir zeigen: *Die paraboloidischen Schiebflächen sind die Schiebflächen mit ebenen Erzeugenden*[26]. *Sie sind auch durch das Verschwinden der Koeffizienten* $B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma}$ *der kubischen Differentialformen gekennzeichnet.* Die paraboloidischen Flächen sind nämlich nach den obigen Bemerkungen im kanonischen System durch $A \equiv B^2_{111} = 0$, $D \equiv B^1_{222} = 0$, d. h. mit (1.21) durch $t^2_{11} = t^1_{22} = 0$ gekennzeichnet. Damit folgt für Schiebflächen aus (1.30) mit (1.30 A):

$$-H_{,12} = I = \Omega^1_{12} = \Omega^2_{21} = \Omega^1_{1\,,2} = \Omega^2_{2\,,1} = \Omega^1_{22} = \Omega^2_{11} = 0.$$

D. h. insbesondere $H = \text{const.}$ bei geeigneter Normierung[27]. Es gilt also

$$Z^1_{11} = Z^2_{22} = 0;\ t^1_{11} = t^2_{22} = 0;\ \Omega^1_{11} = U(u);\ \Omega^2_{22} = V(v)$$

und mit dem Ansatz $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(u) + \mathfrak{v}(v)$ werden die Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{x}_{11} = \mathfrak{u}'' = \mathfrak{n}_1;\quad \mathfrak{x}_{22} = \mathfrak{v}'' = \mathfrak{n}_2$$

und damit

$$\mathfrak{n}_{1,1} = \mathfrak{u}''' = U(u)\mathfrak{u}';\quad \mathfrak{n}_{2,2} = \mathfrak{v}''' = V(v)\mathfrak{v}'.$$

Da $U(u)$ und $V(v)$ beliebige Funktionen sind, bedeuten diese Gleichungen weiter nichts, als daß $\mathfrak{u}(u)$ und $\mathfrak{v}(v)$ beliebige ebene Kurven sind. — Da schließlich für paraboloidische Schiebflächen neben B^2_{111} und B^1_{222} nach (1.21) auch $B^1_{112} = -GZ^1_{12}$ und $B^2_{221} = -GZ^2_{21}$ verschwinden, gilt $B^{\varrho}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$, q. e. d.

§ 3.

Semisphären.

1. Definition und allgemeine Eigenschaften. In I § 3.1 haben wir für einen Punkt $\mathfrak{x}$ die Gesamtheit der Schnittpunkte benachbarter Normalenebenen mit der Normalenebene in diesem Punkt betrachtet. Die Koordinaten λ^{ϱ} dieser sog. *Krümmungsspur* in der Normalenebene sind nach I (3.3) durch Det $(\delta^{\lambda}_{\alpha} + \lambda^{\varrho}\,\Omega^{\lambda}_{\varrho\alpha}) = 0$ gegeben. Für eine F_2 im A_4 ist die Krümmungsspur also ein in der Normalenebene verlaufender Kegelschnitt. Für jedes Paar $\lambda^{\varrho}_{(i)}$ $(i = 1, 2)$ konjugierter Punkte auf diesem Kegelschnitt erhalten wir aus

$$(\delta^{\lambda}_{\alpha} + \lambda^{\varrho}_{(i)}\,\Omega^{\lambda}_{\varrho\alpha})\,du^{\alpha} = 0$$

---

[26]) Vgl. das S. 195 über diese Flächen Gesagte.

[27]) Zunächst können wir jedenfalls $H = u + v$ und damit $H_{,1} = Z^1_{11} = 1$ und $H_{,2} = Z^2_{22} = 1$ annehmen. Dann läßt sich aber immer mit der Transformation $u^* = e^u$; $v^* = e^v$ $Z^{*1}_{11} = Z^{*2}_{22} = 0$, d. h. $H^*_{,1} = H^*_{,2} = 0$ erreichen.

zwei Richtungen in der Tangentialebene; sie entsprechen denjenigen Nachbarpunkten $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_\alpha du^\alpha$, deren Normalenebene mit der Normalenebene in $\mathfrak{x}$ gerade die Punkte $\lambda^\varrho_{(i)}$ gemeinsam hat. Ausgezeichneten Punkten auf dem Kegelschnitt werden auch ausgezeichnete Richtungen in der Tangentialebene entsprechen. Als solche bieten sich die unendlich fernen Punkte an. Die diesen Punkten entsprechenden Richtungen sind durch

$$\lambda^\varrho \Omega^\lambda_{\varrho\alpha} du^\alpha = 0 \tag{3. 1}$$

gegeben. Wir bezeichnen sie als *Hauptkrümmungsrichtungen*. Durch Elimination von λ^ϱ erhalten wir in

$$\mathrm{Det}\,(\Omega^\lambda_{\varrho\alpha} du^\alpha) = 0, \text{ d. h. } \delta^{12}_{\lambda_1 \lambda_2} \Omega^{\lambda_1}_{1\alpha} \Omega^{\lambda_2}_{2\beta} du^\alpha du^\beta = 0 \tag{3. 2}$$

die Differentialgleichung der *Hauptkrümmungslinien*.

Verstehen wir unter dem *Normalenbild* unserer F_2 das aus dem Schnitt des Normalenebensystems mit dem den A_4 begrenzenden projektiven 3-dimensionalen Raum entstehende Geradensystem

$$\lambda^\varrho \mathfrak{n}_\varrho, \tag{3. 3}$$

so lassen sich unsere Hauptkrümmungslinien auch als die Torsallinien dieses Geradensystems auffassen. Denn (3. 2) läßt sich auch in der Form

$$\left|\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \frac{\partial \mathfrak{n}_1}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial \mathfrak{n}_2}{\partial u^\beta}\right| du^\alpha du^\beta = 0 \tag{3. 4}$$

schreiben. Indem wir (in naheliegender Analogie) in einem (2-parametrigen) Ebenensystem des A_4 die durch (3. 4) ausgezeichneten Ebenenscharen als *Hypertorsen*[28]) bezeichnen, können wir auch sagen: Die Hauptkrümmungslinien sind diejenigen Kurven, längs derer die Normalenebenen eine Hypertorse bilden.

Wir nennen eine Fläche *Semisphäre*, wenn jede Kurve der Fläche Hauptkrümmungslinie ist. Die Koeffizienten von (3. 2) müssen dann identisch verschwinden:

$$\tfrac{1}{2} \delta^{12}_{\lambda_1 \lambda_2} (\Omega^{\lambda_1}_{1\alpha} \Omega^{\lambda_2}_{2\beta} + \Omega^{\lambda_1}_{2\alpha} \Omega^{\lambda_2}_{1\beta}) = 0 \tag{3. 5}$$

ist die Differentialgleichung der Semisphären. Deutet man diese Gleichung im Normalenbild, so besagt sie, daß das Geradensystem (3. 3) singulär ist, d. h. daß es in ein Geradenbündel oder Geradenfeld entartet[29]). Es gilt also für je zwei Normalenebenen $(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2)$ und $(\mathfrak{n}_1^*, \mathfrak{n}_2^*)$:

$$|\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_1^*, \mathfrak{n}_2^*| = 0.$$

[28]) Dieser Begriff ist umfassender als der von BURSTIN und MAYER[2]) eingeführte Begriff.

[29]) Vgl. etwa SAUER, Projektive Liniengeometrie, Berlin 1937, S. 96.

Eine Semisphäre ist also dadurch gekennzeichnet, daß entweder jede Normalenebene eine zu einer festen Geraden parallele Gerade enthält oder die Richtungen aller Normalenebenen in einem A_3 liegen.

2. Die semisphärischen Schiebflächen. Die kennzeichnenden Gleichungen (3. 5) erhalten für Schiebflächen mit (1. 30) die Form

$$\Omega^1_{11} I = 0;\ \Omega^1_{11}\Omega^2_{22} + (I)^2 - \Omega^1_{22}\Omega^2_{11} = 0;\ \Omega^2_{22} I = 0. \tag{3.6}$$

Da diese Flächen für beliebige Affinitäten erklärt sind, können wir in (1. 30) $G = 1$ setzen. Wir diskutieren zunächst den Fall $I = 0$ und zeigen im Anschluß daran, daß es zu $I \neq 0$ keine Flächen gibt.

$I = 0$ bedeutet nach (1. 30 a): $H_{,12} = 0$, d. h. $H = \text{const}$ [30]) bei geeigneter Normierung. Aus (1. 30 b) und (3. 6) wird

$$t^1_{22} t^2_{11} = 0;\ \Omega^1_{11}\Omega^2_{22} - \Omega^1_{22}\Omega^2_{11} = 0. \tag{3.7}$$

1) $t^1_{22} = 0$. Es folgt aus (1. 30 d): $\Omega^1_{22} = 0$ und damit aus (3. 7):

(A) $\Omega^1_{11} = 0$. An wesentlichen Gleichungen bleiben aus (1. 30) damit übrig

$$\text{(1. 30 d)}\quad t^2_{11,2} + \Omega^2_{11} = 0; \qquad \text{(1. 30 e)}\quad \Omega^2_{22,1} = 0;$$

$$\text{(1. 30 f)}\quad \Omega^2_{11,2} + t^2_{11}\Omega^2_{22} = 0. \text{ D h.}$$

$$\Omega^2_{22} = V(v), \qquad t^2_{11,22} - V(v)\, t^2_{11} = 0. \tag{3.8}$$

Wir können $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(u) + \mathfrak{v}(v)$ ansetzen; dann lauten die vier nicht identisch erfüllten Ableitungsgleichungen unter Verwendung der (durch Berücksichtigung unserer obigen Annahmen entstehenden) Gleichungen (1. 30):

$$\mathfrak{x}_{11} = \mathfrak{u}'' = \mathfrak{n}_1; \quad \mathfrak{x}_{22} = \mathfrak{v}'' = \mathfrak{n}_2$$

und damit

$$\text{(a)}\quad \mathfrak{n}_{1,1} = \mathfrak{u}''' = t^2_{11}\mathfrak{v}'' - t^2_{11,2}\mathfrak{v}'$$

$$\text{(b)}\quad \mathfrak{n}_{2,2} = \mathfrak{v}''' = V(v)\,\mathfrak{v}'. \tag{3.9}$$

$V(v)$ ist beliebig. Dann bedeutet (3. 9 b), daß $\mathfrak{v}'$ und damit auch $\mathfrak{v}$ eine beliebige ebene Kurve beschreibt. Sie darf nur keine Gerade sein, da dann die Fläche ausgeartet ist (s. u.):

$$\mathfrak{v}(v) = Q_1(v)\,\mathfrak{b}_1 + Q_2(v)\,\mathfrak{b}_2; \qquad Q'_1 Q''_2 - Q'_2 Q''_1 \neq 0.$$

Die rechte Seite von (3. 9 a) ist wegen (3. 8) in der Tat unabhängig von v, so daß wir sie in der Form $P^*_1(u)\,\mathfrak{b}_1 + P^*_2(u)\,\mathfrak{b}_2$ schreiben können. Die homogene Gleichung (3. 9 a) für $\mathfrak{u}$ hat die Lösungen $u\,\mathfrak{a}_1 + \frac{(u)^2}{2}\,\mathfrak{a}_2$, so daß wir (unter Verwendung neuer Abkürzungen)

$$\mathfrak{u}(u) = u\,\mathfrak{a}_1 + \frac{(u)^2}{2}\,\mathfrak{a}_2 + P_1(u)\,\mathfrak{b}_1 + P_2(u)\,\mathfrak{b}_2$$

[30]) Vgl. Anm. 27.

erhalten. Damit haben wir für die erste Klasse semisphärischer Schiebflächen die Darstellung

$$(3.10)\quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{(u)^2}{2} \\ P_1(u) + Q_1(v) \\ P_2(u) + Q_2(v) \end{pmatrix};\quad \mathfrak{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ P_1'' \\ P_2'' \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1'' \\ Q_2'' \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\,\frac{Q_1' Q_2''' - Q_2' Q_1'''}{Q_1' Q_2'' - Q_2' Q_1''} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1' \\ Q_2' \end{pmatrix},$$

wobei wir die Affinnormalen $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ aus (1.22) erhalten.

Wir erhalten alle Flächen vom Typ (3.10), wenn wir in einer $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$-Ebene zwei beliebige Kurven $(P_1(u), P_2(u))$ und $(Q_1(v), Q_2(v))$ (jedoch $(Q_1(v), Q_2(v))$ keine Gerade) vorgeben. Längs der Kurve $(P_1(u), P_2(u))$ tragen wir dann in einer von $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ unabhängigen Ebene $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ eine Parabel ab. Verschieben wir die hierdurch entstandene Kurve K längs der Kurve $(Q_1(v), Q_2(v))$ parallel, so wird durch K die Fläche (3.10) beschrieben. — Die Richtungen der Affinnormalen liegen ganz in dem von $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ aufgespannten Raum, das Normalenbild ist also in ein Geradenfeld entartet. $\mathfrak{n}_2$ stimmt mit der Affinnormalen der ebenen Kurve $(Q_1(v), Q_2(v))$ überein.

(B) $\Omega^2_{22} = 0$. Es bleiben an wesentlichen Gleichungen von (1.30) damit übrig:

$$(1.30\,\mathrm{d})\quad t^2_{11,2} + \Omega^2_{11} = 0;\quad (1.30\,\mathrm{e})\quad \Omega^1_{11,2} = 0;$$
$$(1.30\,\mathrm{f})\quad \Omega^2_{11,2} = 0.\ \text{D. h.}$$
$$\Omega^1_{11} = U(u);\quad t^2_{11,22} = 0.$$

Wir erhalten mit demselben Ansatz wie oben

$$(3.11)\quad \begin{aligned} &(a)\quad \mathfrak{u}''' - U(u)\,\mathfrak{u}' = t^2_{11}\,\mathfrak{v}'' - t^2_{11,2}\,\mathfrak{v}' \\ &(b)\quad \mathfrak{v}''' = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst $\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{b}_1 + \frac{(v)^2}{2}\,\mathfrak{b}_2$; die rechte Seite von (3.11a) ist wieder eine beliebige, nur von u abhängige Kurve in der $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$-Ebene. Damit wird

$$\mathfrak{u}(u) = L_1(u)\,\mathfrak{a}_1 + L_2(u)\,\mathfrak{a}_2 + P_1(u)\,\mathfrak{b}_1 + P_2(u)\,\mathfrak{b}_2,$$

d. h.

$$(3.12)\quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} L_1(u) \\ L_2(u) \\ P_1(u) + v \\ P_2(u) + \frac{(v)^2}{2} \end{pmatrix};$$

$$(3.12)\qquad \mathfrak{n}_1 = \begin{pmatrix} L_1'' \\ L_2'' \\ P_1'' \\ P_2'' \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\,\frac{L_1' L_2''' - L_2' L_1'''}{L_1' L_2'' - L_2' L_1''} \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \\ P_1' \\ P_2' \end{pmatrix};\quad \mathfrak{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten alle Flächen vom Typ (3. 12), wenn wir längs einer beliebigen Kurve $\mathfrak{u}(u)$ eine feste Parabel parallel verschieben. $\mathfrak{n}_2$ hat die Durchmesserrichtung dieser Parabel; alle Affinnormalen haben also diese Richtung gemeinsam, das Normalenbild ist ein Geradenbündel. Betrachten wir die Projektion der Kurve $\mathfrak{u}(u)$ in die von der Parabelebene unabhängige Ebene $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$, so stimmt ihre Affinnormale mit der projizierten Affinnormalen $\mathfrak{n}_1$ überein.

2) $t_{11}^2 = 0$. Dieser Fall führt offenbar auf dieselben Flächen; denn in den Betrachtungen werden nur u und v vertauscht.

Wir setzen jetzt $I \neq 0$ voraus. Dann muß wegen (3. 6) gelten: $\Omega_{11}^1 = \Omega_{22}^2 = 0$. Damit erhält (1. 30) die Form

$$(3.13)\qquad \begin{aligned}
&\text{(a, b)}\quad I = -H_{,12}; && t_{22}^1 t_{11}^2 = -3H_{,12}\\
&\text{(d)}\quad t_{11,2}^2 + 2t_{11}^2 H_{,2} + \Omega_{11}^2 = 0; && t_{22,1}^1 + 2t_{22}^1 H_{,1} + \Omega_{22}^1 = 0\\
&\text{(e)}\quad I_{,1} - H_{,1} I = t_{11}^2 \Omega_{22}^1; && I_{,2} - H_{,2} I = t_{22}^1 \Omega_{11}^2\\
&\text{(f)}\quad \Omega_{11,2}^2 + \Omega_{11}^2 H_{,2} = 0; && \Omega_{22,1}^1 + \Omega_{22}^1 H_{,1} = 0
\end{aligned}$$

und (3. 6) wird

$$\text{(h)}\quad \Omega_{22}^1 \Omega_{11}^2 = (I)^2.$$

Wegen $I \neq 0$ gilt also auch, wie wir hieraus entnehmen,

$$t_{22}^1,\ t_{11}^2,\ H_{,12},\ \Omega_{22}^1,\ \Omega_{11}^2 \neq 0.$$

Wir zeigen, daß dies zu einem Widerspruch führt, wenn wir einige Folgerungen aus (3. 13) ziehen: (3. 13 f) bedeutet

$$\Omega_{11}^2 = U(u)\, e^{-H} \neq 0; \qquad \Omega_{22}^1 = V(v)\, e^{-H} \neq 0.$$

Mit (3. 13 h) und (3. 13 a) erhalten wir

$$I = -H_{,12} = \sqrt{UV}\, e^{-H},\ \text{d. h.}\ \frac{1}{e^{-H}}\,[\lg e^{-H}]_{,12} = \sqrt{UV}\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Liouville'schen Differentialgleichung ist [31])

$$e^{-H} = \frac{2\,\bar{U}'\,\bar{V}'}{\sqrt{UV}\,[\bar{U} + \bar{V}]^2};\quad \bar{U}'(u),\ \bar{V}'(v) \neq 0 \text{ bel.}$$

Durch geeignete Normierung können wir $\bar{U} = u$, $\bar{V} = v$ erreichen und damit

$$H_{,1} = \frac{2}{u+v} + \frac{1}{2}\,(\lg U)';\quad H_{,2} = \frac{2}{u+v} + \frac{1}{2}\,(\lg V)';\quad H_{,12} = -\frac{2}{(u+v)^2}\,.$$

[31]) Vgl. Jordan, Cours d'analyse III, Paris 1887, Kap. 3, Nr. 277.

Aus (3. 13 b, h) und (3. 13 a) erhalten wir hiermit

$$\Omega^1_{22}\,\Omega^2_{11}\,t^1_{22}\,t^2_{11} = (I)^2(-3H_{,12}) = -3(H_{,12})^3 = \frac{24}{(u+v)^6}.$$

Die Gleichungen (3. 13 e) werden damit

$$-\frac{4}{(u+v)^3} - \frac{2}{(u+v)^2}\left(\frac{2}{u+v} + \frac{1}{2}(\lg U)'\right) = t^2_{11}\,\Omega^1_{22}$$

$$-\frac{4}{(u+v)^3} - \frac{2}{(u+v)^2}\left(\frac{2}{(u+v)} + \frac{1}{2}(\lg V)'\right) = t^1_{22}\,\Omega^2_{11}.$$

Das Produkt dieser Gleichungen können wir gleich $\frac{24}{(u+v)^6}$ setzen:

(3. 14) $$(8 + (u+v)(\lg U)')\,(8 + (u+v)(\lg V)') = 24.$$

Dies muß identisch erfüllt sein; daraus ergibt sich nun ein Widerspruch. Denn zunächst folgt $(\lg U)' \neq \text{const}$, $(\lg V)' \neq \text{const}$. Wir differenzieren (3. 14) nach u und v und erhalten durch Subtraktion

$$(\lg U)''\,(8 + (u+v)(\lg V)') = (\lg V)''\,(8 + (u+v)(\lg U)')$$

und daraus mit (3. 14)

$$24(\lg U)'' = (\lg V)''(8 + (u+v)(\lg U)')^2;\quad 24(\lg V)'' = (\lg U)''(8 + (u+v)(\lg V)')^2.$$

Weil $(\lg U)'' \neq 0$, $(\lg V)'' \neq 0$, können wir die gemischte logarithmische Ableitung bilden:

$$8(\lg U)'' = (\lg U)'^2 \qquad (\lg U)' = \frac{8}{a-u} \quad (a \text{ bel.})$$

d. h.

$$8(\lg V)'' = (\lg V)'^2 \qquad (\lg V)' = \frac{8}{b-v} \quad (b \text{ bel.}).$$

womit aus (3. 14) $64(a+v)(b+u) = (a-u)(b-v)$ folgt, was sicher nicht identisch erfüllbar ist, q. e. d.

Wir haben das Ergebnis: *Die semisphärischen Schiebflächen werden durch Gleichungen von der Form* (3. 10) *(das Normalenbild ist ein Geradenfeld) und von der Form* (3. 12) *(das Normalenbild ist ein Geradenbündel) dargestellt* [32].

§ 4.

Die Sphären.

1. Die allgemeinen Sphären. Nach Teil I §3 verstehen wir unter *Sphären* solche Flächen, bei denen alle Normalenebenen eine feste Gerade gemeinsam haben [33]. Sie sind nach I(3. 6) durch

(4. 1) $$\Omega^\lambda_{\varrho\alpha} = c_\varrho\,\delta^\lambda_\alpha, \quad \text{d. h.} \quad \Omega^i_{i\,i} = \Omega^k_{i\,k};\ \Omega^i_{kk} = \Omega^i_{ik} = 0$$

[32] Die einzige unter (3.10) und (3.12) enthaltene elliptische Fläche wird wegen der Gleichungen (1.26*) durch (4. 6) dargestellt. Vgl. die dortige Diskussion.

[33] Die Sphären sind offenbar Spezialfälle der Semisphären; denn das Krümmungsbild einer Sphäre ist ein Geradenbündel.

gekennzeichnet. Wir schreiben zunächst die Integrabilitätsbedingungen und Folgerungen aus der Wahl des kanonischen Koordinatensystems (1. 26) auf, wie sie sich mit (4. 1) für Sphären ergeben. Dabei stellen wir (1. 26 g) und (4. 1) unter (4. 2 g) zusammen. — Zunächst folgt mit (4. 1) aus (1. 26 a, b), daß wir $Z^k_{ik} = K_{,i}$ und $Z^i_{ii} = H_{,i}$ setzen können. Wir erhalten damit aus (1. 26):

(4. 2)

(a) $H_{,12} = K_{,12} + K_{,1} K_{,2}$; $Z^k_{ik} = K_{,i}$

(b) $K_{,12} - 2 H_{,12} = t^1_{22} t^2_{11}$; $Z^i_{ii} = H_{,i}$

(c) $G \Omega^i_{ii} = K_{,ii} + K_{,i} K_{,i} - K_{,i} H_{,i}$

(d) $t^k_{ii,k} = t^k_{ii} (K_{,k} - 2 H_{,k})$

(e) $\Omega^i_{ii,k} = \Omega^i_{ii} (K_{,k} - (\lg G)_{,k})$

(f) $\Omega^i_{ii,i} = t^k_{ii} \Omega^k_{kk} + \Omega^i_{ii} (2 H_{,i} - (\lg G)_{,i})$

(g) $B^i_{ii} = G$; $B^i_{ik} = B^i_{kk} = 0$; $Z^i_{kk} = 0$; $t^i_{ii} = 2 H_{,i} - (\lg G)_{,i}$
$t^i_{ik} = K_{,k} - (\lg G)_{,k}$; $t^k_{ik} = 0$; $\Omega^i_{ii} = \Omega^k_{ik}$; $\Omega^i_{ik} = \Omega^i_{kk} = 0$

(4. 2 I) $$H_{,i} = (\lg G)_{,i} - \tfrac{2}{3} K_{,i}$$

(4. 2 A) $$G = 1.$$

Dieses System kennzeichnet also die Sphären. Wir wollen zeigen, wie es sich bis auf einen Fall vollständig durchdiskutieren läßt. Es ist zu vermuten, daß dieser Fall auf einen Widerspruch führt, so daß wir dann mit den im folgenden angeführten Typen alle Sphären erhalten. Wir verwenden die bei allgemeinen Affinitäten mögliche Vereinfachung $G = 1$ und diskutieren nacheinander die alle Möglichkeiten erschöpfenden Fälle

(A) $\Omega^1_{11} \neq 0$; $\Omega^2_{22} \neq 0$; $t^1_{22} \neq 0$; $t^2_{11} \neq 0$

(B) $\Omega^1_{11} \neq 0$; $\Omega^2_{22} \neq 0$; $t^1_{22} = 0$; t^2_{11} bel.

(C) $\Omega^1_{11} \neq 0$; $\Omega^2_{22} = 0$; $t^1_{22} = 0$; t^2_{11} bel.[34])

(D) $\Omega^1_{11} = 0$; $\Omega^2_{22} = 0$; $t^1_{22} \neq 0$; $t^2_{11} \neq 0$

(E) $\Omega^1_{11} = 0$; $\Omega^2_{22} = 0$; $t^1_{22} = 0$; t^2_{11} bel.

(A) $\Omega^1_{11}, \Omega^2_{22} \neq 0$; $t^1_{22}, t^2_{11} \neq 0$.

Aus (4. 2 d) folgt

$$t^2_{11} = U^*(u)\, e^{K-2H} \neq 0; \quad t^1_{22} = V^*(v)\, e^{K-2H} \neq 0.$$

Aus (4. 2 b) ergibt sich damit die Liouvillesche Differentialgleichung

$$(K - 2H)_{,12} = U^* V^* e^{2(K-2H)},$$

d. h.

$$e^{2(K-2H)} = \frac{\bar{U}' \bar{V}'}{U^* V^* [\bar{U} + \bar{V}]^2} \neq 0.$$

[34]) $t^1_{22} \neq 0$ läßt sich sofort ausschließen (s. u.).

Wir wählen $\overline{U}$ und $\overline{V}$ als neue Parameter[35]) und erhalten so

$$(K-2H)_{,1} = -\frac{1}{u+v} - \frac{1}{2}(\lg U^*)';$$

(A 1)

$$(K-2H)_{,2} = -\frac{1}{u+v} - \frac{1}{2}(\lg V^*)'; \quad (K-2H)_{,12} = \frac{1}{(u+v)^2}.$$

Aus (4. 2 e) erhalten wir

(A 2) $$\mathfrak{Q}^1_{11} = U(u)\,e^K \neq 0; \quad \mathfrak{Q}^2_{22} = V(v)\,e^K \neq 0.$$

Damit wird (4. 2 f) unter Verwendung von (A 1):

$$U K_{,1} + U' - U\left(K_{,1} + \frac{1}{2}(\lg U^*)' + \frac{1}{u+v}\right) = t^2_{11} V$$

(A 3)

$$V K_{,2} + V' - V\left(K_{,2} + \frac{1}{2}(\lg V^*)' + \frac{1}{u+v}\right) = t^1_{22} U.$$

Das Produkt dieser Gleichungen wird wegen (4. 2 b) und (A 1)

$$(1 + (u+v)\tfrac{1}{2}(\lg U^* U^{-2})')\,(1 + (u+v)\tfrac{1}{2}(\lg V^* V^{-2})') = 1.$$

Diese Gleichung muß identisch erfüllt sein. Diskutieren wir sie ebenso wie Gleichung (3. 14), so erhalten wir

(A 4) $$\frac{1}{2}(\lg U^* U^{-2})' = \frac{1}{a-u}; \quad \frac{1}{2}(\lg V^* V^{-2})' = \frac{1}{-a-v},$$

wobei die rechten Seiten auch Null sein können, was wir durch $-\infty \leqq a \leqq \infty$ ausdrücken. (A 4) bedeutet, je nachdem die rechten Seiten ungleich oder gleich Null sind,

$$U^* = \frac{U c}{(a-u)^2}; \quad V^* = \frac{V d}{(a+v)^2} \quad \text{oder} \quad U^* = U c; \quad V^* = V d.$$

Wie man sich leicht an Hand von (A 3) überlegt, muß $c = d$ sein. Dann reduziert sich (4. 2) (nach Elimination von H mit Hilfe von (A 1)) auf die Gleichungen (4. 2 a) und (4. 2 c):

$$K_{,11} = U e^K - \frac{1}{2} K_{,1} K_{,1} + \frac{1}{2} K_{,1}\left((\lg U)' + \frac{1}{u+v} + \frac{1}{a-u}\right) \qquad (-\infty \leqq a \leqq +\infty)$$

(4. 3)

$$K_{,12} = -\frac{1}{(u+v)^2} - 2 K_{,1} K_{,2} \qquad (U(u),\ V(v) \neq 0 \text{ bel.})$$

$$K_{,22} = V e^K - \frac{1}{2} K_{,2} K_{,2} + \frac{1}{2} K_{,2}\left((\lg V)' + \frac{1}{u+v} + \frac{1}{-a-v}\right).$$

Die Diskussion der Integrabilitätsbedingungen führte bisher zu keinem Ergebnis. Es ist jedoch zu vermuten (auch im Hinblick auf das widerspruchsvolle System (4. 4)), daß sie auf einen Widerspruch führt.

(B) $\mathfrak{Q}^1_{11}, \mathfrak{Q}^2_{22} \neq 0$; $t^1_{22} = 0$, t^2_{11} beliebig. Damit folgt aus (4. 2 b):

(B 1) $$K_{,12} - 2H_{,12} = 0; \quad K - 2H = \overline{U}(u) + \overline{V}(v).$$

[35]) Wegen $\overline{U}'\,\overline{V}' \neq 0$ ist das immer möglich.

Hiermit erhalten wir aus (4.2a) und (4.2c) mit (4.2e) bzw. (A2):

$$
\begin{aligned}
K_{,11} &= U e^K - \tfrac{1}{2} K_{,1} K_{,1} - \tfrac{1}{2} K_{,1} \overline{U}' \\
K_{,12} &= -2 K_{,1} K_{,2} \qquad (4.4) \\
K_{,22} &= V e^K - \tfrac{1}{2} K_{,2} K_{,2} - \tfrac{1}{2} K_{,2} \overline{V}'.
\end{aligned}
$$

Die Integrabilitätsbedingungen liefern $K_{,1} K_{,1} = U e^K$; $K_{,2} K_{,2} = V e^K$. Damit ergibt sich aus $K_{,12} = \tfrac{1}{2}\sqrt{U V}\, e^K$ und $K_{,12} = -2 K_{,1} K_{,2} = -2\sqrt{U V}\, e^K$ ein Widerspruch gegen unsere Annahme (B).

(C) $\Omega^1_{11} \neq 0$, $\Omega^2_{22} = 0$. Dann folgt aus (4.2f) notwendig $t^1_{22} = 0$, t^2_{11} beliebig und damit (B1). Es ist jetzt in (4.4) $V \equiv 0$ zu setzen. $K_{,122} = K_{,221}$ liefert $K_{,1} K_{,2} K_{,2} = 0$, d.h. $K_{,2} = 0$, denn $K_{,1} = 0$ ist wegen $\Omega^1_{11} = U e^K \neq 0$ ausgeschlossen. Aus (4.2a) folgt hiermit $H_{,12} = 0$, d. h. $H = \text{const}$[36]). Damit bleiben an wesentlichen Gleichungen aus (4.2):

$$
\begin{aligned}
&(4.2\,\text{c}): \quad \Omega^1_{11} = K_{,1} K_{,1} + K_{,11}; \qquad && (4.2\,\text{d}): \quad t^2_{11,2} = 0; \\
&(4.2\,\text{e}): \quad \Omega^1_{11,2} = 0; && (4.2\,\text{f}): \quad \Omega^1_{11,1} = 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt: $t^2_{11} = U^*(u)$, $\Omega^1_{11} = -c \neq 0$, so daß wir $(c)^2 = 1$ wählen können, und

$$K_{,1} = \sqrt{c}\ \operatorname{ctg} \sqrt{c}\, u.$$

Die Ableitungsgleichungen ergeben sich hiermit zu

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{11} &= \mathfrak{n}_1 & \qquad \mathfrak{n}_{1,1} &= U^* \mathfrak{n}_2 - c\, \mathfrak{x}_1 \\
\mathfrak{x}_{12} &= \sqrt{c}\ \operatorname{ctg} \sqrt{c}\, u\ \mathfrak{x}_2 & \qquad \mathfrak{n}_{1,2} &= -c\, \mathfrak{x}_2 \\
\mathfrak{x}_{22} &= \mathfrak{n}_2 & \qquad \mathfrak{n}_{2,1} &= \sqrt{c}\ \operatorname{ctg} \sqrt{c}\, u\ \mathfrak{n}_2 \\
& & \qquad \mathfrak{n}_{2,2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergibt sich, bezogen auf ein Basissystem $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$:

$$
\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \sin \sqrt{c}\, u \\ \cos \sqrt{c}\, u \\ P(\sqrt{c}\, u) \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \sqrt{c}\, u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(v)^2}{2} \\ v \end{pmatrix};
$$

(4.5)

$$
\mathfrak{n}_1 = \begin{pmatrix} -c \sin \sqrt{c}\, u \\ -c \cos \sqrt{c}\, u \\ P'' - c\, \frac{(v)^2}{2} \sin \sqrt{c}\, u \\ -c\, v \sin \sqrt{c}\, u \end{pmatrix}; \qquad \mathfrak{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \sqrt{c}\, u \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Die Brennfläche einer Sphäre ist in die allen Normalebenen gemeinsame feste Gerade entartet. Diese „Mittelgerade" ist gemäß I (3.4) und I (3.7) durch $\mathfrak{x} + \lambda^\varrho \mathfrak{n}_\varrho$ mit $\lambda^\varrho c_\varrho + 1 = 0$, d. h. wegen $c_1 = \Omega^1_{11} = -c$

[36]) Vgl. [27]).

und $c_2 = \Omega_{22}^2 = 0$ durch $\mathfrak{x} + \frac{1}{c}\mathfrak{n}_1 + \lambda^2\mathfrak{n}_2$ gegeben; wegen (4.5) können wir hierfür schreiben: $\tilde{\lambda}\mathfrak{n}_2 = \tilde{\lambda}\sin\sqrt{c}\,u\,\mathfrak{b}_1$ (mit $\tilde{\lambda} \equiv P + c^{-1}P'' + \lambda^2$). Man erkennt, wie man sich die Sphäre aus einer (mit verändertem u ähnlich veränderten) Parabel aufgebaut denken kann, die entlang einer auf einem elliptischen oder hyperbolischen Zylinder (je nachdem $c = 1$ oder $c = -1$ ist) beliebig verlaufenden Raumkurve parallel verschoben wird. Die Achse dieses Zylinders ist die Mittelgerade der Sphäre. $\mathfrak{n}_2$ hat die Richtung dieser Achse. Die Projektion der Sphäre in die von der Parabelebene unabhängige Ebene $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ ist eine Ellipse bzw. Hyperbel, und $\mathfrak{n}_1$ geht dabei in die Affinnormale dieses Kegelschnitts über.

Die 3-dimensionalen Hyperebenen, die die Mittelgerade der Sphären enthalten, bilden eine 2-parametrige Schar. Wir betrachten den Schnitt $\mathfrak{w}$ der Sphäre mit einer solchen Hyperebene, die durch $(\mathfrak{a}_1 + \beta_1\mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2 + \beta_2\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1)$ aufgespannt werde. Mit dieser Darstellung sind Hyperebenen, die $\mathfrak{b}_2$ enthalten, ausgeschlossen. Wir erhalten die Schnittkurve $\mathfrak{w}$ aus

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \sin\sqrt{c}\,u \\ 0 & 1 & 0 & \cos\sqrt{c}\,u \\ 0 & 0 & 1 & P + \frac{(v)^2}{2}\sin\sqrt{c}\,u \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 & v\sin\sqrt{c}\,u \end{vmatrix} = 0 \quad : \quad \mathfrak{w} = \begin{pmatrix} \sin\sqrt{c}\,u \\ \cos\sqrt{c}\,u \\ P^*(u) \end{pmatrix}$$

mit

$$P^*(\sqrt{c}\,u) \equiv P(\sqrt{c}\,u) + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1\sin\sqrt{c}\,u + \beta_2\cos\sqrt{c}\,u}{\sin\sqrt{c}\,u}\right)^2 \sin\sqrt{c}\,u.$$

Der Schnitt der Sphäre (4.5) *mit einer beliebigen die Mittelgerade* $\mathfrak{b}_1$ *der Sphäre enthaltenden (aber nicht* $\mathfrak{b}_2$ *enthaltenden) Hyperebene ist eine auf einem elliptischen bzw. hyperbolischen Zylinder beliebig verlaufende Raumkurve. Die zu einem Punkt der Schnittkurve gehörende Affinnormalenebene wird von diesem Punkt und der Achse des Zylinders aufgespannt.*

Betrachten wir schließlich die einparametrige Schar von Hyperebenen, die neben der Mittelgeraden $\mathfrak{b}_1$ auch $\mathfrak{b}_2$ enthalten. Sie werden von $(\sin\sqrt{c}\,\alpha\,\mathfrak{a}_1 + \cos\sqrt{c}\,\alpha\,\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2)$ aufgespannt. Wir erhalten aus

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{c}\,\alpha & 0 & 0 & \sin\sqrt{c}\,u \\ \cos\sqrt{c}\,\alpha & 0 & 0 & \cos\sqrt{c}\,u \\ 0 & 1 & 0 & P + \frac{(v)^2}{2}\sin\sqrt{c}\,u \\ 0 & 0 & 1 & v\sin\sqrt{c}\,u \end{vmatrix} = \sin\sqrt{c}\,(\alpha - u) = 0:$$

$$\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ P(\alpha) + \frac{(v)^2}{2}\sin\sqrt{c}\,\alpha \\ v\sin\sqrt{c}\,\alpha \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also zwei kongruente entgegengerichtete Parabeln, die speziell für $\alpha = 0$ in ein Punktepaar entarten.

(D) $\Omega^1_{11} = \Omega^2_{22} = 0$; $t^1_{22} \neq 0$; $t^2_{11} \neq 0$. Diese Annahme führt auf einen Widerspruch: Wir erhalten zunächst wieder die Gleichung (A 1) S. 206 und damit an wesentlichen Gleichungen das aus (4. 2 a) und (4. 2 c) gebildete System ($K_{,1}$ und $K_{,2}$ sind ungleich Null):

$$\begin{aligned} -(K-2H)_{,1} &= K_{,1} + 2(\lg K_{,1})_{,1} \\ -(K-2H)_{,12} &= -\frac{1}{(u+v)^2} = K_{,12} + 2K_{,1}K_{,2} \\ -(K-2H)_{,2} &= K_{,2} + 2(\lg K_{,2})_{,2}; \end{aligned} \tag{D 1}$$

damit

$$\begin{aligned} (\lg K_{,1})_{,12} &= K_{,1}K_{,2} \\ (\lg K_{,2})_{,12} &= K_{,1}K_{,2}; \end{aligned} \tag{D 2}$$

damit

$$\left[\lg \frac{K_{,1}}{K_{,2}}\right]_{,12} = 0, \text{ d. h. } K_{,1}e^{S(v)} \pm K_{,2}e^{R(u)} = 0$$

oder

$$K = \Phi\left(\int e^R du \mp \int e^S dv\right) \equiv \Phi(\psi).$$

Hiermit wird aus (D 2): $(\lg \Phi')'' = \Phi'^2$, d. h.

$$\Phi' = \sqrt{c}\,(\mathfrak{Sin}\sqrt{c}\,\psi)^{-1}; \quad \Phi'' = -c\,\mathfrak{Cof}\sqrt{c}\,\psi\,(\mathfrak{Sin}\sqrt{c}\,\psi)^{-2}; \quad c \neq 0 \text{ bel. } [37].$$

Wir setzen

$$\sqrt{c}\int e^R du = \lg A(u); \quad \pm\sqrt{c}\int e^S dv = \lg B(v),$$

d. h.

$$e^{v\sqrt{c}} = \frac{A}{B}; \quad \sqrt{c}\,e^R = \frac{A'}{A} \neq 0; \quad \pm\sqrt{c}\,e^S = \frac{B'}{B} \neq 0$$

und erhalten damit aus der mittleren Gleichung (D 1):

$$-\frac{1}{(u+v)^2} = \mp e^{R+S}(\Phi'' + 2\Phi'^2) = -\frac{2A'B'}{(A^2-B^2)^2}(4AB - A^2 - B^2). \tag{D 3}$$

Diese Gleichung enthält aber einen Widerspruch: Wir bilden die gemischte logarithmische Ableitung und finden

$$\frac{1}{(u+v)^2} = \frac{2A'B'}{(A^2-B^2)^3}\,\frac{A^6 - 3A^5B + 15A^4B^2 - 34A^3B^3 + 15A^2B^4 - 3AB^5 + B^6}{(4AB - A^2 - B^2)^2}.$$

Zusammen mit (D 3) ergibt sich ein homogenes Polynom 6. Grades in A und B, was nur für $A' = B' \equiv 0$ identisch erfüllbar ist.

(E) $\Omega^1_{11} = \Omega^2_{22} = 0$; $t^1_{22} = 0$, t^2_{11} beliebig. Dann gilt wieder (B 1) und in (4. 4) ist $U = V \equiv 0$ zu setzen. Die Integrabilitätsbedingungen führen

[37]) Für $\lim c = 0$ wird $\Phi = \psi^{-1}$; auch dieser Fall führt analog zu dem Fall $c \neq 0$ auf einen Widerspruch.

auf $K_{,1}K_{,1}K_{,2} = K_{,2}K_{,2}K_{,1} = 0$, d. h. auf die Fälle

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && K_{,2} \neq 0, \quad K_{,2} = 0; \\ &\text{(II)} && K_{,1} = 0; \quad K_{,2} \neq 0; \\ &\text{(III)} && K_{,1} = 0; \quad K_{,2} = 0. \end{aligned}$$

(I) $K_{,1} \neq 0$, $K_{,2} = 0$. Wir haben den Fall (C) mit $\lim c = 0$ vor uns und erhalten damit unmittelbar die Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_{1,1} &= U^*(u)\,\mathfrak{n}_2 \\ \mathfrak{x}_{12} &= \frac{1}{u}\,\mathfrak{x}_2 & \mathfrak{n}_{1,2} &= 0 \\ \mathfrak{x}_{22} &= \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_{2,1} &= \frac{1}{u}\,\mathfrak{n}_2 \\ & & \mathfrak{n}_{2,2} &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich sofort

$$(4.6) \qquad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{(u)^2}{2} \\ P(u) \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(v)^2}{2} \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ P'' \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(II) $K_{,1} = 0$, $K_{,2} \neq 0$. Es folgt mit $H_{,12} = 0$, d. h. $H = \text{const}$ aus (4.2c):

$$K_{,22} + K_{,2}K_{,2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad K_{,2} = \frac{1}{v} \neq 0$$

und aus (4.2d)

$$t^2_{11,2} - t^2_{11}\frac{1}{v} = 0, \quad \text{d. h.} \quad t^2_{11} = v\,U^*(u).$$

Damit folgt aus

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= \mathfrak{n}_1 & \mathfrak{n}_{1,1} &= v\,U^*\,\mathfrak{n}_2 \\ \mathfrak{x}_{12} &= \frac{1}{v}\,\mathfrak{x}_1 & \mathfrak{n}_{1,2} &= \frac{1}{v}\,\mathfrak{n}_1 \\ \mathfrak{x}_{22} &= \mathfrak{n}_2 & \mathfrak{n}_{2,1} &= 0 \\ & & \mathfrak{n}_{2,2} &= 0 \end{aligned}$$

ohne weiteres die Flächendarstellung

$$(4.7) \qquad \mathfrak{x} = v \begin{pmatrix} u \\ \frac{(u)^2}{2} \\ P(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(v)^2}{2} \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{n}_1 = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ P'' \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(III) $K_{,1} = 0$, $K_{,2} = 0$. In den Ableitungsgleichungen unter (II) ist jetzt also wegen $K_{,2} = Z^1_{21} = t^1_{12} = 0$ und $t^2_{11} = U^*(u)$ an Stelle von

$v^{-1}:0$ und an Stelle von $vU^*:U^*$ zu setzen. Wir erhalten damit

$$(4.8)\qquad \mathfrak{x}=\begin{pmatrix} u \\ \frac{(u)^2}{2} \\ P(u) \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(v)^2}{2} \\ v \end{pmatrix};\quad \mathfrak{n}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ P' \\ 0 \end{pmatrix};\quad \mathfrak{n}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In allen drei Fällen (4.6), (4.7) und (4.8) sind die Normalenebenen in den verschiedenen Punkten der Fläche zueinander parallel, d. h. sie haben eine uneigentliche Gerade gemeinsam. Von diesen sog. uneigentlichen Sphären ist (4.6) ein Gegenstück zu (4.5), indem an die Stelle des elliptischen bzw. hyperbolischen Zylinders ein parabolischer Zylinder tritt. Die uneigentliche Achse dieses Zylinders ist die allen Normalenebenen gemeinsame Gerade. Auch die Flächen (4.7) und (4.8) bauen sich in einsichtiger Weise aus einer auf einem solchen parabolischen Zylinder verlaufenden Raumkurve und einer Parabel auf.

Die obigen Überlegungen gelten zunächst nur für hyperbolische Flächen. Für elliptische Flächen sind sie auf Grund der zusätzlichen Beziehung (1.26*) folgendermaßen zu modifizieren:

(A) Dieser Fall bleibt offen.

(B) Es ist auch $t^2_{11}=\bar{t}^1_{22}=0$. Ein Widerspruch ergibt sich jedoch ebenso wie oben.

(C) Es ist auch $\Omega^1_{11}=\bar{\Omega}^2_{22}=0$. Wir kommen damit notwendig zu (D) bzw. (E).

(D) Dies führt wie oben auf einen Widerspruch.

(E) Dies führt wegen $t^2_{11}=\bar{t}^1_{22}=0$ und wegen $Z^1_{12}=K_{,2}=\bar{Z}^2_{21}=\bar{K}_{,1}=0$ auf den Typ (4.8) mit $P(u)\equiv 0$.

Die einzige den oben aufgeführten hyperbolischen Typen entsprechende elliptische Sphäre wird also nach Einführung reeller Parameter dargestellt durch

$$(4.9)\qquad \mathfrak{x}=\begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{(u)^2-(v)^2}{2} \\ uv \end{pmatrix};\quad \mathfrak{n}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \mathfrak{n}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die uneigentlichen Sphären sind durch $\Omega^1_{11}=\Omega^2_{22}=0$ (vgl. I (3.8)) gekennzeichnet; sie werden also durch die vollständig diskutierten Fälle (D) und (E) repräsentiert: *Mit* (4.6), (4.7), (4.8) *und* (4.9) *haben wir alle uneigentlichen Sphären bestimmt. Ob* (4.5) *auch alle eigentlichen Sphären erschöpft, hängt von der Diskussion des Systemes* (4.3) *ab.* Dieser Fall ist der einzige noch offene Fall, in dem wegen $\Omega^1_{11}\neq 0$, $\Omega^2_{22}\neq 0$ die Mittelgerade nicht zu einer kanonischen Normalen parallel ist. Die Frage nach allen eigentlichen Sphären ist also gleichbedeutend mit der Frage, ob bei einer eigentlichen Sphäre die Mittelgerade die Richtung einer kanonischen Normalen hat.

2. Die sphärischen Schiebflächen. Die Schiebflächen sind nach (1.28) durch $Z^k_{ik}=0$, d.h. für Sphären nach (4.2) durch $K_{,1}=K_{,2}=0$ gekennzeichnet. Die einzigen Sphären mit dieser Eigenschaft sind in der obigen Diskussion die hyperbolische Fläche (4.8) und die elliptische Fläche (4.9). Damit haben wir ein Gegenstück zu einem Satz der klassischen affinen Flächentheorie von Reidemeister und Artin [38]: *Es gibt keine eigentlichen sphärischen Schiebflächen. Die uneigentlichen haben die Gestalt* (4.8) *oder* (4.9).

§ 5.

Minimalflächen.

1. Die Definitionsgleichung. Beschränken wir uns auf inhaltstreue Affinitäten, so können wir nach I § 2.1 eine Affinoberfläche durch $\int_{\mathfrak{F}} |T|^{\frac{1}{5}}_{12}\, d\,u^{12} = \int_{\mathfrak{F}} |S|^{\frac{1}{4}}_{12}\, d\,u^{12}$ erklären. Wenn die erste Variation des Oberflächenintegrals verschwindet, sprechen wir von einer *Minimalfläche*. Spezialisieren wir die sich daraus ergebenden Gleichungen I (2.21) auf das kanonische Koordinatensystem, so erhalten wir nach einiger Rechnung unter Verwendung von (1.26) und (1.26 I):

$$3\,G\,(\Omega^k_{ik}+3\,\Omega^i_{i\lambda})-Z^k_{ik}\,Z^k_{ik}=0. \tag{5.1}$$

2. Die Minimalschiebflächen. Wir gehen von den Gleichungen (1.30) und (1.30 I) für Schiebflächen bei inhaltstreuen Affinitäten aus. Die kennzeichnende Bedingung (5.1) für Minimalflächen wird damit

$$\Omega^1_{11}=0;\quad \Omega^2_{22}=0 \tag{5.2}$$

und wir erhalten an wesentlichen Gleichungen aus (1.30) mit (1.30 I):

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad G\,I=-(\lg G)_{,12}\\
&\text{(b)}\quad t^1_{22}\,t^2_{11}=-3\,(\lg G)_{,12}\\
&\text{(d)}\quad t^2_{11,2}+2\,t^2_{11}(\lg G)_{,2}+G\,\Omega^2_{11}=0;\quad t^1_{22,1}+2\,t^1_{22}(\lg G)_{,1}+G\,\Omega^1_{22}=0\\
&\text{(e)}\quad I_{,1}=t^2_{11}\,\Omega^1_{22};\qquad\qquad I_{,2}=t^1_{22}\,\Omega^2_{11}\\
&\text{(f)}\quad \Omega^2_{11,2}+2\,\Omega^2_{11}\,(\lg G)_{,2}=0;\qquad \Omega^1_{22,1}+2\,\Omega^1_{22}\,(\lg G)_{,1}=0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Wir diskutieren die Fälle

$$\begin{aligned}
&\text{(A)}\qquad \Omega^2_{11}\neq 0,\quad \Omega^1_{22}\neq 0;\\
&\text{(B)}\qquad \Omega^2_{11}\neq 0,\quad \Omega^1_{22}=0;\\
&\text{(C)}\qquad \Omega^2_{11}=0,\quad \Omega^1_{22}=0.
\end{aligned}$$

(A) $\Omega^2_{11}\neq 0$, $\Omega^1_{22}\neq 0$; d.h. auch $I\neq 0$ wegen (5.3e) und (5.3d). Damit führt diese Annahme auf einen Widerspruch, denn es folgt aus (5.3f):

$$\Omega^2_{11}=U(u)\,G^{-2},\quad \Omega^1_{22}=V(v)\,G^{-2}$$

[38]) Siehe Blaschke [11]), S. 236.

und damit aus (5.3e):

$$t^2_{11} = I_{,1} G^2 V^{-1}, \quad t^1_{22} = I_{,2} G^2 U^{-1}$$

und damit aus (5.3b):

(A 1) $$I_{,1} I_{,2} G^4 = -3 (\lg G)_{,12} U V$$

und damit aus (5.3d):

(A 2) $$\begin{aligned} I_{,12} + I_{,1} 4 (\lg G)_{,2} - I_{,1} (\lg V)' + U V G^{-3} &= 0 \\ I_{,12} + I_{,2} 4 (\lg G)_{,1} - I_{,2} (\lg U)' + U V G^{-3} &= 0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (A 2) erhalten wir

(A 3) $$I_{,1} (\lg (G^{-4} U V))_{,2} = I_{,2} (\lg (G^{-4} U V))_{,1}.$$

Wir setzen

(A 4) $$M \equiv \lg (G^{-4} U V) \text{ und damit } (\lg G)_{,12} = -\tfrac{1}{4} M_{,12}$$

und erhalten aus (A 3):

$$I_{,1} M_{,2} = I_{,2} M_{,1}, \quad \text{d. h.} \quad I = F(M) \neq 0.$$

Die wesentlichen Gleichungen (5.3a), (A 1) und (A 2) werden damit:

(A 5) $$G F = \tfrac{1}{4} M_{,12}$$

(A 6) $$F'^2 M_{,1} M_{,2} = \tfrac{3}{4} M_{,12} e^M$$

A 7) $$F'' M_{,1} M_{,2} + F' M_{,12} - F' M_{,1} M_{,2} + e^M G = 0.$$

Mit Hilfe von (A 5) können wir G und mit Hilfe von (A 6) $M_{,12}$ aus (A 7) eliminieren und wir erhalten wegen $M_{,1}, M_{,2} \neq 0$:

(A 8) $$F'' + \tfrac{4}{3} e^{-M} F'^3 - F' + \tfrac{1}{3} F'^2 F^{-1} = 0.$$

Wir stellen jetzt noch eine weitere gewöhnliche Differentialgleichung für $F = F(M)$ auf, die mit (A 8) nicht verträglich ist: Die logarithmische Ableitung von (A 6) nach u ergibt, multipliziert mit $M_{,1}$:

$$2 [\lg F']_{,1} M_{,1} + [\lg M_{,1}]_{,1} M_{,1} + [\lg M_{,2}]_{,1} M_{,1} = [\lg M_{,12}]_{,1} M_{,1} + (M_{,1})^2$$

und die Ableitung hiervon nach v wird

$$\begin{aligned} 2 ([\lg F']_{,1} M_{,1})_{,2} + (M_{,11})_{,2} + ([\lg M_{,2}]_{,1}) M_{,1})_{,2} \\ = M_{,112} + (\lg M_{,12})_{,12} M_{,1} + 2 M_{,1} M_{,12}. \end{aligned}$$

Mit (A 6), (A 5) und (A 4) können wir dafür auch schreiben:

$$2 ([\lg F']_{,1} M_{,1})_{,2} + (\tfrac{4}{3} e^{-M} F'^2 (M_{,1})^2)_{,2} = -\tfrac{1}{4} M_{,12} M_{,1} + M_{,1} (\lg F)_{,12} + 2 M_{,1} M_{,12}$$

oder, wieder mit Hilfe von (A 6):

$$\begin{aligned} F''' - F''^2 F'^{-1} + 4 F'' F'^2 e^{-M} - \tfrac{1}{2} F'' F' F^{-1} - \tfrac{11}{6} F'^3 e^{-M} + \tfrac{16}{9} F'^5 e^{-2M} \\ + \tfrac{1}{2} F'^4 F^{-2} - \tfrac{2}{3} F'^4 F^{-1} e^{-M} = 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Ableitung von (A 8) ergibt sich

$$F'''^2 + \tfrac{7}{6} F'' F'^2 F^{-1} - F''' F' + \tfrac{1}{2} F'^4 e^{-M} - \tfrac{16}{9} F'^6 e^{-2M} - \tfrac{5}{6} F'^4 F^{-2} + \tfrac{2}{3} F'^5 F^{-1} e^{-M} = 0.$$

Die Elimination von F''' mit Hilfe von (A 8) ergibt (wegen $F' \neq 0$)

$$F' = 3 F e^M (4 e^M + 3 F^2)^{-1}.$$

Mit $F = e^{\frac{M}{2}} L(M)$ wird daraus

$$2 L' = L(2 - 3 L^2)(4 + 3 L^2)^{-1}, \quad \text{d. h.} \quad M = \lg [c L^4 (2 - 3 L^2)^{-3}].$$

Mit diesen Gleichungen führen wir nach den bekannten Regeln

$$F' = \dot{F} \dot{M}^{-1}; \quad F''' = (\ddot{F} - \dot{F} \ddot{M} \dot{M}^{-1}) M^{-2} \qquad \left(\dot{F} \equiv \frac{dF}{dL}\right)$$

L als neue Veränderliche ein und berechnen damit (A 8), was identisch erfüllt sein muß. Wir finden zunächst

$$\dot{M} = 2(4 + 3 L^2)(2 - 3 L^2)^{-1} L^{-1}; \quad \ddot{M} = 2(-8 + 42 L^2 + 9 L^4)(2 - 3 L^2)^{-2} L^{-2};$$

$$F = e^{\frac{M}{2}} L = \sqrt{c}\, L^3 (2 - 3 L^2)^{-\frac{3}{2}}; \quad \dot{F} = \sqrt{c}\, 6 L^2 (2 - 3 L^2)^{-\frac{5}{2}};$$

$$\ddot{F} = \sqrt{c}\, 6 L (4 + 9 L^2)(2 - 3 L^2)^{-\frac{7}{2}}.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist mit diesen Werten (A 8) nur für $L \equiv 0$ identisch erfüllt; das bedeutet aber $F \equiv 0$ und damit einen Widerspruch gegen unsere Annahme (A).

(B) $\Omega^2_{11} \neq 0$, $\Omega^1_{22} = 0$. Dann ist notwendig $(\lg G)_{,12} = I = 0$. Denn ist $I \neq 0$, dann ist wegen (5. 3 b) auch $t^1_{22} \neq 0$. Aus (5. 3 e) folgt $I_{,2} \neq 0$, $I_{,1} = I_{,12} = 0$, d. h.

$$(\lg t^1_{22})_{,1} + (\lg \Omega^2_{11})_{,1} = 0;$$

aus (5. 3 d) und (5. 3 f) folgt damit

$$(\lg t^1_{22})_{,1} + (\lg G^2)_{,1} = 0; \quad (\lg \Omega^2_{11})_{,2} + (\lg G^2)_{,2} = 0,$$

woraus sich leicht $(\lg G^2)_{,12} = 0$, d. h. $I = 0$ ergibt.

Mit $I = 0$ folgt aus (5. 3 e): $t^1_{22} = 0$ (dagegen ist $t^2_{11} \neq 0$; $t^2_{11} = 0$ ist unter (C) mitabgehandelt). Wegen (5. 2) sind auch die Gleichungen (3. 6) für semisphärische Schiebflächen erfüllt. (5. 2) besagt aber insbesondere, daß unsere Flächen gleichzeitig den Typen (3. 10) und (3. 12) angehören. Sie sind also dadurch gekennzeichnet, daß das Normalenbild gleichzeitig ein Geradenbündel und ein Geradenfeld (also ein Geradenbüschel) ist, und sie haben die Form

$$(5.4) \qquad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{(u)^2}{2} \\ P_1(u) + v \\ P_2(u) + \frac{(v)^2}{2} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ P_1' \\ P_2' \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(C) $\Omega^2_{11} = 0$, $\Omega^1_{22} = 0$. Dieser Fall liefert die sphärischen Schiebflächen (4. 8) und (4. 9). Dazu müssen wir nun zeigen, daß neben (1. 30 c) und (5. 2) auch $I = \Omega^1_{12} = \Omega^2_{21} = 0$ gilt und damit die Gleichungen (4. 1) erfüllt sind. Ist nämlich $I \neq 0$ und damit auch $t^1_{22}, t^2_{11} \neq 0$, so wird nach (5. 3 d) und (5. 3 b):

$$\text{(C 1)} \qquad t^2_{11} = U G^{-2} \neq 0; \quad t^1_{22} = V G^{-2} \neq 0; \quad U V G^{-4} = -3 (\lg G)_{,12}.$$

Andererseits folgt aus (5. 3 e) und (5. 3 a):

$$\text{(C 2)} \qquad I = \text{const} = c; \quad G c = -(\lg G)_{,12}.$$

Aus (C 1) und (C 2) folgt aber $(\lg G)_{,12} = I = 0$.

Damit ist bewiesen: *Die Minimalschiebflächen sind spezielle semisphärische Schiebflächen der Form* (5. 4), *die auch die sphärischen Schiebflächen umfaßt. Sie sind unter den Schiebflächen dadurch gekennzeichnet, daß ihr Normalenbild ein Geradenbüschel ist.*

2. Die Minimalsphären. Wir gehen von dem System (4. 2) aus, in welchem wir uns $H_{,1}$ und $H_{,2}$ mit Hilfe von (4. 21) eliminiert denken. Die Minimalbedingung (5. 1) nimmt damit die Form an:

$$\text{(5. 5)} \qquad K_{,1} K_{,1} = 21 G \Omega^1_{11}; \quad K_{,2} K_{,2} = 21 G \Omega^2_{22}.$$

Wir diskutieren die Möglichkeiten

$$\text{(A)} \qquad K_{,1} \neq 0, \quad K_{,2} \neq 0;$$
$$\text{(B)} \qquad K_{,1} = 0, \quad K_{,2} \neq 0;$$
$$\text{(C)} \qquad K_{,1} = 0, \quad K_{,2} = 0;$$

und zeigen, daß nur (C) eine Lösung gestattet.

(A) $K_{,1} \neq 0$, $K_{,2} \neq 0$. D. h. wegen (5. 5): $\Omega^1_{11} \neq 0$, $\Omega^2_{22} \neq 0$. Dann folgt aus (4. 2 e):

$$\text{(A 1)} \qquad G \Omega^1_{11} = U e^K \neq 0; \quad G \Omega^2_{22} = V e^K \neq 0$$

und damit aus (5. 5):

$$\text{(A 2)} \qquad K_{,1} K_{,1} = 21 U e^K; \quad K_{,2} K_{,2} = 21 V e^K; \quad K_{,12} = \frac{21}{2} \sqrt{U V} e^K \neq 0.$$

(4. 2 a) ergibt

$$\text{(A 3)} \qquad (\lg G)_{,12} = \frac{5}{3} K_{,12} + K_{,1} K_{,2} = \frac{77}{2} \sqrt{U V} e^K \neq 0.$$

Andererseits ergibt sich mit (A 1) und (A 2) aus (4. 2 c):

$$(\lg G)_{,1} = \frac{89}{2\sqrt{21}} \sqrt{U} e^{\frac{K}{2}} + \frac{1}{2} (\lg U)'; \quad (\lg G)_{,2} = \frac{89}{2\sqrt{21}} \sqrt{V} e^{\frac{K}{2}} + \frac{1}{2} (\lg V)';$$

$$(\lg G)_{,12} = \frac{89}{4} \sqrt{U V} e^K.$$

Dieses steht aber im Widerspruch zu (A 3).

(B) $K_{,1} = 0$, $K_{,2} \neq 0$. D. h. wegen (5.5): $\Omega^1_{11} = 0$, $\Omega^2_{22} \neq 0$. Dann wird gemäß (4.2a) $(\lg G)_{,12} = 0$, d. h. $G = \overline{U}\,\overline{V} \neq 0$.

Wir können (4.2e) und (4.2f) integrieren und erhalten

$$\text{(B 1)} \qquad \Omega^2_{22} = a\,\overline{V}\,\overline{U}^{-1} e^{-\frac{4}{3}K}, \text{ d. h. } G\,\Omega^2_{22} = a(\overline{V})^2 e^{-\frac{4}{3}K}.$$

Aus (5.5) erhalten wir damit

$$\text{(B 2)} \qquad K_{,2} K_{,2} = 21\, a(\overline{V})^2 e^{-\frac{4}{3}K}.$$

Gehen wir mit (B 1) und (B 2) in die Gleichung (4.2c), so ergibt sich ein Widerspruch gegen unsere Annahmen.

(C) $K_{,1} = 0$, $K_{,2} = 0$. D. h. $Z^2_{12} = Z^1_{21} = 0$. Damit ist bewiesen: *Die Minimalsphären sind Schiebflächen.* Andererseits war in § 5.2 gezeigt, daß jede sphärische Schiebfläche Minimalfläche ist. *Die Minimalsphären bestehen also aus den sphärischen Schiebflächen* (4.8) *und* (4.9).

Berichtigung zu Teil I.

In Formel I (2.22), S. 76 lies $\delta\,\underline{x}$ statt $\delta_{\underline{x}}$ und $\frac{1}{p(r+p)}$ statt $\frac{1}{r(r+p)}$.

(Eingegangen am 5. Januar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 3, S. 217–253 (1951).

Über das asymptotische Verhalten der Besselschen Funktion längs einer Welle der durch $z = J_\lambda(x)$ im x-λ-z-Raum definierten Wellenfläche.

Von

Herbert Forster in München.

Vorbemerkungen.

Bei der Berechnung des Temperaturverlaufs in sonnenbeschienenen Baumstämmen wurde ich zur bequemeren Beurteilung der Größenordnung von Ausdrücken, in denen Besselsche Funktionen vorkamen, darauf geführt, eine Abschätzung des asymptotischen Verhaltens der Besselschen Funktionen mit möglichst weitem Gültigkeitsbereich vorzunehmen, und zwar mit besonderer Beachtung des Verhaltens, wenn man längs einer der Wellen der durch $z = J_\lambda(x)$ im x-λ-z-Raum definierten Fläche ins Unendliche geht. Da das Ergebnis vielleicht auch anderweitig von Interesse ist, sei es im Folgenden mitgeteilt.

Die Besselsche Funktion wird in der üblichen Weise mit $J_\lambda(x)$ bezeichnet. Wir beschränken uns von vorneherein auf reelle und zwar positive Werte von x und λ. Faßt man λ, x, z als räumliche rechtwinklige Koordinaten auf, so ist durch die Gleichung $z = J_\lambda(x)$ eine wellenförmige Fläche dargestellt [5]). (Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.) Die Wellen sind schwach gekrümmt und nähern sich mit wachsendem x und λ einem geradlinigen Verlauf mit einer Richtung parallel zur Geraden $x = \lambda$ [6]).

Die kleinste positive Wurzel der Gleichung $J_\lambda(x) = 0$ sei mit x_1 bezeichnet; dann ist $x_1 = x_1(\lambda)$ eine eindeutige Funktion von λ und zwar [8]) ist $x_1(\lambda) > \lambda$. Wir schränken den betrachteten Teil der x-λ-Ebene weiter ein:

(1) *Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf* $x \geqq x_1(\lambda)$, $\lambda \geqq \lambda_0$, *wobei* λ_0 *eine beliebige positive Zahl ist.*

Da $x_1(\lambda) > \lambda$ ist, läßt sich in üblicher Weise (z. B. [4])) in unserem ganzen Bereich

$$\cos \alpha = \frac{\lambda}{x} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

setzen; dadurch ist $\alpha = \alpha(x; \lambda)$ eindeutig festgelegt. α kommt beliebig nahe an 0 und an $\frac{\pi}{2}$ heran.

Es existieren mehrere asymptotische Entwicklungen der Besselschen Funktionen für Teile unseres Bereichs [4, 13, 9, 7, 1]. Die einen gelten für $x \gg \lambda$, und ihre Konvergenz wird immer schlechter, je näher α an 0 heranrückt, andere gelten nur im Bereich $\frac{x}{\lambda} \sim 1$, also $\alpha \sim 0$. Läuft man aber längs einer Welle ins Unendliche, so geht α von Werten in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ nach 0. Nun ist das Verhalten der Besselschen Funktion längs einer Welle auch von Interesse bei Eigenwertaufgaben: Bezeichnet man nämlich den μ-ten Eigenwert einer Eigenwertaufgabe für $J_\lambda(x)$ mit $H_\mu(\lambda)$, so liegen bei festgehaltenem μ und veränderlichem λ alle Werte $H_\mu(\lambda)$ auf der gleichen Welle.

Es soll daher eine zwar grobe, aber im ganzen Bereich (1) gültige Abschätzung für das Verhalten der Besselschen Funktion längs der Wellen gegeben werden.

§ 1.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Satz 1. *Die Besselsche Funktion läßt sich im Bereich* (1) *bei Beachtung von* (2) *in folgender Form schreiben:*

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} J_\lambda(x) &= J_\lambda\left(\frac{\lambda}{\cos\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \left\{K_1(\lambda; x)\cos\left[\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)\right] + K_2(\lambda; x)\sin\left[\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)\right]\right\} \end{aligned}$$

und es existieren zwei positive, von λ, x und α unabhängige Zahlen k_1 und k_2 mit

$$\text{(B)} \qquad k_1 \leqq K_1(\lambda; x) \leqq k_2; \quad k_1 \leqq K_2(\lambda; x) \leqq k_2.$$

Satz 2. a) *Für die Punkte des n-ten Wellenbergs ist*

$$\text{(C)} \qquad 2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi(n-1) + \pi \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Diese Ungleichung läßt sich auch noch in folgender Form schreiben:

$$2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2} < x(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) < 2\pi(n-1) + \pi$$

oder

$$2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2} < \sqrt{x^2 - \lambda^2} - \lambda \arccos\frac{\lambda}{x} < 2\pi(n-1) + \pi;$$

$$\left(0 < \arccos\frac{\lambda}{x} < \frac{\pi}{2}\right).$$

Für die Punkte des n-ten Wellentals ist

$$\text{(D)} \qquad 2\pi(n-1) + \frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi n \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

mit analogen Umformungen wie oben.

b) *Die 0-Stellen von $J_\lambda(x)$, also die Kurven $J_\lambda(x) = 0$, liegen in den Bereichen*

$$\text{(E)} \qquad \begin{aligned} &2\pi(n-1)+\frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi(n-1)+\pi \text{ und} \\ &2\pi(n-1)+\frac{3\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Satz 3. *Im Bereich der n-ten Welle, also für*

$$2\pi(n-1)-\frac{\pi}{2} \leqq x(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \leqq 2\pi n \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

und auch im 1. Wellental

$$x_1(\lambda) \leqq x \leqq \frac{2\pi}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

läßt sich die Besselsche Funktion in der Form schreiben

$$\text{(F}_1\text{)} \qquad J_\lambda(x) = \frac{1}{x^{1/3}\cdot n^{1/6}} K_1(\lambda; x)$$

oder

$$\text{(F}_2\text{)} \qquad J_\lambda(x) = \frac{1}{(\lambda+n)^{1/3} n^{1/6}} K_4(\lambda; x),$$

und es existieren zwei positive, von x, λ und n unabhängige Zahlen k_1' und k_2' $(0 < k_1' < k_2')$, so daß für $\nu = 3, 4$

$$\text{(G)} \qquad \begin{aligned} &1.\ \textit{im ganzen Bereich } (1) \quad -k_2' < K_\nu(\lambda; x) < k_2' \\ &2.\ \textit{für } 2\pi(n-1) \leqq x(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \leqq 2\pi(n-1)+\frac{\pi}{2} \\ &\quad K_\nu(\lambda; x) > k_1' \qquad (n = 2, 3, \ldots) \\ &3.\ \textit{für } 2\pi(n-1)+\pi \leqq x(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \leqq 2\pi(n-1)+\frac{3\pi}{2} \\ &\quad K_\nu(\lambda; x) < -k_1' \textit{ ist} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß die numerische Größe von k_1, k_2, k_1' und k_2' von λ_0 abhängt.

Bemerkungen zu Satz 2: a) Nach Satz 2 wird der Verlauf der Wellen bestimmt durch Kurven $\mathfrak{Z}$ mit der Gleichung

$$x = \frac{C}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}; \quad \lambda = \frac{C}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}.$$

Der Richtungskoeffizient von $\mathfrak{Z}$ lautet

$$\text{(H)} \qquad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2}}{\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\lambda}{x}\right)}; \quad 0 < \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\lambda}{x}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Diesen Ausdruck können wir auch als *Richtungskoeffizienten der Welle* im Punkt $(x; \lambda)$ ansprechen.

b) Nach Satz 2 ist es sinnvoll zu definieren: Zwei Kurven $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ liegen genau eine *Wellenbreite* auseinander, wenn sie folgende Gleichungen haben:

$$\mathfrak{Z}'\begin{cases} x = \dfrac{C}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}; \\ \lambda = \dfrac{C}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}; \end{cases} \qquad \mathfrak{Z}''\begin{cases} x = \dfrac{C+2\pi}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}; \\ \lambda = \dfrac{C+2\pi}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}. \end{cases}$$

Liegen der Punkt $(x_1; \lambda_1)$ auf $\mathfrak{Z}'$ und die Punkte $(x_2; \lambda_1)$ und $(x_1; \lambda_2)$ auf $\mathfrak{Z}''$ (Fig. 1), so ist

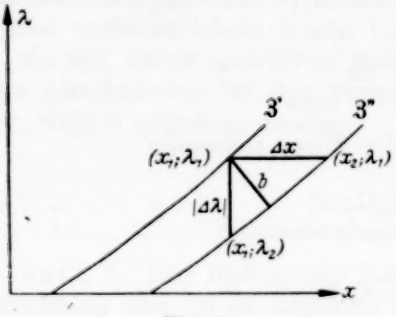

Fig. 1.

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = -\frac{2\pi}{\bar{\alpha}} = -\frac{2\pi}{\operatorname{arc\,cos}\dfrac{\bar{\lambda}}{x_1}}; \text{ wobei } \lambda_2 < \bar{\lambda} < \lambda_1$$

(J)

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\sin\bar{\alpha}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_1}{\bar{x}}\right)^2}}; \text{ wobei } x_1 < \bar{x} < x_2.$$

Der senkrechte Abstand b von $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ bei $(x_1; \lambda_1)$, wenn dort $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ als geradlinig betrachtet werden können, ist:

(K)
$$b = \frac{2\pi}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \sin^2\bar{\alpha}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_1}{\bar{x}}\right)^2 + \operatorname{arc\,cos}^2\left(\dfrac{\bar{\lambda}}{x_1}\right)}}.$$

c) Für die Punkte $(x; \lambda)$ der Kurve $\mathfrak{Z}$ ist

(L)
$$C + \lambda \leqq x \leqq C + \frac{\pi}{2}\lambda.$$

Gilt für einen Punkt $(x; \lambda)$ eine Ungleichung (vgl. (C), (D), (E)) der Form

(M)
$$C_1 < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < C_2, \quad \text{so ist} \quad C_1 + \lambda < x < C_2 + \frac{\pi}{2}\lambda.$$

Kapitel I.

Beweis von Satz 2 und Umformung der Integraldarstellung der Besselschen Funktion.

§ 2.

Die Integraldarstellung der Besselschen Funktion.

Zum Beweis gehen wir aus von der Definition der Besselschen Funktion durch die Hankelschen Funktionen:

(3a)
$$J_\lambda(x) = \tfrac{1}{2}\left(H_\lambda^{(1)}(x) + H_\lambda^{(2)}(x)\right)$$

und benützen für letztere die Integraldarstellung [11, 14, 2].

$$H_\lambda^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{L}_1} e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{L}_1} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau$$

(3b)

$$H_\lambda^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{L}_2} e^{-ix\sin\tau + i\lambda\tau}\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{L}_2} e^{\lambda f(\tau)}\,d\tau.$$

Die zu wählenden Integrationswege $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ in der komplexen τ-Ebene sind in Fig. 2 angedeutet. Die genaue Festlegung des Weges soll im Anschluß an DEBYE nach dem Sattelpunktsverfahren vorgenommen werden [4, 12, 15, 3].

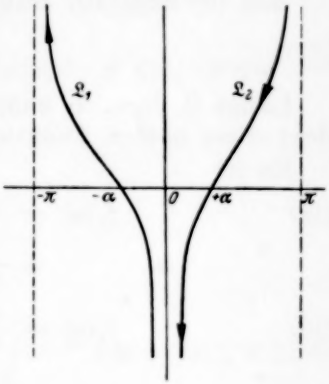

Fig. 2.

Nach (2) ist

$$f(\tau) = -i\frac{\sin\tau}{\cos\alpha} + i\tau. \tag{4}$$

Setzen wir $\tau = u + iv$, so wird

$$f(\tau) = \frac{\cos u}{\cos\alpha}\,\mathfrak{Sin}\,v - v + i\left(-\frac{\sin u}{\cos\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,v + u\right). \tag{5}$$

Die Bedingung für den Sattelpunkt $f'(\tau)=0$ ergibt nach (4) $\cos\tau = \cos\alpha$, also

$$\tau = \pm\alpha. \tag{6}$$

$\mathfrak{L}_1$ ist dann über den Sattelpunkt $\tau = -\alpha$ und $\mathfrak{L}_2$ ist über den Punkt $\tau = +\alpha$ zu führen.

Die zugehörigen „steilsten Wege" bezüglich des Anstiegs bzw. Abfalls von $\Re f(\tau)$ sind gegeben durch

$$\Im f(\tau) = \text{const.} = \Im f(\pm\alpha).$$

Also hat $\mathfrak{L}_1$ die Gleichung

$$-\frac{\sin u}{\cos\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,v + u = \operatorname{tg}\alpha - \alpha \tag{7a}$$

und $\mathfrak{L}_2$ hat die Gleichung

$$-\frac{\sin u}{\cos\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,v + u = -\operatorname{tg}\alpha + \alpha. \tag{7b}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$b = \operatorname{tg}\alpha - \alpha, \tag{8}$$

so lauten die Gleichungen der zwei Integrationswege

$$(\mathfrak{L}_1)\quad \mathfrak{Cof}\,v = \frac{(u-b)\cos\alpha}{\sin u} \tag{9}$$

$$(\mathfrak{L}_2)\quad \mathfrak{Cof}\,v = \frac{(u+b)\cos\alpha}{\sin u}. \tag{10}$$

Bis hierher folgten wir DEBYE. Nun aber wollen wir beide HANKELsche Funktionen zur BESSELschen Funktion zusammenziehen. Aus (9) erhalten wir die Gleichung $v = v_1(u)$ von $\mathfrak{L}_1$ und aus (10) die Gleichung $v = v_2(u)$ von $\mathfrak{L}_2$. Längs $\mathfrak{L}_1$ läuft u von 0 über $-\alpha$ nach $-\pi$; dabei ist $v_1(0) = -\infty$, $v_1(-\alpha) = 0$, $v_1(-\pi) = +\infty$. Längs $\mathfrak{L}_2$ läuft u von π über α nach 0, dabei ist $v_2(\pi) = +\infty$, $v_2(\alpha) = 0$, $v_2(0) = -\infty$.

Aus (9) und (10) entnimmt man

$$v_1(-u) = v_2(u) \qquad (0 \leqq u \leqq \pi). \tag{11}$$

Längs $\mathfrak{L}_1$ bzw. $\mathfrak{L}_2$ kann $f(\tau)$ als Funktion von u geschrieben werden; diese beiden Funktionen bezeichnen wir mit $f_1(u)$ bzw. $f_2(u)$.

Es ist

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \frac{\cos u}{\cos \alpha} \operatorname{Sin} v_1(u) - v_1(u) + i\,b \\ &= -F_1(u) + i\,b. \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_2(u) &= \frac{\cos u}{\cos \alpha} \operatorname{Sin} v_2(u) - v_2(u) - i\,b \\ &= -F(u) - i\,b. \end{aligned} \tag{13}$$

Auf Grund von (11) ergibt sich aus (12) und (13)

$$F_1(-u) = F(u) \text{ für } 0 \leqq u \leqq \pi. \tag{14}$$

Aus den Gleichungen (3a) und (3b) erhält man

$$\begin{aligned} J_\lambda(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{L}_1} e^{\lambda(-F_1(u)+ib)}\, d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{L}_2} e^{\lambda(-F(u)-ib)}\, d\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-\pi} e^{\lambda(-F_1(u)+ib)} \left(1 + i\,\frac{dv_1(u)}{du}\right) du \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^0 e^{\lambda(-F(u)-ib)} \left(1 + i\,\frac{dv_2(u)}{du}\right) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{\lambda(-F_1(-u)+ib)} \left(1 - i\,\frac{dv_1(-u)}{du}\right) du \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{\lambda(-F(u)-ib)} \left(1 + i\,\frac{dv_2(u)}{du}\right) du. \end{aligned}$$

Also

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-\lambda F(u)} \left(\cos \lambda b + \sin \lambda b\, \frac{dv_2(u)}{du}\right) du. \tag{15}$$

Da $F(u)$ für $u = \alpha$ verschwindet, aber sowohl für von α bis 0 abnehmendes u als auch für von α bis π zunehmendes u wächst, ist es zweckmäßig, die Integrale zu zerlegen:

$$J_\lambda(x) = \cos\lambda b\,\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\pi e^{-\lambda F(u)}\,du + \cos\lambda b\,\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha e^{-\lambda F(u)}\,du$$

(16)

$$\sin\lambda b\,\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\pi e^{-\lambda F(u)}\,\frac{dv_2(u)}{du}\,du + \sin\lambda b\,\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha e^{-\lambda F(u)}\,\frac{dv_2}{du}\,du.$$

Wir führen nun eine neue Integrationsvariable η ein, indem wir (wie DEBYE[4]) S. 543)

(17) $$\eta^2 = \lambda F(u)$$

setzen. Es ist dann

(18) $$\frac{du}{d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{F(u)^{1/2}}{F'(u)}.$$

Unsere Teilintegrale in (16) lauten dann:

$$\int_\alpha^\pi e^{-\lambda F(u)}\,du = \int_0^\infty e^{-\eta^2}\,\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{F(u)^{1/2}}{F'(u)}\,d\eta = \int_0^\infty e^{-\eta^2} A_1\,d\eta \quad (\alpha \leqq u \leqq \pi)$$

$$\int_0^\alpha e^{-\lambda F(u)}\,du = -\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{F(u)^{1/2}}{F'(u)}\,d\eta = \int_0^\infty e^{-\eta^2} A_2\,d\eta \quad (0 \leqq u \leqq \alpha)$$

(19)

$$\int_\alpha^\pi e^{-\lambda F(u)}\,v_2'(u)\,du = \int_0^\infty e^{-\eta^2}\,\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{F(u)^{1/2}\,v_2'(u)}{F'(u)}\,d\eta = \int_0^\infty e^{-\eta^2} A_3\,d\eta \quad (\alpha \leqq u \leqq \pi)$$

$$\int_0^\alpha e^{-\lambda F(u)}\,v_2'(u)\,du = -\int_0^\infty e^{-\eta^2}\,\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{F(u)^{1/2}\,v_2'(u)}{F'(u)}\,d\eta = \int_0^\infty e^{-\eta^2} A_4\,d\eta \quad (0 \leqq u \leqq \alpha).$$

§ 3.

Die Funktionen $v_2(u)$, $v_2'(u)$, $F(u)$ und $F'(u)$.

Zur weiteren Untersuchung der A_ν sollen nun die Funktionen $v_2(u)$, $\frac{dv_2(u)}{du}$, $F(u)$ und $F'(u)$ betrachtet werden.

1. $v_2(u)$ ist durch die Gleichung (10) definiert. Setzen wir in (10)

(20) $$t = e^v$$

ein, so lautet sie

$$t + \frac{1}{t} = 2\,\frac{(u+b)\cos\alpha}{\sin u}.$$

Daraus erhält man

(21) $$t = \frac{(u+b)\cos\alpha}{\sin u} \pm \sqrt{\frac{(u+b)^2\cos^2\alpha}{\sin^2 u} - 1}.$$

Da $v_3(u)$ für $u > \alpha$ positiv und für $u < \alpha$ negativ sein soll, gilt das obere Vorzeichen für $u > \alpha$ und das untere für $u < \alpha$. Wir wollen aber doch die beiden Bereiche zunächst gemeinsam behandeln und setzen fest:

(22) *Im Folgenden gilt bei doppelten Vorzeichen das obere für den Bereich* $\alpha \leqq u \leqq \pi$ *und das untere Vorzeichen für* $0 \leqq u \leqq \alpha$.

$$\frac{1}{t} = \frac{(u+b)\cos\alpha}{\sin u} \mp \sqrt{\frac{(u+b)^2\cos^2\alpha}{\sin^2 u} - 1}.$$

Somit ist

$$\mathfrak{Sin}\, v = \pm \sqrt{\frac{(u+b)^2\cos^2\alpha}{\sin^2 u} - 1}.$$

Führen wir die Funktionen

$$\begin{aligned} \psi_3 &= (u-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha + \sin u, \\ \psi_4 &= (u-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha - \sin u \end{aligned} \tag{23}$$

ein (ψ₁ und ψ₂ werden später eingeführt), so erhalten wir

$$\mathfrak{Sin}\, v = \pm \frac{1}{\sin u}\sqrt{\psi_3\psi_4}. \tag{24}$$

Nach (20) ist $v_3(u) = \log t$, also nach (21) und (23)

$$v_2(u) = \log\left(\frac{1}{\sin u}(\sin u + \psi_4 \pm \sqrt{\psi_3\psi_4})\right)$$

(25) oder

$$v_2(u) = \log\left(1 + \frac{1}{\sin u}(\psi_4 \pm \sqrt{\psi_3\psi_4})\right).$$

2. $\frac{dv_2(u)}{du}$ erhalten wir aus der Gleichung

$$\frac{dv_2(u)}{du} = \frac{1}{t}\frac{dt}{du}. \tag{26}$$

Setzen wir vorübergehend

$$\frac{(u+b)\cos\alpha}{\sin u} = h(u),$$

so ist

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{\sin u\cos\alpha - \cos u\,((u-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha)}{\sin^2 u} \\ &= \frac{\sin(u-\alpha) - (u-\alpha)\cos\alpha\cos u}{\sin^2 u}. \end{aligned}$$

Führen wir die Funktion ein

$$\psi_5 = \sin(u-\alpha) - (u-\alpha)\cos\alpha\cos u, \tag{27}$$

so wird

$$h'(u) = \frac{\psi_5}{\sin^2 u}.$$

Aus $t = h(u) \pm \sqrt{h^2(u) - 1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{dt}{du} &= h'(u)\left(1 \pm \frac{h(u)}{\sqrt{h^2-1}}\right)\\ &= \frac{h'(u)}{\sqrt{h^2-1}}\left(\sqrt{h^2-1} \pm h(u)\right)\\ &= \pm \frac{t\,h'(u)}{\sqrt{h^2-1}} = \pm t \frac{\psi_5}{\sin u \sqrt{\psi_3 \psi_4}}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichung in (26) ein, so erhält man

$$\frac{dv_2(u)}{du} = \pm \frac{\psi_5}{\sin u \sqrt{\psi_3 \psi_4}}. \tag{28}$$

3. Aus (13), (24) und (25) erhalten wir

$$F(u) = \mp \frac{\cos u \sqrt{\psi_3 \psi_4}}{\sin u \cos \alpha} + \log\left(1 + \frac{1}{\sin u}\left(\psi_4 \pm \sqrt{\psi_3 \psi_4}\right)\right). \tag{29}$$

Um die Gleichung (29) etwas übersichtlicher zu gestalten, führen wir eine neue Hilfsvariable y durch die Gleichung ein

$$y = \frac{\sqrt{\psi_3 \psi_4}}{\sin u}. \tag{30a}$$

Mit Hilfe von (23) erhält man daraus

$$\begin{gathered}(u - \alpha)\cos\alpha + \sin\alpha = \sin u \sqrt{1 + y^2}\\ \psi_3 = \sin u\,(\sqrt{1+y^2} + 1), \quad \psi_4 = \sin u\,(\sqrt{1+y^2} - 1).\end{gathered} \tag{30b}$$

Dies in (29) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}F(u) &= \mp \frac{\cos u}{\cos \alpha} y + \log\left(\sqrt{1+y^2} \pm y\right)\\ &= \mp \frac{\cos u}{\cos \alpha} y \pm \log\left(\sqrt{1+y^2} + y\right)\\ &= \mp y\left(\frac{\cos u - \cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{y - \log\left(\sqrt{1+y^2} + y\right)}{y}\right).\end{aligned}$$

Führen wir die Funktion

$$\psi_6 = \pm (\cos\alpha - \cos u) \tag{31}$$

ein, so wird

$$F(u) = y\left(\frac{\psi_6}{\cos\alpha} \mp \frac{y - \log\left(\sqrt{1+y^2} + y\right)}{y}\right). \tag{32}$$

4. $\frac{dF(u)}{du}$ erhalten wir am raschesten aus (13):

$$F(u) = v_1(u) - \frac{\cos u}{\cos\alpha}\,\mathfrak{Sin}\, v_2(u)$$

$$\frac{dF(u)}{du} = \frac{dv_2(u)}{du}\left(1 - \frac{\cos u}{\cos\alpha}\,\mathfrak{Cof}\, v_2(u)\right) + \frac{\sin u}{\cos\alpha}\,\mathfrak{Sin}\, v_2(u).$$

$\mathfrak{Sin}\, v$ entnehmen wir aus (24), $\mathfrak{Cof}\, v_2(u)$ aus (10) und $\frac{dv_2}{du}$ aus (28). Dann wird

$$\frac{dF(u)}{du} = \pm \frac{\psi_5}{\sin u \sqrt{\psi_3 \psi_4}} \left(1 - \frac{\cos u}{\cos \alpha} \frac{(u+b)\cos\alpha}{\sin u}\right) \pm \frac{\sin u}{\cos \alpha} \frac{1}{\sin u} \sqrt{\psi_3 \psi_4}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sin^2 u \cos \alpha \sqrt{\psi_3 \psi_4}} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 u\, \psi_3 \psi_4 + \sin u \cos \alpha \psi_5 \\ -\psi_5 \cos u\, ((u-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha) \end{array} \right\}.$$

Nach elementarer Umformung erhält man

$$\frac{dF}{du} = \frac{\pm \psi_1 \psi_2}{\sin^2 u \cos \alpha \sqrt{\psi_3 \psi_4}},$$

wobei

$$\psi_1 = (u-\alpha)\cos\alpha - \sin(u-\alpha)\cos u$$

$$\psi_2 = (u-\alpha)\cos\alpha - \sin(u-\alpha)\cos u + 2\sin^2 u \sin\alpha$$

gesetzt wurde.

Zusammenstellung der Formeln:

(33)

1. $\psi_1 = (u-\alpha)\cos\alpha - \sin(u-\alpha)\cos u$
2. $\psi_2 = (u-\alpha)\cos\alpha - \sin(u-\alpha)\cos u + 2\sin^2 u \sin\alpha$
3. $\psi_3 = (u-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha + \sin u$
4. $\psi_4 = (u-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha - \sin u$
5. $\psi_5 = \sin(u-\alpha) - (u-\alpha)\cos\alpha\cos u$
6. $\psi_6 = |\cos\alpha - \cos u|$.

(34)

1. $y = \frac{\sqrt{\psi_3 \psi_4}}{\sin u}$;
2. $(u-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha = \sin u \sqrt{1+y^2}$.
3. $\psi_3 = \sin u\,(\sqrt{1+y^2}+1)$
4. $\psi_4 = \sin u\,(\sqrt{1+y^2}-1)$.

(35)

1. $\frac{dv_2(u)}{du} = \pm \frac{\psi_5}{\sin u \sqrt{\psi_3 \psi_4}}$;
2. $F(u) = y\left(\frac{\psi_6}{\cos\alpha} \mp \frac{y - \log(\sqrt{1+y^2}+y)}{y}\right)$
3. $\frac{dF(u)}{du} = \frac{\pm \psi_1 \psi_2}{\sin^2 u \cos\alpha \sqrt{\psi_3 \psi_4}}$.

§ 4.

Einige Ungleichungen.

I. Aus der Integraldarstellung (15) der Besselschen Funktion läßt sich eine Abschätzung für die Lage der Wellenberge und -täler geben.

Aus (33.5) ersieht man nämlich, daß ψ_5 für $0 \leqq u < \alpha$ negativ und für $\alpha < 0 \leqq \pi$ positiv ist. (35.1) ergibt dann, daß $\frac{dv_3}{du}$ immer positiv ist für $0 \leqq u < \alpha$ und $\alpha < u \leqq \pi$. Für $u = \alpha$ verschwindet ψ_5; da aber auch ψ_4 verschwindet, ist ein Grenzübergang durchzuführen. Dieser ergibt, daß $\frac{dv_3}{du}$ auch für $u = \alpha$ einen endlichen positiven Wert hat.

Sind $\cos \lambda b$ und $\sin \lambda b$ beide positiv, so ist also der Integrand in (15) positiv und also auch $J_\lambda(x) > 0$; sind $\sin \lambda b$ und $\cos \lambda b$ beide negativ, so ist auch $J_\lambda(x) < 0$. Da $b = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$ ist, erhält man daraus

$$\begin{aligned} &J_\lambda(x) > 0 \quad \text{für} \quad 2\pi(n-1) \leqq \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) \leqq 2\pi(n-1) + \frac{\pi}{2} \\ &J_\lambda(x) < 0 \quad \text{für} \quad 2\pi(n-1) + \pi \leqq \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) \leqq 2\pi(n-1) + \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \tag{36}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Daraus folgt:

a) Läuft man längs des gleichen n-ten Wellenbergs der Funktion $z = J_\lambda(x)$ ins Unendliche, so verbleibt man immer in dem gleichen Bereich (n = constans)

$$2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi(n-1) + \pi \quad \text{(Behauptung (C))}. \tag{37}$$

((37) greift weiter als (36) wegen der von (36) nicht erfaßten Zwischenbereiche.) Ebenso gilt für ein bestimmtes Wellental die Ungleichung (n = constans):

$$2\pi(n-1) + \frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi n \quad \text{(Behauptung (D))}. \tag{38}$$

Damit ist Satz 2a *bewiesen.*

b) Die 0-Stellen von $J_\lambda(x)$, also die Kurven $J_\lambda(x) = 0$, liegen in den Bereichen:

$$\begin{aligned} &2\pi(n-1) + \frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi(n-1) + \pi \quad \text{und} \\ &2\pi(n-1) + \frac{3\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi n \end{aligned} \tag{39}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

und zwar liegt in jedem dieser Bereiche mindestens eine „Nullkurve". Daß es jeweils nur eine 0-Kurve gibt, läßt sich aus Obigem nicht schließen.

Damit ist Satz 2b *bewiesen.*

II. Bezeichnen wir die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$J_\lambda(x) = 0$$

mit $x_1(\lambda)$ und die Funktion α von λ, die durch

$$\cos \alpha(\lambda) = \frac{\lambda}{x_1(\lambda)}$$

definiert ist, mit $\alpha_1(\lambda)$, so ergibt die Anwendung von (39)

$$\frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha_1 - \alpha_1) < \pi. \tag{40}$$

Da wir uns auf das Gebiet $\lambda \geqq \lambda_0$ beschränkt haben, folgt aus dem zweiten Teil von (40)

$$\operatorname{tg}\alpha_1 - \alpha_1 < \frac{\pi}{\lambda} \leqq \frac{\pi}{\lambda_0}. \tag{41}$$

Definieren wir nun α_0 durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha_0 - \alpha_0 = \frac{\pi}{\lambda_0},$$

so folgt aus (41), da $\operatorname{tg}\alpha - \alpha$ eine wachsende Funktion ist,

$$\alpha_1(\lambda) < \alpha_0.$$

Nun ist $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{\alpha^3}$ für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ eine wachsende Funktion von α. (Zum Beweis braucht man nur nach α zu differenzieren und den Zähler des entstehenden Bruchs, der für $\alpha = 0$ verschwindet, noch einmal nach α abzuleiten.) Daraus folgt

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \alpha_1}{\alpha_1^3} < \frac{\operatorname{tg}\alpha_0 - \alpha_0}{\alpha_0^3}.$$

Setzt man dies in den ersten Teil der Ungleichung (40) ein, so erhält man:

$$\frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha_1 - \alpha_1) < \lambda\alpha_1^3 \frac{\operatorname{tg}\alpha_0 - \alpha_0}{\alpha_0^3} = \lambda\alpha_1^3 \frac{\pi}{\lambda_0 \alpha_0^3}.$$

Daraus folgt

$$\lambda\alpha_1^3(\lambda) > \frac{\lambda_0 \alpha_0^3}{2}.$$

Da in dem betrachteten Teil der λ-x-Ebene allgemein $x \geqq x_1(\lambda)$, d. h. $\alpha(\lambda; x) \geqq \alpha_1(\lambda)$ ist, so gilt allgemein in unserem Bereich $\lambda \geqq \lambda_0$, $x \geqq x_1(\lambda)$

$$\alpha^3\lambda > \frac{\lambda_0 \alpha_0^3}{2}. \tag{42}$$

(43)
Setzen wir $\lambda_0 = 2$, so ist $\frac{\lambda_0 \alpha_0^3}{2} = 1,85$,
„ „ $\lambda_0 = 5$, „ „ $\frac{\lambda_0 \alpha_0^3}{2} = 2,71$,
„ „ $\lambda_0 = 10$, „ „ $\frac{\lambda_0 \alpha_0^3}{2} = 3,28$.

III. Für die folgenden Abschätzungen werden einige elementare Ungleichungen benötigt. Diese sollen jetzt zusammengestellt werden.

1. Für $0 \leqq y$ ist:

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{1+y^2}-1}{\sqrt{1+y^2}+1} \leqq \frac{y-\log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y} \leqq \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{\sqrt{1+y^2}+1} \tag{44}$$

oder nach (34. 3 und 4)

$$\frac{2}{3}\frac{\psi_4}{\psi_3} \leqq \frac{y-\log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y} \leqq \frac{\psi_4}{\psi_3}. \tag{44 a}$$

2. Für $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ ist:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \frac{1}{3}\varphi \leqq \frac{\varphi-\sin\varphi}{1-\cos\varphi} \leqq \frac{1}{2}\varphi;\\
&\text{b)} \quad 3\varphi\cos\varphi+\varphi^2\sin\varphi \leqq 3\sin\varphi;\\
&\text{c)} \quad \frac{8}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2} \leqq \sin\varphi-\varphi\cos\varphi \leqq \frac{2}{3}\varphi^2\sin\frac{\varphi}{2};\\
&\text{d)} \quad \varphi-\sin\varphi\cos\varphi \leqq \frac{2}{3}\varphi^3.
\end{aligned} \tag{45}$$

3. Für $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ ist:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \left(\frac{2}{\pi}\varphi\right)^3 \leqq \varphi-\sin\varphi\cos\varphi;\\
&\text{b)} \quad \frac{1}{4}\varphi^3 \leqq \sin\varphi-\varphi\cos\varphi \leqq \frac{1}{3}\varphi^3;\\
&\text{c)} \quad 2\sin^2\varphi \leqq \varphi^2+\varphi\sin\varphi\cos\varphi;\\
&\text{d)} \quad \begin{aligned}&\sin(\gamma\varphi) \leqq \gamma\sin\varphi, \quad \text{wenn } \gamma>1;\\ &\sin(\gamma\varphi) \geqq \gamma\sin\varphi, \quad \text{wenn } 0<\gamma<1.\end{aligned}
\end{aligned} \tag{46}$$

4. Für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \xi \leqq \alpha$ ist

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \cos(\alpha-\xi)-\cos\alpha-\xi\sin(\alpha-\xi) \geqq 0;\\
&\text{b)} \quad -\xi\cos\alpha+\sin\alpha-\sin(\alpha-\xi) \geqq \frac{1}{2}\xi\left(\cos(\alpha-\xi)-\cos\alpha\right).
\end{aligned} \tag{47}$$

5. Für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \xi \leqq \pi-\alpha$ ist:

$$\xi\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right) \leqq 2\sin\frac{\xi}{2}. \tag{48}$$

Beweise. 1. Aus

$$\tfrac{2}{3}\left(\sqrt{1+t^2}+2\right) \leqq \sqrt{1+t^2}+1 < \sqrt{1+t^2}+2 \quad \text{für } 0 \leqq t$$

folgt durch Multiplikation mit $\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)^2}$ die Ungleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2t\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)}{3\sqrt{1+t^2}+1)}\right) \leqq \frac{d}{dt}\left(t-\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\right) \leqq \frac{d}{dt}\left(\frac{t\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)}{\sqrt{1+t^2}+1}\right).$$

Integriert man diese Ungleichung bestimmt nach t von 0 bis y und dividiert dann durch y, so erhält man (44).

2. Aus der für $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ geltenden Ungleichung $\sin \omega \geqq \omega \cos \omega$ erhält man

$$2 \sin \omega \cos \omega \geqq 2 \omega \cos^2 \omega, \quad 2 \sin^2 \omega \geqq 2 \omega \cos \omega \sin \omega.$$

Setzt man in beide Ungleichungen $2 \omega = \psi$, so erhält man für $0 \leqq \psi \leqq \pi$

$$\sin \psi \geqq \frac{1}{2} \psi (1 + \cos \psi), \quad 1 - \cos \psi \geqq \frac{\psi}{2} \sin \psi,$$

$$\frac{1}{2} \psi (1 - \cos \psi) \geqq \psi - \sin \psi, \quad 1 - \cos \psi \geqq \frac{1}{3} (1 - \cos \psi + \psi \sin \psi).$$

Integriert man die zweite Ungleichung nach ψ von 0 bis φ, so ergibt sich

$$\varphi - \sin \varphi \geqq \frac{1}{3} (\varphi - \varphi \cos \varphi),$$

womit (45 a) bewiesen ist.

3. Aus $\psi (\psi \cos \psi - \sin \psi) \leqq 0$ für $0 \leqq \psi \leqq \pi$ folgt

$$3 \cos \psi - \psi \sin \psi + \psi^2 \cos \psi \leqq 3 \cos \psi.$$

Daraus erhält man durch Integration nach ψ von 0 bis φ die Ungleichung (45 b).

4. Aus

$$4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \leqq 4 \frac{\psi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \leqq \frac{8}{3} \frac{\psi}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \frac{4}{3} \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 \cos \frac{\psi}{2}$$

folgt

$$4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \leqq \psi \sin \psi \leqq \frac{4}{3} \psi \sin \frac{\psi}{2} + \frac{1}{3} \psi^2 \cos \frac{\psi}{2}.$$

Daraus erhält man durch Integration von 0 bis φ (45. c).

5. Durch Integration nach ψ von 0 bis φ erhält man aus $2 \sin^2 \psi \leqq 2 \psi^2$ die Ungleichung (45. d) und aus $3 \frac{8}{\pi^3} \psi^2 \leqq 2 \sin^2 \psi$ für $0 \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung (46. a).

6. Die für $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ geltende Ungleichung $4 \omega \cos \omega \sin \omega \leqq 4 \sin^3 \omega$ ergibt

$$3 \cos^2 \omega - 3 \sin^2 \omega \leqq 3 \cos^2 \omega + \sin^2 \omega - 4 \omega \cos \omega \sin \omega.$$

Daraus erhält man durch Integration nach ω von 0 bis ψ:

$$3 \sin \psi \cos \psi \leqq \psi (3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi).$$

Dies ergibt

$$4 \sin \psi \cos \psi \leqq 2 \psi + \sin \psi \cos \psi + \psi \cos^2 \psi - \psi \sin^2 \psi.$$

Integration nach ψ von 0 bis φ ergibt (46. c).

7. Aus $\tau \cos (\alpha - \tau) \geqq 0$ für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \tau \leqq \alpha$ folgt durch Integration nach τ von 0 bis ξ die Ungleichung (47. a). Integriert man

diese wieder nach ξ von 0 bis ξ, so erhält man

$$-\xi\cos\alpha+2\sin\alpha-2\sin(\alpha-\xi)-\xi\cos(\alpha-\xi)\geqq 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit (47. b).

8. $$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\varphi^3}\right)=\frac{1}{\varphi^4}(\varphi^2\sin\varphi-3\sin\varphi+3\varphi\cos\varphi)\leqq 0$$

nach (45. b). Da

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\varphi^3}=\frac{1}{3}\quad\text{und}\quad\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{\varphi^3}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^3>\frac{1}{4},$$

ist (46. b) bewiesen.

9. Für $0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ und $0\leqq\tau\leqq\pi-\alpha$ gilt

$$\cos\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right)\cos\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right)\sin\alpha\geqq\cos\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right)\cos\alpha-\frac{\tau}{2}\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right).$$

Diese Ungleichung ist identisch mit

$$\cos\frac{\tau}{2}\geqq\cos\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right)\cos\alpha-\frac{\tau}{2}\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\tau}{2}\right).$$

Integration nach τ von 0 bis ξ ergibt (48).

10. (46. d) ist evident.

Kapitel II.

Abschätzung der Integrale $\int_0^\infty e^{-\eta^2}A_\nu\,d\eta$ und $\int_0^\infty e^{-\eta^2}A_\nu\,d\eta$.

§ 5.

Die Funktionen ψ_ν im Bereich $0\leqq u\leqq\alpha$.

Wir führen im Bereich $0\leqq u\leqq\alpha$ die Funktionen $C_\nu(\alpha;\xi)$ ein durch folgende Gleichungen:

$$u=\alpha-\xi.$$

(49)
$$\begin{aligned}
&\psi_1=\xi^2\sin\alpha\,C_1(\alpha;\xi); && \psi_2=\sin^3\alpha\,C_2(\alpha;\xi);\\
&\psi_3=\sin\alpha\,C_3(\alpha;\xi); && \psi_4=\xi^2\sin\alpha\,C_4(\alpha;\xi);\\
&\psi_5=-\xi\sin^2\alpha\,C_5(\alpha;\xi); && \psi_6=\xi\sin\alpha\,C_6(\alpha;\xi);\\
&&&\sin u=\sin\alpha\,C_7(\alpha;\xi).
\end{aligned}$$

Dann ist

(50) I. $$\frac{\partial C_\nu(\alpha;\xi)}{\partial\xi}\leqq 0\qquad(\nu=1,\ldots,7),$$

II. für $0 \leqq \xi \leqq \alpha$, $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$:

(51)
$$1.\ \tfrac{1}{3} \leqq C_1(\alpha;\xi) \leqq 1; \qquad 4.\ \tfrac{1}{3} \leqq C_4(\alpha;\xi) \leqq \tfrac{1}{2};$$
$$2.\ \tfrac{1}{3} \leqq C_2(\alpha;\xi) \leqq 2; \qquad 5.\ \tfrac{1}{3} \leqq C_5(\alpha;\xi) \leqq 1;$$
$$3.\ 0 \leqq C_3(\alpha;\xi) \leqq 2; \qquad 6.\ \tfrac{1}{2} \leqq C_6(\alpha;\xi) \leqq 1;$$
$$7.\ 0 \leqq C_7(\alpha;\xi) \leqq 1.$$

III. Ist $0 < \gamma < 1$, so ist für $0 \leqq \xi \leqq \alpha\gamma$ und $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$:

(52)
$$1.\ 2(1-\gamma) \leqq C_3(\alpha;\xi) \leqq 2. \qquad 3.\ 0{,}9\left(1-\frac{\gamma}{2}\right) \leqq C_6(\alpha;\xi) \leqq 1;$$
$$2.\ 1-\gamma \leqq C_7(\alpha;\xi) \leqq 1. \qquad 4.\ \left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^2 \leqq C_5(\alpha;\xi) \leqq 1.$$

Beweis.

1. $$\frac{\partial C_1(\alpha;\xi)}{\partial \xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin\xi\cos(\alpha-\xi)-\xi\cos\alpha}{\xi^2\sin\alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{\xi^3\sin\alpha}\,2\cos(\alpha-\xi)(\xi\cos\xi-\sin\xi) \leqq 0.$$

Daraus folgt, daß für $0 \leqq \xi \leqq \alpha$

$$C_1(\alpha;0) \geqq C_1(\alpha;\xi) \geqq C_1(\alpha;\alpha)$$

ist.

Nun ist

$$C_1(\alpha;0) = \lim_{\xi\to 0}\frac{\psi_1}{\xi^2\sin\alpha} = \lim_{\xi\to 0}\frac{\cos(\alpha-2\xi)-\cos\alpha}{2\xi\sin\alpha} = 1.$$

$$C_1(\alpha;\alpha) = \frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2\sin\alpha},$$

$$\frac{dC_1(\alpha;\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha^3\sin^2\alpha}(\alpha^2+\alpha\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha) \geqq 0$$

nach (46. c), also

$$C_1(\alpha;\alpha) \geqq \lim_{\alpha\to 0} C_1(\alpha;\alpha) = \tfrac{1}{3}.$$

Somit ist

$$\tfrac{1}{3} \leqq C_1(\alpha;\xi) \leqq 1.$$

2. $$\frac{\partial C_2(\alpha;\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\sin^3\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\xi}(\sin\xi\cos(\alpha-\xi)-\xi\cos\alpha+2\sin\alpha\sin^2(\alpha-\xi))$$
$$= \frac{1}{\sin^3\alpha}(-2\sin(\alpha-\xi)\sin(2\alpha-\xi)) \leqq 0.$$

Das bedeutet:

$$C_2(\alpha;0) \geqq C_2(\alpha;\xi) \geqq C_2(\alpha;\alpha) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \alpha.$$

Nun ist

$$\lim_{\xi\to 0} C_2(\alpha;\xi) = 2$$

und

$$C_2(\alpha;\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{\alpha^2}{\sin^2\alpha}\, C_1(\alpha;\alpha) \geqq C_1(\alpha;\alpha) \geqq \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt

$$\tfrac{1}{3} \leqq C_2(\alpha;\xi) \leqq 2.$$

3. $$\frac{\partial}{\partial\xi} C_4(\alpha;\xi) = \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sin\alpha}{\xi^2} - \frac{\cos\alpha}{\xi} - \frac{\sin(\alpha-\xi)}{\xi^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\xi^3\sin\alpha}\left(\xi(\cos\alpha + \cos u) + 2(\sin u - \sin\alpha)\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\,\xi^3}\, 4\cos\left(\alpha - \frac{\xi}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2} - \sin\frac{\xi}{2}\right) \leqq 0.$$

Somit ist

$$C_4(\alpha;0) \geqq C_4(\alpha;\xi) \geqq C_4(\alpha;\alpha).$$

Nun ist

(53) $$\lim_{\xi\to 0} C_4(\alpha;\xi) = \tfrac{1}{2}$$

und

$$C_4(\alpha;\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\,\alpha^2} = C_1(\alpha;\alpha) \geqq \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt die Behauptung (51. 4).

4. $$\frac{\partial}{\partial\xi} C_5(\alpha;\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{-\xi\cos\alpha\cos(\alpha-\xi) + \sin\xi}{\xi\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{-1}{\xi^2\sin^2\alpha}\left(\cos\alpha\sin u\,\xi^2 + (\sin\xi - \xi\cos\xi)\right) \leqq 0.$$

Also ist wieder

$$C_5(\alpha;0) \geqq C_5(\alpha;\xi) \geqq C_5(\alpha;\alpha).$$

Nun ist

$$C_5(\alpha;0) = 1; \quad C_5(\alpha;\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha\sin^2\alpha} = C_1(\alpha;\alpha)\,\frac{\alpha}{\sin\alpha} \geqq \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt die Behauptung (51. 5).

5. $$\frac{\partial}{\partial\xi} C_6(\alpha;\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{\cos u - \cos\alpha}{\xi\sin\alpha} = \frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{2\sin\frac{\xi}{2}\sin\left(\alpha - \frac{\xi}{2}\right)}{\xi\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{\xi^2\sin\alpha}\left(2\sin\left(\alpha - \frac{\xi}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2} - \sin\frac{\xi}{2}\right) - \xi\sin\frac{\xi}{2}\cos\left(\alpha - \frac{\xi}{2}\right)\right) \leqq 0.$$

Also

$$C_6(\alpha;0) \geqq C_6(\alpha;\xi) \geqq C_6(\alpha;\alpha).$$

(54) $$C_6(\alpha;0) = \lim_{\xi\to 0}\,\frac{2\sin\frac{\xi}{2}\sin\left(\alpha - \frac{\xi}{2}\right)}{\xi\sin\alpha} = 1,$$

$$C_6(\alpha;\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Aus

$$\frac{d}{d\alpha} C_6(\alpha;\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \geqq 0$$

folgt

$$C_6(\alpha;\alpha) \geqq \lim_{\alpha \to 0} C_6(\alpha;\alpha) = \tfrac{1}{2}$$

und schließlich zusammen mit dem Früheren:

$$\tfrac{1}{2} \leqq C_6(\alpha;\xi) \leqq 1.$$

6. $$\frac{\partial}{\partial \xi} C_3(\alpha;\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sin\alpha - \xi\cos\alpha + \sin(\alpha-\xi)}{\sin\alpha}$$

$$= -\frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha + \cos(\alpha-\xi)) \leqq 0.$$

Nun ist

(55) $$C_3(\alpha;0) = 2 \quad \text{und} \quad C_3(\alpha;\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Es ist aber $\lim_{\alpha \to 0} C_3(\alpha;\alpha) = 0$, so daß wir für den Bereich $0 \leqq \xi \leqq \alpha$; $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ nur die Behauptung (51.3) erhalten:

$$0 \leqq C_3(\alpha;\xi) \leqq 2.$$

Schränken wir jedoch den Bereich ein auf

$$0 \leqq \xi \leqq \gamma\alpha; \quad 0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{mit } 0 < \gamma < 1,$$

so wird

$$C_3(\alpha;\gamma\alpha) \leqq C_3(\alpha;\xi) \leqq 2.$$

Es ist

$$C_3(\alpha;\gamma\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}(-\gamma\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \sin(1-\gamma)\alpha),$$

$$\frac{d}{d\alpha} C_3(\alpha;\gamma\alpha) = \frac{1}{\sin^2\alpha}(\gamma(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + (\sin\gamma\alpha - \gamma\sin\alpha\cos(1-\gamma)\alpha)).$$

Da für $\gamma < 1$ und $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ stets $\sin\gamma\alpha > \gamma\sin\alpha$ ist, so ist

$$\frac{d}{d\alpha} C_3(\alpha;\gamma\alpha) \geqq 0,$$

also

$$C_3(\alpha;\gamma\alpha) \geqq \lim_{\alpha \to 0} C_3(\alpha;\gamma\alpha) = 2(1-\gamma).$$

Daraus folgt die Behauptung (52.1).

7. $$\frac{\partial C_7(\alpha;\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\cos(\alpha-\xi)}{\sin\alpha} \leqq 0,$$

$$C_7(\alpha;\gamma\alpha) = \frac{\sin(1-\gamma)\alpha}{\sin\alpha} > 1-\gamma.$$

Die übrigen Behauptungen über $C_7(\alpha;\xi)$ sind evident.

8. $$C_6(\alpha;\gamma\alpha) = \frac{\sin\frac{\gamma\alpha}{2}\sin\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\alpha}{\frac{\gamma\alpha}{2}\sin\alpha}.$$

Beachten wir, daß $\frac{\gamma\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ ist, so folgt

$$C_6(\alpha;\gamma\alpha) \geqq \frac{4}{\pi\sqrt{2}}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right) = 0,9\left(1-\frac{\gamma}{2}\right).$$

9. $$C_5(\alpha;\xi) = \frac{1}{\xi\sin^2\alpha}(\sin\xi - \xi\cos\alpha(\cos\alpha\cos\xi + \sin\alpha\sin\xi))$$

$$= \frac{1}{\xi\sin^2\alpha}(\sin\xi - \xi\cos\xi + \xi\sin\alpha\sin u) \geqq \frac{1}{\xi\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{4}\xi^3 + \xi\sin\alpha\sin u\right)$$

(nach (46. b)). Daraus folgt unter Benutzung von (46. d)

$$C_5(\alpha;\alpha\gamma) \geqq \frac{1}{\alpha\gamma\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{4}\alpha^3\gamma^3 + \alpha\gamma\sin\alpha\sin(1-\gamma)\alpha\right)$$

$$\geqq \frac{1}{4}\gamma^2 + (1-\gamma) = \left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

§ 6.

Die Funktionen A_2 und A_4.

Um die Funktionen A_2 und A_4 der Integranden in (19) besser abschätzen zu können, führen wir eine Funktion $\Omega(\alpha;\xi) \geqq 0$ durch folgende Gleichung ein:

(56) $$\Omega^2 = \frac{\cos\alpha\sin^2 u}{\xi^2\sin^3\alpha}F(u);$$

dabei ist $u = \alpha - \xi$. Dann wird nach (19) und (35. 3)

$$A_2 = -\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\frac{F(u)^{1/2}}{F'(u)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin^2 u\cos\alpha\sqrt{\psi_3\psi_4}}{\psi_1\psi_2}F(u)^{1/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\cos^{1/2}\alpha\sin u\frac{\sqrt{\psi_3\psi_4}\,\xi}{\psi_1\psi_2}\Omega(\alpha;\xi)\sin^{3/2}\alpha.$$

Benutzt man die Formeln (49), so wird daraus

(57) $$A_2 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}^{1/2}\alpha\frac{\sqrt{C_3C_4}\,C_7\,\Omega}{C_1C_2}.$$

In analoger Weise erhalten wir

(58) $$A_4 = -\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\frac{v_2'(u)F(u)^{1/2}}{F'(u)} = -\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\frac{\sin u\cos\alpha\,\psi_5}{\psi_1\psi_2}F(u)^{1/2}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\cos^{1/2}\alpha\sin^{3/2}\alpha\frac{\xi\psi_5}{\psi_1\psi_2}\Omega = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}^{1/2}\alpha\frac{C_5}{C_1C_2}\Omega.$$

Wir haben noch die Funktion $\mathfrak{Q}(\alpha;\xi)$ abzuschätzen. Es war nach (56) und (35. 2)

$$\mathfrak{Q}^2(\alpha;\xi) = \frac{\cos\alpha\sin^2 u}{\xi^2\sin^3\alpha}\, y\left(\frac{\cos u-\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{y-\log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y}\right) \tag{59}$$

$$= \frac{1}{\sin^3\alpha}\,\frac{\sin^2 u}{\xi^2}\left(y\cos u-\cos\alpha\log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)\right).$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

1. $\frac{d\left(\mathfrak{Q}^2(\alpha;\xi)\right)}{d\xi}\leqq 0.$

Da $\mathfrak{Q}(\alpha;\xi)\geqq 0$ ist, folgt daraus auch

$$\frac{d\,\mathfrak{Q}(\alpha;\xi)}{d\xi}\leqq 0.$$

(60)

2. $\lim\limits_{\xi\to 0}\mathfrak{Q}^2(\alpha;\xi)=1.$
3. $\lim\limits_{\xi\to\alpha}\mathfrak{Q}^2(\alpha;\xi)=0.$
4. Für $0<\gamma<1$ und $0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\mathfrak{Q}^2(\alpha;\gamma\alpha)\geqq 0{,}9\,(1-\gamma)\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{3}(1-\gamma)}.$$

Daher ist speziell für

$\gamma=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$
$\mathfrak{Q}(\alpha;\gamma\alpha)>$	0,56	0,43	0,36	0,3.

Nach (60. 1) und (60. 2) ist für $0\leqq\xi\leqq\alpha\gamma$

$$\mathfrak{Q}(\alpha;\alpha\gamma)\leqq\mathfrak{Q}(\alpha;\xi)\leqq 1. \tag{60. 5}$$

Beweis.

1. Zur Differentiation von $\mathfrak{Q}^2(\alpha;\xi)$ nach ξ benötigt man $\frac{dy}{d\xi}$. Dies erhält man rasch durch Differentiation der Gleichung (34. 2). Aus

$$\sqrt{1+y^2}=\frac{\sin\alpha-\xi\cos\alpha}{\sin(\alpha-\xi)}$$

ergibt sich bei Verwendung von (33. 5)

$$\frac{dy}{d\xi}=\frac{(-\psi_5)\sqrt{1+y^2}}{y\sin^2 u}.$$

Damit erhält man aus (59):

$$\xi^3 y\sin^3\alpha\sin u\,\frac{d}{d\xi}(\mathfrak{Q}^2)$$

$$=-2y^2\sin^2 u(\cos u\cdot\xi+\sin u)\left(\cos u-\cos\alpha+\cos\alpha\,\frac{y-\log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y}\right)$$

$$+\xi y^2\sin^4 u+\xi\sin u(\cos u\sqrt{1+y^2}-\cos\alpha)(-\psi_5).$$

Um zu zeigen, daß dieser Ausdruck $\leqq 0$ ist, beachten wir, daß

nach (34. 1) und (33. 3, 4) $y^2 \sin^2 u = \psi_4(\psi_4 + 2\sin u)$

ist, nach (44) $\dfrac{y - \log(\sqrt{1+y^2}+y)}{y} \geqq \dfrac{2}{3}\dfrac{\psi_4}{\psi_3} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\psi_4}{\psi_4 + 2\sin u}$,

ferner nach (33. 6) $\cos u - \cos\alpha = \psi_6$,

nach (33. 5) $-\psi_5 = \sin\alpha\cos u - \cos\alpha\sin u - \xi\cos\alpha\cos u$
$= \cos u\,\psi_4 + \sin u\,\psi_6$

und nach (34. 2) $\sin u(\cos u\sqrt{1+y^2} - \cos\alpha)$
$= \sin\alpha\cos u - \xi\cos\alpha\cos u - \sin u\cos\alpha$
$= -\psi_5 = \cos u\,\psi_4 + \sin u\,\psi_6$.

Dann wird

$\sin^3\alpha\cdot\xi^3\sin u\cdot y\dfrac{d}{d\xi}(\Omega^2)$

$\leqq -2\xi\cos u\cdot\psi_4(\psi_4+2\sin u)\psi_6 - 2\sin u\cdot\psi_4(\psi_4+2\sin u)\psi_6$

$-\frac{4}{3}\xi\cos u\cos\alpha\cdot\psi_4^2 - \frac{4}{3}\sin u\cos\alpha\cdot\psi_4^2$

$+\xi\sin^2 u\cdot\psi_4(\psi_4+2\sin u) + \xi\cos^2 u\cdot\psi_4^2 + \xi\sin^2 u\cdot\psi_6^2 + 2\xi\sin u\cos u\cdot\psi_4\psi_6$

$= -\sin u\cdot\psi_4(\psi_4+2\sin u)(\psi_6 - \xi\sin u) - 2\xi\sin u\cos u\cdot\psi_4\psi_6$

$-(\xi\cos^2 u\cdot\psi_4^2 - \frac{2}{3}\xi\cos u\cos\alpha\cdot\psi_4^2) - \frac{4}{3}\sin u\cos\alpha\cdot\psi_4^2$

$-\sin u\cdot\psi_6(\psi_4^2 + 2\sin u\cdot\psi_4 - \xi\sin u\cdot\psi_6)$.

Vom 2., 3. und 4. Glied ist evident, daß sie nicht positiv sind. Aus (47. a) bzw. (47. b) ergibt sich, daß auch das 1. und 5. Glied nicht positiv sind, also ist $\dfrac{d}{d\xi}(\Omega^2) \leqq 0$.

2. $\Omega^2(\alpha;\xi) = \dfrac{\sin u}{\sin\alpha}\sqrt{C_3(\alpha;\xi)\,C_4(\alpha;\xi)}\left(C_6(\alpha;\xi) + \sigma\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\xi\dfrac{C_4(\alpha;\xi)}{C_3(\alpha;\xi)}\right)$;

wobei $\frac{2}{3} \leqq \sigma \leqq 1$ ist (44). (53), (54) und (55) ergeben (60. 2).

3. Zum Beweis von (60. 3) setzen wir Ω^2 in die Form

$$\Omega^2 = \sin u\,\frac{\sqrt{\psi_3\psi_4}}{\xi^2\sin^3\alpha}\left(\psi_6 + \sigma\cos\alpha\,\frac{\psi_4}{\psi_4+2\sin u}\right),$$

wobei wieder $\frac{2}{3} \leqq \sigma \leqq 1$ ist; dann ist wegen der Beschränktheit der ψ_ν die Behauptung evident.

4. Es ist

$$\Omega^2(\alpha;\xi) = C_7(\alpha;\xi)\sqrt{C_3(\alpha;\xi)\,C_4(\alpha;\xi)}\left(C_6(\alpha;\xi) + \sigma\xi\cos\alpha\,\frac{C_4(\alpha;\xi)}{\psi_3}\right)$$
$$\geqq C_7(\alpha;\xi)\sqrt{C_3(\alpha;\xi)\,C_4(\alpha;\xi)}\,C_6(\alpha;\xi).$$

Wir setzen nun $\xi = \alpha\gamma$, wobei $0 < \gamma < 1$ sein soll. Dann ist nach (51. 4) und (52. 1—3) die Ungleichung (60. 4) erfüllt.

§ 7.

Abschätzung von $\int_0^\infty e^{-\eta^2} A_1 d\eta$ und $\int_0^\infty e^{-\eta^2} A_4 d\eta$.

Setzt man (56) in (17) ein, so erhält man

$$\eta^3 = \lambda \frac{\xi^2 \sin^3\alpha}{\cos\alpha \sin^2 u} \Omega^2(\alpha;\xi).$$

Für $\xi = 0$ ist $\eta = 0$. Den Wert, den η an der Stelle $\xi = \alpha\gamma$ annimmt $(0<\gamma<1)$, bezeichnen wir mit η_0. Es ist (nach (60. 4) und (42))

$$(61)\qquad \eta_0^2 = \lambda\alpha^3\gamma^2 \frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha} \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(1-\gamma)\alpha} \Omega^2(\alpha;\gamma\alpha)$$

$$\geqq \lambda\alpha^3 \frac{\gamma^2}{\sin^2\left((1-\gamma)\frac{\pi}{2}\right)} (1-\gamma)\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{3}(1-\gamma)}\,0{,}9 = \lambda\alpha^3\Phi(\gamma) > \frac{\lambda_0\alpha_0^3}{2}\Phi(\gamma).$$

Dabei sind $\frac{\alpha_0^3\lambda_0}{2}$ und $\Phi(\gamma)$ von α, λ und x unabhängig. Zahlenwerte für $\frac{\alpha_0^3\lambda_0}{2}$ wurden in (43) gegeben. Für $\Phi(\gamma)$ ergibt sich:

$\gamma =$	$\frac{1}{3}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8
$\Phi(\gamma) =$	0,0495	0,0668	0,097	0,13	0,168	0,22	0,26.

Nach (57), (51) und (60) ist

$$\int_0^\infty A_2 e^{-\eta^2} d\eta \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \cdot 2 \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta \max_{\substack{0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\\ 0\leqq\xi\leqq\alpha}} \left(\frac{\sqrt{C_3 C_4} C_7 \Omega}{C_1 C_2}\right)$$

$$(62)\qquad \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \sqrt{\pi}\, 9.$$

Nach (58), (61), (51), (52) und (60. 4) ist

$$\int_0^\infty A_3 e^{-\eta^3} d\eta \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \cdot 2 \int_0^{\eta_0} \frac{\sqrt{C_3 C_4} C_7 \Omega}{C_1 C_2} e^{-\eta^2} d\eta$$

$$\geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \min_{\substack{0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\\ 0\leqq\xi\leqq\alpha\gamma}} \left(\frac{\sqrt{C_3 C_4} C_7 \Omega}{C_1 C_2}\right) 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha_0^3\lambda_0\Phi}{2}}} e^{-\eta^2} d\eta$$

$$\geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \frac{\sqrt{\frac{2}{3}(1-\gamma)}(1-\gamma)\sqrt{0{,}9(1-\gamma)\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{3}(1-\gamma)}}}{2} 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha_0^3\lambda_0\Phi}{2}}} e^{-\eta^2} d\eta;$$

$$\int_0^\infty A_4 e^{-\eta^2} d\eta \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} \sqrt{0{,}9}\,(1-\gamma)^{3/4}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2} \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha_0^3\lambda_0\Phi}{2}}} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Um eine zahlenmäßige untere Schranke zu erhalten, setzen wir beispielsweise $\gamma = \frac{1}{3}$ und $\lambda_0 = 5$; es ergibt dann obige Ungleichung:

$$(63)\quad \int_0^\infty A_2 e^{-\eta^2} d\eta \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \, 0{,}25 \frac{\sqrt{\pi}}{2} E_2(0{,}366) \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \frac{\sqrt{\pi}}{8} 0{,}39,$$

dabei bedeutet $E_2(x)$ das Fehlerintegral.

Aus (62) und (63) folgt, daß für

$$(64)\quad \int_0^\infty A_3 e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \, \Psi_2(\alpha; \lambda)$$

zwei positive von α und λ unabhängige Konstanten c_2 und $\bar{c}_2$ existieren, so daß

$$(65)\quad 0 < c_2 \leqq \Psi_2(\alpha; \lambda) \leqq \bar{c}_2$$

für $\lambda \geqq \lambda_0$ und $x \geqq x_1(\lambda)$.

In ganz analoger Weise kann $\int_0^\infty A_4 e^{-\eta^2} d\eta$ abgeschätzt werden. Es tritt C_5 an die Stelle von $\sqrt{C_3 C_4}\, C_7$. So erhält man:

$$(66)\quad \begin{aligned} &\int_0^\infty A_4 e^{-\eta^2} d\eta \\ &\leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \max_{\substack{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \xi \leqq \alpha}} \left(\frac{C_5 \Omega}{C_1 C_2}\right) 2 \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \, 9 \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty A_4 e^{-\eta^2} d\eta \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \, 2 \int_0^{\eta_0} \frac{C_5 \Omega}{C_1 C_2} e^{-\eta^2} d\eta \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \min_{\substack{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \xi \leqq \alpha\gamma}} \left(\frac{C_5 \Omega}{C_1 C_2}\right) 2 \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha_0^3 \lambda_0 \Phi}{2}}} e^{-\eta^2} d\eta \\ &\geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \frac{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^3 \sqrt{0{,}9(1-\gamma)\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{3}(1-\gamma)}}}{2} \sqrt{\pi} E_2\left(\sqrt{\frac{\alpha_0^3 \lambda_0 \Phi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \sqrt{0{,}9}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/4}\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^{5/2}(1-\gamma)^{3/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} E_2\left(\sqrt{\frac{\alpha_0^3 \lambda_0 \Phi}{2}}\right). \end{aligned}$$

Setzen wir beispielsweise $\gamma = \frac{1}{3}$; $\lambda_0 = 5$, so wird aus obiger Ungleichung

$$\int_0^\infty A_4 e^{-\eta^3} d\eta \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \left(0{,}4 \frac{\sqrt{\pi}}{2} 0{,}39\right). \tag{67}$$

Aus (66) und (67) folgt, daß es zwei von α und λ unabhängige positive Konstanten c_4 und $\bar{c}_4$ gibt, so daß

$$c_4 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \leqq \int_0^\infty A_4 e^{-\eta^3} d\eta \leqq \bar{c}_4 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha. \tag{68}$$

Kapitel III.

Abschätzung der Integrale $\int_0^\infty e^{-\eta^2} A_1 \, d\eta$ und $\int_0^\infty e^{-\eta^2} A_3 \, d\eta$.

§ 8.

Die Funktionen ψ_ν im Bereich $\alpha \leqq u \leqq \pi$.

Es sei (in Abweichung von § 5 und § 6) $u = \alpha + \xi$; dann ist $0 \leqq \xi \leqq \pi - \alpha$. Wir stellen die Formeln für die Funktionen ψ_ν zusammen und führen neue Funktionen D_ν ein:

(69)

1. $\psi_1 = \xi \cos\alpha - \sin\xi \cos u$; $\quad D_1 = \dfrac{\psi_1}{4 \sin^2 \frac{\xi}{2} (\sin\alpha + \xi \cos\alpha)}$;

2. $\psi_2 = \xi \cos\alpha - \sin\xi \cos u + 2 \sin^2 u \sin\alpha$; $\quad D_2 = \dfrac{\psi_2}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^3}$;

3. $\psi_3 = \xi \cos\alpha + \sin\alpha + \sin u$; $\quad D_3 = \dfrac{\psi_3}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha}$;

4. $\psi_4 = \xi \cos\alpha + \sin\alpha - \sin u$; $\quad D_4 = \dfrac{\psi_4}{4 \sin^2 \frac{\xi}{2} (\sin\alpha + \xi\cos\alpha)}$;

5. $\psi_5 = -\xi \cos\alpha \cos u + \sin\xi$; $\quad D_5 = \dfrac{\psi_5}{2 \sin \frac{\xi}{2} (\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^2}$;

6. $\psi_6 = \cos\alpha - \cos u$; $\quad D_6 = \dfrac{\psi_6}{2 \sin \frac{\xi}{2} (\sin\alpha + \xi\cos\alpha)}$;

7. $D_7 = 1 - \dfrac{y - \log(\sqrt{1+y^2} + y)}{y} \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos u}$.

Dann ist für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $\alpha \leqq u \leqq \pi$

(70)
$$1.\ \frac{1}{6} \leqq D_1 \leqq 1 \qquad 5.\ \frac{1}{\pi^2} \leqq D_5 \leqq 1$$
$$2.\ \frac{1}{27} < D_2 \leqq 2 \qquad 6.\ \frac{1}{\pi} \leqq D_6 \leqq 1$$
$$3.\ 1 \leqq D_3 \leqq 2 \qquad 7.\ 0{,}25 < D_7 \leqq 1.$$
$$4.\ \frac{1}{6} \leqq D_4 \leqq \frac{1}{2}$$

Beweis.

1. $\psi_1 = \xi \cos\alpha - \sin\xi \cos u = \sin\xi(\cos\alpha - \cos u) + \cos\alpha \cdot (\xi - \sin\xi)$
$$= 4 \sin^2\frac{\xi}{2} \sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right) \cos\frac{\xi}{2} + \cos\alpha \cdot (\xi - \sin\xi).$$

Also ist
$$\frac{\psi_1}{4 \sin^2\frac{\xi}{2}} = \sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right) \cos\frac{\xi}{2} + \cos\alpha \frac{\xi - \sin\xi}{2(1 - \cos\xi)}.$$

Durch Verwendung der Ungleichung (45a) erhält man daraus:

(71)
$$\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right) \cos\frac{\xi}{2} + \frac{1}{6}\xi\cos\alpha}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha} \leqq D_1 \leqq \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right) \cos\frac{\xi}{2} + \frac{1}{4}\xi\cos\alpha}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha}.$$

Setzen wir

(72a)
$$\omega(\xi; \alpha; k) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right) \cos\frac{\xi}{2} + k\xi\cos\alpha}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha},$$

so ergibt sich aus

$$\omega(\xi; \alpha; k) = \frac{\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin u) + k\xi\cos\alpha}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha}$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \frac{1}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^2}(\sin\alpha\cos\alpha \cdot (k - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(\xi\cos\alpha\cos u - \sin\xi)).$$

Es ist also für $k \leqq \frac{1}{2}$

(72b)
$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} \leqq 0.$$

Aus (71) und (72) ergibt sich

$$\omega(\pi - \alpha; \alpha; \tfrac{1}{6}) \leqq D_1 \leqq \omega(0; \alpha; \tfrac{1}{4}).$$

Nun ist $\omega(0; \alpha; k) = 1$ und

$$\omega\left(\pi - \alpha; \alpha; \frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{6}(\pi - \alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha} \geqq \frac{1}{6}.$$

Hieraus folgt (70. 1).

2. Durch elementare Umformung erhält man:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \xi\cos\alpha - \sin\xi\cos u + 2\sin^2 u\sin\alpha\\ &= \sin^2\alpha(1+\cos^2\xi)\\ &\quad + \sin^2\alpha\cos\alpha(\xi + 3\sin\xi\cos\xi)\\ &\quad + \sin\alpha\cos^2\alpha\cdot 3\sin^2\xi\\ &\quad + \cos^3\alpha(\xi - \sin\xi\cos\xi).\end{aligned} \tag{73}$$

a) Für $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ gilt (45. d), also ist

$$\begin{aligned}\psi_2 &\leqq \sin^3\alpha\cdot 2 + \sin^2\alpha\cos\alpha\cdot 6\xi + \sin\alpha\cos^2\alpha\cdot 6\xi^2 + \cos^3\alpha\cdot 2\xi^3\\ &= 2(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^3.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$D_2 \leqq 2.$$

b) Für $0 \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{2}$ gilt (46. a) und es ist

$$\sin\xi \geqq \frac{2}{\pi}\xi \geqq \frac{1}{3}\xi.$$

Damit erhält man aus (73)

$$\psi_2 \geqq (\sin\alpha + \tfrac{1}{3}\xi\cos\alpha)^3 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{2},$$

also

$$D_2 \geqq \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}.$$

c) Aus $\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi} = 2\sin(u+\alpha)\sin u$ ergibt sich, daß ψ_2 von $u = \frac{\pi}{2}$ bis $u = \pi - \alpha$ wächst und von $u = \pi - \alpha$ bis $u = \pi$ wieder abnimmt. Also ist im Bereich $\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \pi$

$$D_2 \geqq \frac{1}{(\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha)^3}\min\left(\psi_2|_{u=\frac{\pi}{2}};\ \psi_2|_{u=\pi}\right).$$

Nun ist

$$\frac{\psi_2|_{u=\pi}}{(\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha)^3} = \frac{1}{(\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha)^2} \geqq \frac{1}{\pi^2} > \frac{1}{27}$$

und

$$\frac{\psi_2|_{u=\frac{\pi}{2}}}{(\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha)^3} = \frac{2\sin\alpha + \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha}{(\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha)^3} \geqq \frac{1}{2\pi^2} > \frac{1}{27},$$

denn die Ableitung von $\frac{2\sin\alpha + \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha}{(\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha)^3}$ nach α ist nicht negativ und für $\alpha = 0$ hat der Ausdruck den Wert $\frac{1}{2\pi^2}$.

3. Da

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \sin\alpha + \xi\cos\alpha + \sin u\\ &= \sin\alpha(1+\cos\xi) + (\xi + \sin\xi)\cos\alpha\end{aligned}$$

ist, so ist

$$\sin\alpha + \xi\cos\alpha \leqq \psi_3 \leqq 2\sin\alpha + 2\xi\cos\alpha,$$

das heißt

$$1 \leqq D_3 \leqq 2.$$

4.

$$\psi_4 = \sin\alpha(1-\cos\xi) + \cos\alpha(\xi - \sin\xi)$$
$$= (1-\cos\xi)\left(\sin\alpha + \cos\alpha\,\frac{\xi-\sin\xi}{1-\cos\xi}\right).$$

Verwendet man die Ungleichung (45. a), so erhält man

$$(1-\cos\xi)(\sin\alpha + \tfrac{1}{3}\xi\cos\alpha) \leqq \psi_4 \leqq (1-\cos\xi)(\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\xi\cos\alpha),$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha + \frac{1}{3}\xi\cos\alpha}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha} \leqq D_4 \leqq \frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha + \frac{1}{2}\xi\cos\alpha}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha}, \tag{74}$$

also

$$\tfrac{1}{6} \leqq D_4 \leqq \tfrac{1}{2}.$$

5.

$$\psi_5 = \cos\alpha - \cos u = 2\sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right)\sin\frac{\xi}{2};$$

$$D_5 = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right)}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha}. \tag{75}$$

Nun ist nach (48)

$$\frac{\partial}{\partial\xi} D_5 = \frac{1}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^2}\left\{-\sin\frac{\xi}{2} - \cos\alpha\left(\sin\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right) - \xi\cos\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right)\right)\right\}\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^2}\left\{-\left(\sin\frac{\xi}{2} - \frac{\xi}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right)\cos\alpha\right)\right.$$
$$\left. - \cos\alpha\left(\sin\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right) - \frac{\xi}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right)\right)\right\} \leqq 0.$$

Ferner ist

$$\lim_{\xi\to 0} D_5 = 1 \quad \text{und} \quad (D_5)_{\xi=\pi-\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha} = \Phi(\alpha).$$

$$\Phi'(\alpha) = \frac{1}{(\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha)^2}\left(\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin\alpha\left((\pi-\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right) \geqq 0.$$

Also $1 \geqq D_5 \geqq \Phi(\alpha) \geqq \Phi(0) = \frac{1}{\pi}$.

6.

$$\psi_5 = \sin^2\alpha\sin\xi + \sin\alpha\cos\alpha\cdot\xi\sin\xi + \cos^2\alpha(\sin\xi - \xi\cos\xi);$$

Nach (45. c) ist einerseits

$$\frac{\psi_5}{2\sin\frac{\xi}{2}} \geqq \sin^2\alpha\cos^2\frac{\xi}{2} + 2\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$+ \cos^2\alpha\sin^2\frac{\xi}{2} = \sin^2\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right),$$

andererseits

$$\frac{\psi_5}{2\sin\frac{\xi}{2}} \leqq \sin^2\alpha\cos\frac{\xi}{2} + \xi\cos\frac{\xi}{2}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{3}\xi^2\cos^2\alpha$$
$$\leqq (\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^3,$$

also ist

$$\frac{\sin^2\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right)}{(\sin\alpha+\xi\cos\alpha)^2} \leqq D_5 \leqq 1.$$

Benützt man (75) und (70.6), so erhält man die Behauptung (70.5).

7.

$$D_7 = 1 - \frac{y - \log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos u} \leqq 1.$$

Nach Ungleichung (44 a) und (74) ist

$$\frac{y - \log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos u} \leqq \frac{\psi_4}{\psi_3}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos u}$$

$$= \cos\alpha\,\frac{D_4}{D_3}\,\frac{4\sin^2\frac{\xi}{2}}{\cos\alpha-\cos u} \leqq \cos\alpha\,\frac{1}{D_3}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha+\frac{\xi}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha+\xi\cos\alpha} \tag{76}$$

$$\cdot\,\frac{2\sin\frac{\xi}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right)} = G.$$

Nun ist

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\sin\alpha+\frac{\xi}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha+\xi\cos\alpha}\,\frac{2\sin\frac{\xi}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{(\sin\alpha+\xi\cos\alpha)^2\sin^2\left(\alpha+\frac{\xi}{2}\right)}\left\{\sin^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha\left(\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\sin\xi\right)\right.$$
$$\left. + \sin\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{\xi^2}{2} - \sin^2\frac{\xi}{2}\right)\right\} \geqq 0.$$

Nach oben (69) ist D_3 monoton abnehmend; also ist G eine wachsende Funktion von ξ; daher ist

$$\frac{y - \log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos u} \leqq G \leqq (G)_{\xi=\pi-\alpha}$$

$$= \cos\alpha\,\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha+\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha+(\pi-\alpha)\cos\alpha}\,2 = \Phi(\alpha).$$

Nun ist $\dfrac{\sin\alpha+\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha+(\pi-\alpha)\cos\alpha}$ eine monoton wachsende Funktion von α

für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$. Also ist

$$\text{für } 0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{4}: \quad \Phi(\alpha) \leqq \left(\frac{\sin\alpha + \frac{\pi-\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha} \right)_{\alpha=\frac{\pi}{4}} < 0{,}65$$

$$\text{für } \frac{\pi}{4} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}: \quad \Phi(\alpha) \leqq \cos\alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} < 0{,}71.$$

Daraus folgt

$$0 \leqq \frac{y - \log(\sqrt{1+y^2}+y)}{y} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos u} \leqq 0{,}71.$$

$$\tfrac{1}{4} < D_7 \leqq 1.$$

§ 9.

Die Integrale $\int_0^\infty e^{-\eta^2} A_1 \, d\eta$ und $\int_0^\infty e^{-\eta^2} A_3 \, d\eta$.

Es soll zunächst der Wert η_1, den η für $\xi = \frac{\alpha}{2}$ bzw. $u = \frac{3}{2}\alpha$ annimmt, abgeschätzt werden. Nach (17) ist

(77a) $$\eta_1^2 = \lambda F(\tfrac{3}{2}\alpha),$$

und nach (32) ist

(77b) $$F(u) = \frac{y\,\psi_6}{\cos\alpha}\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos u} \cdot \frac{y - \log(\sqrt{1+y^2}+y)}{y}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\psi_3\,\psi_4}\,\psi_6\,D_7}{\sin u \cos\alpha}.$$

a) Nach (76) und (69.3) ist

$$D_7 \geqq 1 - \cos\alpha \, \frac{1}{2} \, \frac{\sin\alpha + {}^1/_2\,\xi\cos\alpha}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha + \sin u} \cdot \frac{2\sin\frac{\xi}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right)}.$$

Man erhält daraus, wenn man beachtet, daß für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\sin\frac{\alpha}{4} \leqq \frac{3}{10}\,\alpha\cos\frac{\alpha}{4}$$

ist, die Abschätzung:

$$(D_7)_{\xi=\frac{\alpha}{2}} \geqq 1 - \frac{\cos\alpha\left(\sin\alpha + \frac{\alpha}{4}\cos\alpha\right)\sin\frac{\alpha}{4}}{\left(\sin\alpha + \sin\frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)\sin\frac{5}{4}\alpha}$$
$$\geqq 1 - \frac{\cos\alpha\left(\frac{3}{10}\,\alpha\cos\frac{\alpha}{4}\sin\alpha + \frac{\alpha}{4}\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{\left(\sin\alpha + \sin\frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)\sin\frac{5}{4}\alpha}$$

$$\geqq 1 - \frac{\frac{3}{10}\,\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \sin\frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2}\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin\frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{5}\cos\alpha}{\sin\alpha + \sin\frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$$

$$\geqq \frac{1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{9}{10}.$$

b) Für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ ist

$$\frac{\sin\frac{5}{4}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} \geqq \frac{5}{6};\quad \sin\alpha \geqq \alpha\cos\alpha;\quad \sin^2\frac{\alpha}{4} \geqq \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 \frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\left(\frac{\pi}{8}\right)^2} \geqq 0{,}89\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2.$$

Bei Verwendung dieser Ungleichungen erhalten wir

$$\left(\frac{\sqrt{\psi_3\,\psi_4\,\psi_6}}{\sin u\cos\alpha}\right)_{\xi=\frac{\alpha}{2}}$$

$$\geqq \left[\frac{\sqrt{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^{1/2}(\sin\alpha + {}^1/_2\,\xi\cos\alpha)}\;8\sin^2\frac{\xi}{2}\sin\left(\alpha + \frac{\xi}{2}\right)}{\sin u\cos\alpha}\right]_{\xi=\frac{\alpha}{2}}$$

$$\geqq 4\sqrt{2}\,\frac{\left(\sin\alpha + \frac{\alpha}{4}\cos\alpha\right)\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin\frac{5}{4}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha\cos\alpha}$$

$$\geqq 4\sqrt{2}\,\frac{5}{6}\,\frac{\alpha^2\,0{,}89}{16}\,\frac{5\alpha}{4} \geqq 0{,}33\,\alpha^3.$$

Setzen wir die unter a) und b) erhaltenen Ungleichungen in (77 a) und (77 b) ein, so erhalten wir

$$\eta_1^2 \geqq \lambda\,\alpha^3\,0{,}29.$$

Verwenden wir noch (42) und (43) und setzen wir z. B. $\lambda_0 = 5$, so erhalten wir

$$\eta_1^2 \geqq 0{,}29\,\frac{\alpha_0^3\,\lambda_0}{2} > 0{,}88. \tag{78}$$

Wir formen nun A_1 und A_3 mit Hilfe der Funktionen D_ν von (69) um.

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{F^{1/2}(u)}{F'(u)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\sin^2 u\cos\alpha\,\sqrt{\psi_3\,\psi_4}}{\psi_1\,\psi_2}\left(y\left(\frac{\psi_6}{\cos\alpha} - \frac{y - \log\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)}{y}\right)\right)^{1/2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\sin^{3/2}u\cos^{1/2}\alpha\,(\psi_3\,\psi_4)^{3/4}\,\psi_6^{1/2}\,D_7^{1/2}}{\psi_1\,\psi_2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\cos^{1/2}\alpha\sin^{3/2}u}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^2}\,\frac{D_3^{3/4}\,D_4^{3/4}\,D_6^{1/2}\,D_7^{1/2}}{D_1\,D_2}.$$

$$A_2 = \frac{+2}{\sqrt{\lambda}} \frac{F^{1/4}(u)\ v_2'(u)}{F'(u)} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\cos^{1/2}\alpha \sin^{1/2} u\,(\psi_3\,\psi_4)^{1/4}\,\psi_6^{1/2}\,(-\psi_5)\,D_7^{1/2}}{\psi_1\,\psi_2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\cos^{1/2}\alpha \sin^{1/2} u}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha} \frac{D_3^{1/4} D_4^{1/4} D_6^{1/2} D_5 D_7^{1/2}}{D_1 D_2}.$$

Setzen wir

$$\frac{2\,D_3^{3/4} D_4^{3/4} D_6^{1/2} D_7^{1/2}}{D_1 D_2} = D_8(\alpha;\xi), \qquad \frac{2\,D_3^{1/4} D_4^{1/4} D_6^{1/2} D_7^{1/2}}{D_1 D_2} = D_9(\alpha;\xi),$$

so läßt sich aus den Ungleichungen (70) schließen, daß es zwei positive Zahlen d_0 und d_1 gibt, so daß für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \xi \leqq \pi - \alpha$

(79)
$$0 < d_0 \leqq D_8(\alpha;\xi) \leqq d_1 \quad \text{und}$$
$$0 < d_0 \leqq D_9(\alpha;\xi) \leqq d_1 \quad \text{ist.}$$

Es ist

(80)
$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos^{1/2}\alpha \frac{\sin^{3/2} u}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^2} D_8(\alpha;\xi)$$
$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos^{1/2}\alpha \frac{\sin^{1/2} u}{\sin\alpha + \xi\cos\alpha} D_9(\alpha;\xi).$$

Es ist nun noch die Funktion $\frac{\sin^\sigma u}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^{\sigma+1/2}}$ für $\sigma = \frac{1}{2}$ und $\sigma = \frac{3}{2}$ zu betrachten. Für wachsendes ξ nimmt diese Funktion ab, wie man leicht durch Differentiation erhält. Also ist

(81) a)
$$\frac{\sin^\sigma u}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^{\sigma+1/2}} \leqq \left(\frac{\sin^\sigma u}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^{\sigma+1/2}}\right)_{\xi=0} = \frac{1}{\sin^{1/2}\alpha}.$$

b) Für $0 \leqq \xi \leqq \frac{\alpha}{2}$

(82)
$$\frac{\sin^\sigma u}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^{\sigma+1/2}} \geqq \left[\frac{\sin^\sigma u}{(\sin\alpha + \xi\cos\alpha)^{\sigma+1/2}}\right]_{\xi=\frac{\alpha}{2}}$$
$$= \frac{\sin^\sigma \frac{3\alpha}{2}}{\left(\sin\alpha + \frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)^{\sigma+1/2}} \geqq \frac{\sin^\sigma \frac{3\alpha}{2}}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^{\sigma+1/2}}$$
$$\geqq \frac{\sin^\sigma\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}{\left(3\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{\sigma+1/2}} \geqq \frac{1}{3^{\sigma+1/2}}\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^\sigma \frac{1}{\sin^{1/2}\frac{\alpha}{2}}$$
$$\geqq \frac{1}{3^{\sigma+1/2}} \frac{1}{\sin^{1/2}\frac{\alpha}{2}} \geqq \frac{1}{9} \frac{1}{\sin^{1/2}\alpha}.$$

Aus (79), (80) und (81) folgt

$$\int_0^\infty A_1 e^{-\eta^2} d\eta \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha\, d_1 \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha\, d_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^\infty A_3 e^{-\eta^2} d\eta \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha\, d_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Aus (79), (80), (82) und (78) folgt

$$\int_0^\infty A_1 e^{-\eta^2} d\eta > \int_0^{\eta_1} A_1 e^{-\eta^2} d\eta \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \frac{d_0}{9} \int_0^{\eta_1} e^{-\eta^2} d\eta$$

$$\geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \frac{d_0}{9} \int_0^{0{,}88} e^{-\eta^2} d\eta \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \frac{d_0}{9} 0{,}786 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und

$$\int_0^\infty A_3 e^{-\eta^2} d\eta \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \frac{d_0}{9} 0{,}786 \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

denn $E_2(0{,}88) = 0{,}78669$.

Zusammenfassung. Die in der Darstellung (16) der Besselschen Funktion

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \cos\lambda b \left(\int_0^\infty A_1 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^\infty A_2 e^{-\eta^2} d\eta \right) + \frac{1}{\pi} \sin\lambda b \left(\int_0^\infty A_3 e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^\infty A_4 e^{-\eta^2} d\eta \right) \tag{82}$$

vorkommenden Integrale lassen sich in der Form

$$\int_0^\infty A_\nu e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \; \Psi_\nu(\alpha; \lambda)$$

schreiben und es existieren zwei positive Zahlen c und $\bar{c}$, so daß gleichmäßig für $\lambda \geqq \lambda_0$ und $x \geqq x_1(\lambda)$

$$0 < c \leqq \Psi_\nu(\alpha; \lambda) \leqq \bar{c} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

ist. Setzt man dies Ergebnis in (82) ein, so erhält man Satz 1.

§ 10.

Das Verhalten der Besselschen Funktion längs der Wellenberge und -täler.

Nach (37) sind die Wellenberge charakterisiert durch

$$2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi(n-1) + \pi.$$

Ersetzt man darin $\frac{\lambda}{\cos\alpha}$ durch x nach (2), so gilt

$$2\pi(n-1)-\frac{\pi}{2}<x(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)<2\pi(n-1)+\pi.$$

Nach (46. b) ist

$$\tfrac{1}{4}\alpha^3\leqq\sin\alpha-\alpha\cos\alpha\leqq\tfrac{1}{3}\alpha^3.$$

Setzt man dies in die Ungleichung für den n-ten Wellenberg ein, so wird daraus

$$3\left(2\pi(n-1)-\frac{\pi}{2}\right)<\alpha^3 x<4\,(2\pi(n-1)+\pi)\quad(n=2,3,\ldots).$$

Analog erhält man für das n-te Wellental

$$3\left(2\pi(n-1)+\frac{\pi}{2}\right)<\alpha^3 x<4\cdot 2\pi n\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$n\,6\pi\left(1-\frac{5}{4n}\right)<\alpha^3 x<n\,8\pi\left(1-\frac{1}{2n}\right)\qquad(n=2,3,\ldots)$$

bzw.

$$n\,6\pi\left(1-\frac{3}{4n}\right)<\alpha^3 x<n\,8\pi\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Daraus folgt, daß es zwei positive, von n unabhängige Zahlen γ_1 und γ_2 gibt, so daß im Gebiet des n-ten Wellenbergs und des n-ten Wellentals

$$\gamma_1\left(\frac{x}{n}\right)^{1/3}\leqq\frac{1}{\sin\alpha}\leqq\gamma_2\left(\frac{x}{n}\right)^{1/3}\tag{83}$$

ist. Da allgemein $|\cos\lambda b|+|\sin\lambda b|<2$ ist, so erhält man aus (A) und (B) (Satz 1):

$$|J_\lambda(x)\leqq\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{ctg}^{1/2}\alpha\cdot 2k_2=\frac{2k_2}{(x\sin\alpha)^{1/2}}.\tag{84}$$

Wenden wir die im Bereich der n-ten Welle, d. h. für

$$2\pi(n-1)-\frac{\pi}{2}\leqq x(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\leqq 2\pi n$$

geltende Gleichung (83) zur Umformung von (84) an, so erhalten wir für diesen Bereich

$$|J_\lambda(x)|<k'\frac{1}{x^{1/3}n^{1/6}}.$$

Andererseits ist im Bereich

$$2\pi(n-1)\leqq\lambda(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)\leqq 2\pi(n-1)+\frac{\pi}{2}\qquad(n=2,3,\ldots)$$

$$\cos[\lambda(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)]+\sin[\lambda(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)]\geqq 1,$$

also erhält man für diesen Bereich aus (A), (B) und (83)

$$J_\lambda(x) \geqq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha \cdot k_1 = \frac{k_1}{(x \sin\alpha)^{1/2}} > \frac{k_1'}{x^{1/3} n^{1/6}}.$$

Analog erhält man für die Bereiche

$$2\pi(n-1) + \pi \leqq \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) \leqq 2\pi(n-1) + \frac{3\pi}{2}$$

aus der Beziehung

$$\cos[\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)] + \sin[\lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)] < -1$$

die Ungleichung

$$J_\lambda(x) \leqq -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{ctg}^{1/2}\alpha\, k_1 < \frac{-k_1'}{x^{1/3} n^{1/6}}.$$

Damit ist Satz 3, (F_1) und (G) für $\nu = 3$ bewiesen.

Kapitel IV.

§ 11.

Verlauf und Breite der durch $z = J_\lambda(x)$ definierten Wellen.

I. Aus der für die Wellenberge geltenden Ungleichung

$$2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2} < \lambda(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) < 2\pi(n-1) + \pi$$

und aus $x = \frac{\lambda}{\cos\alpha}$ folgt, daß die durch die Gleichungen

$$x = \frac{2\pi(n-1) + \frac{\pi}{4}}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}, \quad \lambda = \frac{2\pi(n-1) + \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

in Parameterform gegebene Kurve ungefähr, und zwar mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{3}{8}$ der Wellenbreite ist, mit der Gipfellinie der n-ten Welle zusammenfällt. Mit der gleichen Fehlergrenze geben die Gleichungen

$$x = \frac{2\pi(n-1) + \frac{5\pi}{4}}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}, \quad \lambda = \frac{2\pi(n-1) + \frac{5\pi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}$$

den Verlauf der n-ten Tallinie wieder.

Satz 2b besagt, daß die durch die Gleichungen

$$x = \frac{\pi(\nu - 1/4)}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}; \quad \lambda = \frac{\pi(\nu - 1/4)}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

dargestellte Kurve $\mathfrak{Z}_\nu$ für $\nu = 2n-1$ die zwischen dem n-ten Wellenberg und dem n-ten Wellental liegende(n) Kurve(n) der Gleichung

$J_\lambda(x) = 0$ (ob es es nur eine oder mehrere solche Kurven gibt, kann mit unseren Abschätzungen nicht entschieden werden) und für $\nu = 2n$ die zwischen dem n-ten Wellental und $(n+1)$-ten Wellenberg liegende(n) Kurve(n) von $J_\lambda(x) = 0$ annähernd darstellt. $\mathfrak{Z}_\nu$ entfernt sich von den zugehörigen 0-Kurven von $J_\lambda(x)$ jeweils um weniger als $\frac{1}{8}$ der Wellenbreite.

Der Verlauf der Wellen wird also durch Kurven $\mathfrak{Z}(C)$ repräsentiert, die von der Form

$$x(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) = C,\ \lambda = x\cos\alpha$$

sind. Differenziert man beide Gleichungen nach x, so erhält man

$$\sin\alpha - \alpha\cos\alpha + x\,\alpha\sin\alpha\frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = \cos\alpha - \sin\alpha\, x\,\frac{d\alpha}{dx}.$$

Daraus erhält man

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2}}{\arccos\left(\frac{\lambda}{x}\right)} \qquad \left(0 < \arccos\left(\frac{\lambda}{x}\right) < \frac{\pi}{2}\right). \tag{85}$$

Man sieht daraus, daß für kleines λ, also $\alpha \sim \frac{\pi}{2}$, der Richtungskoeffizient einer Welle $\frac{2}{\pi}$ beträgt und dann für $x \to \infty$, $\lambda \to \infty$, also für $\alpha \to 0$, anwächst gegen 1; außerdem wird eine Gerade $\frac{\lambda}{x} = \text{const}$ von allen Wellen unter dem gleichen Winkel geschnitten.

Aus (85) folgt für die Kurve $\mathfrak{Z}(C)$

$$1 \leqq \frac{dx}{d\lambda} \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Integriert man diese Ungleichung nach λ von 0 bis λ und beachtet man, daß $\lim\limits_{\lambda \to 0} x = C$ ist, so erhält man für die Punkte $(x;\lambda)$ von $\mathfrak{Z}(C)$

$$C + \lambda \leqq x \leqq C + \frac{\pi}{2}\lambda.$$

Damit ist (L) *und* (M) *bewiesen.*

Setzt man $C_1 = 2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2}$ und $C_2 = 2\pi n$ in (M) ein, so sieht man, daß es eine positive Zahl c gibt, so daß im Bereich der n-ten Welle $c(n+\lambda) < x < 2\pi(n+\lambda)$ ist. Mit Hilfe dieser Ungleichung *läßt sich* (F_1) *in* (F_2) *umwandeln und ergibt sich* (G) *für* $\nu = 4$.

II. Um einen Ausdruck für die *Wellenbreite* zu erhalten, setzen wir fest, daß wir von zwei Kurven $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ dann sagen wollen,

daß sie genau um eine Welle auseinander liegen, wenn ihre Gleichungen die Form haben:

$$\mathfrak{Z}'\begin{cases} x = \dfrac{C}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha} \\ \lambda = \dfrac{C}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha} \end{cases} \qquad \mathfrak{Z}''\begin{cases} x = \dfrac{C+2\pi}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha} \\ \lambda = \dfrac{C+2\pi}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha} \end{cases}.$$

Wir wählen einen beliebigen Punkt (x_1, λ_1) auf $\mathfrak{Z}'$ (Fig. 1). α_1 und C_1 seien die zugehörigen α- und C-Werte, also

$$x_1(\sin\alpha_1 - \alpha_1\cos\alpha_1) = C_1, \quad \lambda_1 = \cos\alpha_1 x_1.$$

a) Legen wir nun die Gerade $\lambda = \lambda_1$ durch $(x_1; \lambda_1)$, so sind längs dieser Geraden x und α als Funktionen von C definiert durch

$$x(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) = C, \quad \lambda_1 = \cos\alpha\, x.$$

Differenziert man beide Gleichungen nach C und eliminiert $\frac{d\alpha}{dC}$, so erhält man

$$\frac{dx}{dC} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Wenn wir die auf der Geraden $\lambda = \lambda_1$ durch die beiden Wellenkurven $C = C_1$ und $C = C_1 + 2\pi$, also durch $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$, ausgeschnittene Strecke mit Δx bezeichnen, so ist

$$(86) \quad \Delta x = \int_{C_1}^{C_1+2\pi} \frac{dx}{dC}\, dC = \int_{C_1}^{C_1+2\pi} \frac{dC}{\sin\alpha} = \frac{2\pi}{\sin\bar{\alpha}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_1}{\bar{x}}\right)^2}};$$

dabei ist $x_1 < \bar{x} < x_1 + \Delta x$ und $\bar{\alpha} = \arccos\frac{\lambda_1}{\bar{x}}$. Δx ist die Wellenbreite in der x-Richtung gemessen.

Man ersieht aus (86), daß die asymptotische Formel

$$J_\lambda(x) = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\sin(x + \delta_\lambda)$$

(Courant-Hilbert a. a. O. S. 288) nur für $x \gg \lambda$ gilt.

b) Legen wir durch $(x_1; \lambda_1)$ die Gerade $x = x_1$, so sind längs dieser Geraden λ und α als Funktionen von C definiert durch die Gleichungen

$$x_1(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) = C, \quad \lambda = \cos\alpha \cdot x_1.$$

Differenziert man beide Gleichungen nach C und eliminiert $\frac{d\alpha}{dC}$, so erhält man

$$\frac{d\lambda}{dC} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Wenn wir die auf der Geraden $x = x_1$ von den beiden um eine Welle auseinanderliegenden Kurven $C = C_1$ und $C = C_1 + 2\pi$ (also $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$) ausgeschnittene Strecke mit $|\Delta\lambda|$ bezeichnen, so ist

$$(87) \qquad |\Delta\lambda| = \left| \int_{C_1}^{C_1+2\pi} \frac{d\lambda}{dC}\, dC \right| = \frac{2\pi}{\bar{\alpha}} = \frac{2\pi}{\arccos \frac{\bar{\lambda}}{x_1}};$$

dabei ist $\lambda_1 > \bar{\lambda} > \lambda_1 - |\Delta\lambda|$.

c) Die Wellen sind nur schwach gekrümmt[6]). Sind x und λ nicht zu klein, so können wir sie in dem Dreieck $(x_1; \lambda_1)$; $(x_1 + \Delta x; \lambda_1)$; $(x_1; \lambda_1 - |\Delta\lambda|)$ als geradlinig auffassen und die senkrecht zu den Wellen gemessene Wellenbreite b der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten Δx und $|\Delta\lambda|$ gleichsetzen. Dann erhält man aus (86) und (87):

$$b = \frac{\Delta x\, |\Delta\lambda|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta\lambda)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \sin^2 \bar{\alpha}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\bar{x}}\right)^2 + \arccos^2 \frac{\bar{\lambda}}{x_1}}}.$$

Damit ist die Bemerkung zu Satz 2 bewiesen.

Literaturverzeichnis.

[1]—[3] Courant-Hilbert
Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I. Berlin 1931. [1] S. 453—460; [2] S. 407 ff.; [3] S. 455 f.

[4] Debye
Näherungsformeln für Zylinderfunktionen, Mathem. Annalen **67** (1909), S. 535–558.

[5]–[7] Jahnke-Emde
Tafeln höherer Funktionen, Leipzig 1948. [5] S. 125, Fig. 66; [6] S. 152, Fig. 81; [7] S. 136—146.

[8] Lense
Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, Berlin 1947, S. 116.

[9] [10] Magnus-Oberhettinger
Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin 1943. [9] S. 22—25; [10] S. 24.

[11] [12] Sommerfeld
Partielle Differentialgleichungen der Physik, Leipzig 1947. [11] S. 90 ff.; [12] S. 100 und S. 119—121.

[13]–[15] Watson
A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922.
[13] S. 225—261; [14] S. 235—241; [15] S. 235 ff.

(Eingegangen am 23. Januar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 3, S. 254—261 (1951).

Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn.

Von

Walter Neumer in Mainz.

Vorbemerkung.

Alexandroff und Urysohn haben folgenden Satz bewiesen[1]): Ist für jede Ordnungszahl σ der zweiten Zahlenklasse eine Ordnungszahl $\varepsilon(\sigma) < \sigma$ definiert, so gibt es unabzählbar viele σ, für welche die $\varepsilon(\sigma)$ untereinander gleich sind. Diesen Satz hat Ben Dushnik aufs neue bewiesen und zugleich verallgemeinert in folgender Form[2]): Ist jeder Ordnungszahl $\alpha < \omega_{\nu+1}\,(\alpha > 0)$ eine Ordnungszahl $\mu(\alpha)$ zugeordnet, so daß $\mu(\alpha) < \alpha$, dann gibt es $\aleph_{\nu+1}$ Zahlen $\alpha < \omega_{\nu+1}$, deren zugeordnete Werte $\mu(\alpha)$ alle einander gleich sind. — Im folgenden soll auch dieser Satz, und zwar endgültig, verallgemeinert werden, indem nur vorausgesetzt wird, daß die Funktion $f(\alpha) < \alpha$ in einer gewissen Teilmenge M der Menge $W(\Lambda)$ aller Zahlen unterhalb der regulären Zahl $\Lambda > \omega$ definiert ist; dabei soll M mit $W(\Lambda)$ ähnlich sein und es soll nicht möglich sein, im Komplement $W(\Lambda) - M$ eine mit $W(\Lambda)$ ähnliche abgeschlossene Teilmenge zu finden. Dann gibt es wieder eine mit $W(\Lambda)$ ähnliche Teilmenge von M, deren sämtlichen Zahlen α dasselbe $f(\alpha)$ entspricht (Satz 2). — Anschließend folgen einige Sätze über abgeschlossene Teilmengen von $W(\Lambda)$ (§ 2), und zum Schluß wird gezeigt, daß die Methode von Ben Dushnik noch auf den Sonderfall ausgedehnt werden kann, wo M eine mit $W(\Lambda)$ ähnliche abgeschlossene Teilmenge enthält (§ 3).

§ 1.

Der allgemeine Fall.

1. Zunächst mögen einige Definitionen zusammengestellt werden. Sind α und β zwei Ordnungszahlen, wo $\alpha < \beta$, so bedeute $W(\alpha, \beta)$ die Menge aller Zahlen ξ, für die $\alpha \leqq \xi < \beta$ gilt. Für $W(0, \beta)$ schreiben wir $W(\beta)$. $W(\alpha, \alpha)$ soll die Nullmenge sein. Mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen wir die zu α gehörige Kardinalzahl (also die Mächtigkeit von $W(\alpha)$) und mit $\overline{M}$ resp. $\overline{\overline{M}}$ den Ordnungstypus resp. die Mächtigkeit der (wohl-) geordneten resp. beliebigen Menge M.

[1]) Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verh. Akad. Wiss. Amsterdam (1), **45**, Nr. 1, 1—96.

[2]) A note on transfinite ordinals. Bull. Amer. Soc. **37** (1931) 860—862.

Ist Λ eine Anfangszahl $> \omega$, so heiße eine mit $W(\Lambda)$ ähnliche Teilmenge M von $W(\Lambda)$ ein *Vollteil* von $W(\Lambda)$. Ist auch das Komplement $M^* = W(\Lambda) - M$ ein Vollteil, so heiße M (ebenso M^*) eine *Hälfte* von $W(\Lambda)$. Eine Teilmenge M von $W(\Lambda)$ nennen wir (*in* $W(\Lambda)$) *abgeschlossen*, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $< \Lambda$ ist. Ein abgeschlossener Vollteil $M = \{\alpha_\nu\}_{\nu < \Lambda}$[3]) von $W(\Lambda)$ heiße ein *Band* von $W(\Lambda)$; dann ist also $\lim\limits_{\nu < \lambda} \alpha_\nu = \alpha_\lambda$ für jede Limeszahl $\lambda < \Lambda$, d. h. α_ν ist eine Normalfunktion von ν für $\nu < \Lambda$. Einen Vollteil von $W(\Lambda)$ nennen wir *zerrissen*, wenn er kein Band enthält; $W(\Lambda)$ heiße *zerreißbar*, wenn es in zwei zerrissene disjunkte Hälften zerlegt werden kann. — Diese Definitionen lassen sich sinngemäß auf beliebige wohlgeordnete Mengen übertragen.

2. Für nachherigen Gebrauch diene folgende Bemerkung. Es sei Λ eine reguläre Limeszahl und es werde in einem Vollteil M von $W(\Lambda)$ eine Funktion $f(\alpha)$ $(\alpha \in M)$ definiert, deren Werte $\beta = f(\alpha)$ wir der Einfachheit halber wieder Ordnungszahlen sein lassen (was andernfalls durch Wohlordnung der Bildmenge $f(M)$ und Ersetzung von $f(M)$ durch eine ähnliche Menge von Ordnungszahlen zu erreichen ist). Mit $F(\beta)$ bzw. $F(C)$ bezeichnen wir das Urbild von β bzw. einer Teilmenge C von M; $B = f(M)$ sei die Bildmenge von M. Dann gilt: *Unter der Voraussetzung, daß* $\overline{F(\beta)} < \Lambda$ *für alle* $\beta \in B$ *ist, besteht die Beziehung*

$$\overline{F(C)} < \Lambda \text{ für } C \leqq B,\ \overline{C} < \Lambda. \tag{1}$$

Zum Beweis setzen wir $\overline{C} = \sigma$ und $\overline{F(\beta)} = \varphi(\beta)$, $\overline{F(C)} = \varphi(C)$. Ferner sei $C = \{\beta_\nu\}_{\nu < \sigma}$. Dann wird $F(C) = \bigcup\limits_{\beta \in C} F(\beta) = \bigcup\limits_{\nu < \sigma} F(\beta_\nu)$, und da wegen der Regularität von Λ $\operatorname{fin}\limits_{\nu < \sigma} \varphi(\beta_\nu) = \mu < \Lambda$ bleibt, so wird $\overline{\varphi(C)} = \sum\limits_{\nu < \sigma} \overline{\varphi(\beta_\nu)} \leqq \sum\limits_{\nu < \sigma} \bar{\mu} = \bar{\sigma}\,\bar{\mu} < \Lambda$, also $\varphi(C) < \Lambda$.

Aus (1) folgt:

$$\overline{f(L)} = \Lambda \text{ für } L \leqq M,\ \overline{L} = \Lambda, \tag{2}$$

also insbesondere $\overline{B} = \overline{f(M)} = \Lambda$. Denn sonst wäre nach (1) wegen $L \leqq F(f(L)) : \overline{L} \leqq \overline{F(f(L))} < \Lambda$.

Wenn andererseits für einen Vollteil L *von* M $\overline{f(L)} < \Lambda$ *gilt, so muß es ein* $\beta \in B$ *geben mit* $\overline{F(\beta)} = \Lambda$.

3. Wir beweisen nun den

Satz 1. *Sei* Λ *eine reguläre Zahl* $> \omega$ *und* M *ein Vollteil von* $W(\Lambda)$, *dessen Komplement* $M^* = W(\Lambda) - M$ *kein Band von* $W(\Lambda)$ *enthält. Wird dann in* M *eine transfinite Funktion* $f(\alpha)$ $(\alpha \in M)$ *definiert,*

[3]) Es soll $\alpha_\nu < \alpha_{\nu'}$ für $\nu < \nu'$ sein.

die keinen ihrer Werte $\overline{A}$-mal annimmt, so gibt es oberhalb jeder Zahl aus $W(A)$ noch Argumente $\alpha \in M$ mit $f(\alpha) \geqq \alpha$.

Beweis. Wir schreiben M in der Form

$$M = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots\}_{\nu < A}, \text{ wobei } \alpha_\nu < \alpha_{\nu'} \text{ für } \nu < \nu'. \tag{3}$$

Im übrigen benützen wir dieselben Bezeichnungen wie in **2**. Darüber hinaus erklären wir noch die Menge $F^*(\beta)$ als die der Größe nach wohlgeordnete Menge aller Indizes ν, welche bei den Zahlen $\alpha_\nu \in F(\beta)$ auftreten. Die entsprechende Bedeutung soll $F^*(C)$ hinsichtlich $F(C)$ haben. Auf Grund von (1) gilt

$$\varphi(C) = \overline{F(C)} = \overline{F^*(C)} < A \text{ für } C < B, \overline{C} < A. \tag{4}$$

Wir können ferner voraussetzen, daß $f(\alpha) < A$ sei für $\alpha \in M$. Ist nämlich $\overline{B - W(A)} = \overline{A}$, so wird der Satz trivial; liegen aber weniger als $\overline{A}$ Elemente von B außerhalb $W(A)$, so enthält nach (1) auch ihre Urbildmenge weniger als $\overline{A}$ Elemente und kann aus M weggelassen werden. Unter der neuen Voraussetzung ist dann $\overline{B} = A$.

B_ν bezeichne für den Augenblick die Menge aller $\beta \in B$, für die $\beta \leqq f(\alpha_\nu)$ ist. Dann wird $\overline{B_\nu} < A$ und nach (1) $\varphi(B_\nu) < A$. Mit $h(\nu)$ bezeichnen wir die erste Zahl, die alle Zahlen aus $F^*(B_\nu)$ übertrifft: es ist $\nu < h(\nu) < A$. Offenbar gilt $f(\alpha_{h(\nu)+\tau}) > f(\alpha_\nu)$ für $\tau < A$.

Wir setzen nun $h(0) = \eta_0$ und definieren induktiv

$$\eta_{\nu+1} = h(\eta_\nu)\ (\nu < A),\ \eta_\lambda = \lim_{\nu < \lambda} \eta_\nu\ (\lambda \text{ Limeszahl} < A); \tag{5}$$

das ist möglich wegen der Regularität von A. η_ν ist also eine Normalfunktion von $\nu < A$. Offensichtlich gilt

$$f(\alpha_{\eta_\nu}) < f(\alpha_{\eta_{\nu'}} + \tau) \text{ für } \nu < \nu',\ \tau < A.$$

Ferner hat man die unmittelbar einleuchtende Beziehung

$$f(\alpha_{\eta_\nu}) \geqq \nu \text{ für } \nu < A. \tag{6}$$

Nun betrachten wir die Funktion $g(\nu) = \alpha_{\eta_\nu}\ (\nu < A)$. Die Teilmenge $\{\alpha_{\eta_\nu}\}_{\nu < A}$ von M nennen wir N. Wir ergänzen die wachsende Funktion $g(\nu)$ bzw. den Vollteil N zu einer Normalfunktion $\tilde{g}(\nu)$ bzw. einem Band $\tilde{N}$ durch Einschiebung ihrer Limites, sofern solche in N fehlen, also durch Hinzunahme der Zahlen

$$\tilde{g}(\lambda) = \lim_{\nu < \lambda} g(\nu) = \lim_{\nu < \lambda} \alpha_{\eta_\nu} \leqq \alpha_{\eta_\lambda} = g(\lambda) \qquad (\lambda < A). \tag{7}$$

Zu dem Zweck brauchen wir nur zu setzen $\tilde{g}(n) = g(n)$ und

$$\begin{aligned} &\tilde{g}(\lambda + n) = g(\lambda + n), \text{ wenn } \tilde{g}(\lambda) = g(\lambda), \\ &\tilde{g}(\lambda + n + 1) = g(\lambda + n), \text{ wenn } \tilde{g}(\lambda) < g(\lambda) \end{aligned} \qquad (n < \omega). \tag{8}$$

Man erkennt, daß gilt:

$$\tilde{g}(\lambda) = g(\lambda) = \alpha_{\eta_\lambda}, \text{ falls } \tilde{g}(\lambda) \in M \quad (\lambda \text{ Limeszahl} < \Lambda). \tag{9}$$

Denn $\tilde{g}(\lambda)$ ist die kleinste Zahl, welche alle $g(\nu) = \alpha_{\eta_\nu}$ $(\nu < \Lambda)$ übertrifft, und wenn sie zu M gehört, so muß sie mit α_{η_λ} identisch sein, also zu N gehören.

Die Normalfunktion $\tilde{g}(\nu)$ besitzt $\overline{\Lambda}$ kritische Limeszahlen $\varkappa_\xi = \tilde{g}(\varkappa_\xi)$ $(\xi < \Lambda)$, wobei $\varkappa_\xi < \varkappa_{\xi'}$ für $\xi < \xi'$ sein soll[4]). $\varkappa_\xi$ ist wieder eine Normalfunktion von $\xi < \Lambda$, somit die Menge $K = \{\varkappa_\xi\}_{\xi < \Lambda}$ ein in N enthaltenes Band von $W(\Lambda)$. Aus (9) folgt sodann für $\varkappa \in M \cap K$:

$$\varkappa = g(\varkappa) = \alpha_{\eta_\varkappa} \ (= \eta_\varkappa = \alpha_\varkappa) \qquad (\varkappa \in M \cap K). \tag{10}$$

In Verbindung mit (6) liefert das

$$f(\varkappa) = f(\alpha_{\eta_\varkappa}) \geqq \varkappa \qquad (\varkappa \in M \cap K). \tag{11}$$

Jetzt machen wir Gebrauch davon, daß $M^* = W(\Lambda) - M$ kein Band enthält. Daher besitzt $M \cap K$ die Mächtigkeit $\overline{\Lambda}$, ist also ähnlich mit $W(\Lambda)$, d. h. (11) realisiert die Behauptung des Satzes 1.

4. Aus dem Satz 1 ergibt sich nun sofort die in der Vorbemerkung angegebene Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn:

Satz 2. *Sei Λ eine reguläre Limeszahl $> \omega$, M ein Vollteil von $W(\Lambda)$, dessen Komplement $M^* = W(\Lambda) - M$ kein Band von $W(\Lambda)$ enthält. Wird dann in M eine transfinite Funktion $f(\alpha) < \alpha$ $(\alpha \in M,\ 0 \overline{\in} M)$ definiert, so gibt es f-Werte, die an $\overline{\Lambda}$ Stellen angenommen werden.*

Aus diesem Satz folgt wieder umgekehrt der Satz 1. Ferner ist unmittelbar ersichtlich, daß mit Satz 1 und Satz 2 der folgende Satz gleichwertig ist:

Satz 3. *Sei Λ eine reguläre Zahl $> \omega$ und M ein Vollteil von $W(\Lambda)$. In M sei eine transfinite Funktion $f(\alpha) < \alpha$ $(\alpha \in M,\ 0 \overline{\in} M)$ definiert, die jeden ihrer Werte an weniger als $\overline{\Lambda}$ Stellen annimmt. Dann enthält das Komplement $M^* = W(\Lambda) - M$ ein Band von $W(\Lambda)$.*

Dieser Satz kann auch unmittelbar bewiesen werden, und zwar läuft der Beweis völlig parallel dem Beweis von Satz 1 bis zur Formel (11); diese liefert in Verbindung mit der nunmehrigen Voraussetzung $\varkappa > f(\varkappa)$ den Widerspruch $\varkappa > \varkappa$. Also muß $M \cap K$ leer sein, d. h. $K \leqq M^*$, und K ist ein Band.

Der Satz 2 kann nicht dadurch verallgemeinert werden, daß man weniger von M verlangt; denn es gilt

Satz 4. *Enthält das Komplement M^* eines Vollteils M von $W(\Lambda)$, unter Λ eine reguläre Zahl $> \omega$ verstanden, ein Band L von $W(\Lambda)$, so läßt sich in M eine Funktion $f(\alpha) < \alpha$ $(\alpha \in M,\ 0 \overline{\in} M)$ definieren, die keinen ihrer Werte $\overline{\Lambda}$-mal annimmt.*

---

[4]) Z. B. ist $\varkappa_0 = \lim_{n-1 < \omega} g^n(0)$, wo $g^{n+1}(\nu) = g(g^n(\nu))$ und $g^1(\nu) = g(\nu)$.

Beweis. Es sei $L = \{\gamma_\eta\}_{\eta<\Lambda}$, wobei wir $\gamma_0 = 0$ annehmen dürfen. Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von L

$$W(\Lambda) = \sum_{\eta<\Lambda} I_\eta, \text{ wo } I_\eta = W(\gamma_\eta, \gamma_{\eta+1}) \quad \text{(vgl. 1)}; \tag{12}$$

die Verwendung des Zeichens Σ an Stelle von $\bigcup$ soll die (Wohl-) Ordnung der Summe andeuten. Zu jedem $\xi \in W(\Lambda) - L$, also auch zu jedem $\xi \in M$ gibt es ein η, so daß $\gamma_\eta < \xi < \gamma_{\eta+1}$ wird. Setzen wir $J_\eta = I_\eta \cap M$, so gibt es $\bar{\Lambda}$ nicht leere J_η, die wir mit J_{η_ν} bezeichnen (so daß η_ν mit ν wächst). Dann wird $M = \sum_{\nu<\Lambda} J_{\eta_\nu}$. Definieren wir die transfinite Funktion $f(\alpha)$ wie folgt:

$$f(\alpha) = \gamma_{\eta_\nu} \text{ für } \alpha \in J_{\eta_\nu}, \tag{13}$$

so leistet sie das Gewünschte.

Der Satz 2 bleibt auch nicht mehr richtig, wenn Λ eine singuläre Anfangszahl ist. Es gilt nämlich:

Satz 5. *Ist Λ eine singuläre Anfangszahl, so kann in jedem Vollteil M von $W(\Lambda)$ eine transfinite Funktion $f(\alpha) < \alpha$ ($\alpha \in M$, $0 \bar{\in} M$) definiert werden, die keinen Wert $\bar{\Lambda}$-mal annimmt.*

Beweis. Sei $\Lambda = \lim_{\nu<\varrho} \Lambda_\nu$, $\varrho (< \Lambda)$ regulär. Wir nehmen $\Lambda_0 = 0$ und die $\Lambda_{1+\nu}$ etwa als Anfangszahlen an, ferner Λ_ν als Normalfunktion von $\nu < \varrho$. Dann ist (vgl. (12)) $W(\Lambda) = \sum_{\nu<\varrho} W(\Lambda_\nu, \Lambda_{\nu+1})$. Erklären wir $f(\alpha)$ für $\alpha \in M$ wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha) &= \Lambda_\nu \text{ für } \Lambda_\nu < \alpha < \Lambda_{\nu+1}, \\ f(\alpha) &= 0 \quad \text{für } \alpha = \Lambda_{1+\nu} \end{aligned}\right\} \alpha \in M, \tag{14}$$

so erhalten wir eine Funktion mit den verlangten Eigenschaften. Ben Dushnik hat für $\Lambda = \omega_\omega$ ein ähnliches Beispiel gegeben[5]).

§ 2.

Ergänzende Bemerkungen zu § 1.

1. Wie kann die Voraussetzung des Satzes 1 (oder 2) erfüllt werden, daß das Komplement M^* des Vollteils M von $W(\Lambda)$ kein Band enthält? Jedenfalls dadurch, daß M selbst ein Band umfaßt. Das ergibt sich sofort aus dem folgenden

Satz 6. *Ist Λ eine mit der regulären Zahl $\varrho > \omega$ konfinale Anfangszahl und sind L, M zwei Bänder von $W(\Lambda)$, so hat der Durchschnitt $D = L \cap M$ mindestens die Mächtigkeit $\bar{\varrho}$, wobei $W(\Lambda)$ mit D konfinal ist. — D ist also wieder ein Band, falls $\varrho = \Lambda$, d. h. Λ regulär ist.*

[5]) A. a. O. [2]).

Beweis. Daß D abgeschlossen ist, ist klar. — Sei $L = \{\alpha_\eta\}_{\eta<\Lambda}$, $M = \{\beta_\xi\}_{\xi<\Lambda}$; wir nehmen $\alpha_0 = 0$ an, was für die Richtigkeit des Satzes keine Bedeutung hat. Wir setzen wieder $I_\eta = W(\alpha_\eta, \alpha_{\eta+1})$ (vgl. § 1, **1**); $\mathfrak{J} = \{J_{\eta_\nu}\}_{\nu<\sigma}$ sei die Menge aller nicht leeren Durchschnitte $J_{\eta_\nu} = M \cap I_{\eta_\nu}$; dann gilt $M = \sum_{\nu<\sigma} J_{\eta_\nu}$. Endlich bezeichne β_{ξ_ν} die kleinste Zahl aus J_{η_ν}. — Da M die Mächtigkeit $\overline{\Lambda}$ hat, muß $W(\Lambda)$ mit M konfinal sein. Somit kann es kein letztes J_{η_ν} in $\mathfrak{J}$ geben. Also muß M mit seiner Teilmenge $N = \{\beta_{\xi_\nu}\}_{\nu<\sigma}$, demnach $W(\Lambda)$ mit N konfinal sein. Das aber bedeutet, daß Λ mit σ, also σ mit ϱ konfinal ist. Wegen der Regularität von ϱ ist dann ϱ linker Teiler von σ und $\sigma = \omega\sigma$ (wegen $\varrho \geqq \omega_1$). Die wohlgeordnete Menge der Limeszahlen $\lambda < \sigma$ hat also wieder den Typus σ.

Setzen wir nun $\tilde{\eta}_\lambda = \lim_{\nu<\lambda} \eta_\nu$, $\tilde{\xi}_\lambda = \lim_{\nu<\lambda} \xi_\nu$, so folgt aus

$$\alpha_{\eta_\nu} \leqq \beta_{\xi_\nu} < \alpha_{\eta_\nu+1} \leqq \alpha_{\eta_{\nu+1}} < \ldots$$

und der Abgeschlossenheit von M, L:

$$\beta_{\tilde{\xi}_\lambda} = \lim_{\nu<\lambda} \beta_{\xi_\nu} = \lim_{\nu<\lambda} \alpha_{\eta_\nu} = \alpha_{\tilde{\eta}_\lambda} \qquad (\lambda < \sigma); \tag{15}$$

dabei ist $\beta_{\tilde{\xi}_\lambda} \in M$, $\alpha_{\tilde{\eta}_\lambda} \in L$, mithin $\delta_\lambda = \alpha_{\tilde{\eta}_\lambda} = \beta_{\tilde{\xi}_\lambda} \in D = L \cap M$. Somit enthält D die Menge $\{\delta_\lambda\}_{\lambda<\sigma}$ vom Typus σ und der Mächtigkeit $\overline{\sigma} \geqq \overline{\varrho}$. — Ferner gibt es zu jedem $\gamma < \Lambda$, wie leicht zu sehen, ein $\delta_\lambda > \gamma$. — Damit ist Satz 6 bewiesen.

Es sei noch bemerkt, *daß die Funktionen α_{η_ν} und β_{ξ_ν} Normalfunktionen von $\nu < \sigma$ sind, ebenso η_ν und ξ_ν*. Denn aus (15) ist zu ersehen, daß $\beta_{\tilde{\xi}_\lambda}$ das kleinste Element von $J_{\tilde{\eta}_\lambda}$ ist; folglich muß $\tilde{\eta}_\lambda$ einer der Indizes $\eta_\tau (\tau < \sigma)$ sein, was erfordert, daß $\tilde{\eta}_\lambda = \eta_\lambda$ ist. Somit ist $\beta_{\tilde{\xi}_\lambda}$ das kleinste Element von J_{η_λ}, also ist auch $\tilde{\xi}_\lambda = \xi_\lambda$.

Daß die Voraussetzung $\varrho > \omega$ in Satz 6 notwendig ist, zeigt der

Satz 7. *Ist die Anfangszahl Λ mit der regulären Limeszahl ϱ konfinal, so lassen sich zwei Bänder L und M von $W(\Lambda)$ mit $L \cup M = W(\Lambda)$ angeben, deren Durchschnitt D den Typus $\overline{D} = \varrho$ besitzt oder leer ist, je nachdem $\varrho > \omega$ oder $\varrho = \omega$ gilt.*

Beweis. Wir setzen Λ als singulär voraus, da sonst nichts zu beweisen ist. Sei also $\varrho < \Lambda$ und $\Lambda = \lim_{\nu<\varrho} \Lambda_\nu$, Λ_ν eine Normalfunktion von ν, alle $\Lambda_\nu (\nu < \varrho)$ Anfangszahlen. Dann besitzen die durch

$$\begin{aligned} L &= (W(\Lambda_0 + 1) + \sum_{\nu<\varrho} W(\Lambda_\nu + 1,\ \Lambda_\nu n + 1)) \cup \{\Lambda_\lambda\}_{\lambda<\varrho}, \\ M &= (\sum_{\nu<\varrho} W(\Lambda_\nu n + 1,\ \Lambda_{\nu+1} + 1)) \cup \{\Lambda_\lambda\}_{\lambda<\varrho} \end{aligned} \tag{16}$$

(n eine feste natürliche Zahl > 1, λ Limeszahl)

erklärten Teilmengen L und M von $W(\Lambda)$ die Mächtigkeit $\overline{\Lambda}$, sind

ferner abgeschlossen, also Bänder, und haben die Menge $\{A_\lambda\}_{\lambda<\varrho}$ zum Durchschnitt, welche vom Typus ϱ ist für $\varrho>\omega$ und leer ist für $\varrho=\omega$; überdies ist $L\cup M=W(A)$.

2. Damit die Bedingung des Satzes 2 hinsichtlich M^* erfüllt ist, braucht M indessen kein Band zu umfassen; denn es gilt

Satz 8. *Ist die Anfangszahl $A>\omega_1$, so ist $W(A)$ zerreißbar* (vgl. § 1, **1**).

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es unterhalb A mindestens zwei verschiedene reguläre Limeszahlen ϱ und ϱ'. Wir fassen die Limeszahlen $\lambda<A$, welche mit ϱ konfinal sind, zu einer Menge M zusammen. M ist ein Vollteil, denn es enthält u. a. die Zahlen der Form $\varrho(\nu+1)$ $(\nu<A)$. Das Komplement $M^*=W(A)-M$ besteht dann aus der Null, den Zahlen $\nu+1<A$ und denjenigen Limeszahlen $\lambda^*<A$, welche mit von ϱ verschiedenen regulären Zahlen $<A$ konfinal sind, z. B. mit ϱ'. — Seien L bzw. L^* zwei in M bzw. M^* enthaltene Hälften von $W(A)$. Wir können dann aus L^* eine Folge $\{\alpha_\nu^*\}_{\nu<\varrho}$ wachsender Zahlen herausgreifen, mit der $W(A)$ nicht konfinal ist (etwa ein Stück des Typus ϱ aus der natürlichen Wohlordnung von L^*); der $\lim\limits_{\nu<\varrho}\alpha_\nu^*=\alpha_\varrho$ ist mit ϱ konfinal und gehört daher zu M, also nicht zu L^*, d. h. L^* ist nicht abgeschlossen. Das analoge gilt, wenn wir aus L eine Fundamentalfolge $\{\alpha_\nu\}_{\nu<\varrho'}$ entnehmen, mit welcher $W(A)$ nicht konfinal ist: ihr Limes $\alpha_{\varrho'}^*=\lim\limits_{\nu<\varrho'}\alpha_\nu$ liegt nicht in L, sondern in M^*, d. h. auch L ist nicht abgeschlossen. Demnach enthält weder M noch M^* ein Band, und da beide Mengen Vollteile sind, sind sie nach der in § 1, **1** erklärten Redeweise zerrissen[6]).

§ 3.

Ein Sonderfall.

Nach den Ausführungen von § 2 (Satz 6 und 8) enthält der Satz 2 den spezielleren

Satz 9. *Umfaßt der Vollteil M der Menge $W(A)$ (A regulär $>\omega$) ein Band, so nimmt eine in M definierte transfinite Funktion $f(\alpha)<\alpha$ ($\alpha\in M$, $0\bar{\in}M$) mindestens einen ihrer Werte an $\bar{A}$ Stellen an.*

Dieser Satz kann nun, wie in der Einleitung bemerkt, auch nach der Methode von Ben Dushnik[7]) bewiesen werden. Dabei genügt es offenbar, den Beweis unter der Voraussetzung zu führen, daß M bereits ein Band ist. Sei $M=\{\alpha_\nu\}_{1\leq\nu<A}$, $I_\nu=W(\alpha_\nu,\alpha_{\nu+1})$, so daß $W(A)=W(\alpha_1)+\sum\limits_{1\leq\nu<A}I_\nu$ wird. Wir definieren auf der Bildmenge

[6]) Die Frage, ob sich auch $W(\omega_1)$ zerreißen läßt, erfordert eine besondere Untersuchung, die in Vorbereitung ist.

[7]) A. a. O. [2]).

$B = f(M)$ eine transfinite Funktion $v(\beta)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} &v(\beta) = 0 \quad \text{für} \quad \beta \in B \cap W(\alpha_1); \\ (17) \qquad &v(\beta) = \beta \quad \text{für} \quad \beta \in B \cap M; \\ &v(\beta) = \alpha_\nu \quad \text{für} \quad \beta \in (W(\Lambda) - M) \cap B \cap I_\nu. \end{aligned}$$

Dann nimmt $v(\beta)$ keinen Wert $\overline{\Lambda}$-mal an und es gilt

$$(18) \qquad g(\alpha) = v(f(\alpha)) < \alpha \quad \text{für} \quad \alpha \in M;$$

dabei ist nun $g(\alpha) \in M$ oder $g(\alpha) = 0$. Somit kann man die Funktion $g(\alpha)$ für jedes α mit $g(\alpha) \neq 0$ iterieren und daher auf $g(\alpha)$ die Schlußweise von Ben Dushnik anwenden, welche das Resultat liefert, daß es eine Zahl ϑ gibt und eine zugehörige Menge $N \subseteq M$ von der Mächtigkeit $\overline{\Lambda}$, so daß

$$(19) \qquad g(\alpha) = v(f(\alpha)) = \vartheta \quad \text{für} \quad \alpha \in N$$

wird. — Oder man setzt $g(\alpha_\nu) = \alpha_{h(\nu)}$, indem man $\alpha_0 = 0$ einführt, und erhält eine Funktion $h(\nu) < \nu$ für $1 \leqq \nu < \Lambda$, die man wieder nach Ben Dushnik behandelt; dadurch findet man eine Zahl π, zu welcher eine Menge P von $\overline{\Lambda}$ Urbildern ν gehört, so daß $h(\nu) = \pi$ für $\nu \in P$ gilt. Setzt man $N = \{\alpha_\nu\}_{\nu \in P}$ und $\vartheta = \alpha_\pi$, so gelangt man wieder zu (19).

Da jedoch v den Wert ϑ nur an weniger als $\overline{\Lambda}$ Stellen annimmt, wird (19) nur durch weniger als $\overline{\Lambda}$ Funktionswerte $f(\alpha)$ befriedigt, d. h. die Mächtigkeit der Bildmenge $f(N)$ ist $< \overline{\Lambda}$. Nach § 1, 2 muß es daher ein $\beta \in f(N)$ geben, dem $\overline{\Lambda}$ Urbilder $\alpha \in N$ entsprechen. Damit ist der Satz 9 bewiesen.

(Eingegangen am 25. Februar 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 3, S. 262—271 (1951).

Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln.

Von

Wolfgang Jurkat in Tübingen.

Nachdem die Frage nach den Konvergenzfaktoren für CESÀRO-summierbare Reihen abschließend beantwortet ist[1]), wird man das gleiche Problem auch für allgemeinere Klassen von Reihen zu lösen versuchen. Ein Anfang ist schon für die Klasse der durch NÖRLUND'sche Mittel summierbaren Reihen gemacht[2]). In dieser Arbeit sollen nun in der Hauptsache die durch RIESZ'sche Mittel summierbaren Reihen betrachtet werden[3]).

Das Problem, um das es sich hier handelt, wollen wir so formulieren: Wir wollen sagen, daß die Zahlen b_ν für eine bestimmte Klasse von Reihen Konvergenzfaktoren sind, wenn für jede Reihe Σa_ν dieser Klasse die nach Hinzutreten der Konvergenzfaktoren entstehende Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ konvergiert. Das Problem liegt darin, geeignete Bedingungen anzugeben, unter denen b_ν Konvergenzfaktoren sind. Jede solche Bedingung liefert uns — wenn man so will — ein Konvergenzkriterium für Reihen der Form $\Sigma a_\nu b_\nu$.

1. Die Konvergenzfaktoren bei (bewichteten) arithmetischen Mitteln.

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (bzw. Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$) heißt summierbar (bzw. limitierbar) zum Wert s durch das Verfahren der RIESZ'schen Mittel $R(\lambda, \varkappa)$, wenn

$$\frac{1}{\omega^\varkappa} \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa a_\nu \to s \qquad (\omega \to \infty) \tag{1}$$

gilt; dabei soll $\varkappa > 0$ und λ_n eine monoton gegen ∞ wachsende Zahlenfolge sein,

$$\Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \ 0 \leqq \lambda_n \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{2}$$

---

[1]) BOSANQUET [4]; vgl. auch KNOPP [7], BOSANQUET [1], [2], [3], SCHUR [11].

[2]) MOORE [8]; vgl. auch MOORE [9], S. 44.

[3]) Vgl. hierzu auch die demnächst in der Math. Zeitschr. erscheinende Dissertation von A. PEYERIMHOFF [10], wo das gleiche Problem von einem anderen Standpunkt aus behandelt wird.

Ist $\varkappa = 1$, so spielt es bekanntlich keine Rolle, ob ω stetig gegen ∞ strebt oder gleich λ_{n+1} gesetzt wird. Anders ausgedrückt: (1) ist gleichbedeutend mit

$$\sigma_n = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) \to s \qquad (n \to \infty),$$

oder die $R(\lambda, 1)$-Summierbarkeit ist identisch mit der Konvergenz der (bewichteten) arithmetischen Mittel σ_n. Für die Klasse der $R(\lambda, 1)$-summierbaren Reihen — sie werde kurz mit $R(\lambda, 1)$ bezeichnet — lassen sich die Konvergenzfaktoren in besonders einfacher Weise charakterisieren.

Satz 1. *Damit die Zahlen b_ν Konvergenzfaktoren für $R(\lambda, 1)$ sind, ist notwendig und hinreichend:*

$$(1^\circ) \qquad b_n = O\left(\frac{1}{\Lambda_n}\right) \quad mit \quad \frac{1}{\Lambda_n} = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}} \qquad (n \to \infty),$$

$$(2^\circ) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu+1} \left| \Delta \left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \right) \right| < +\infty,$$

$$(3^\circ) \qquad \frac{\Delta b_n}{\Delta \lambda_n} = o(1) \qquad (n \to \infty).$$

Für $\lambda_n = n$, also im Falle der gewöhnlichen arithmetischen Mittel oder $(C, 1)$-Mittel, erhält man die bekannten Bedingungen

$$b_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \, |\Delta^2 b_\nu| < +\infty.$$

Hier ist (3°) eine Folge von (1°), und das ist auch sonst unter recht allgemeinen Voraussetzungen der Fall.

Der *Beweis* geht von einer einfachen Umformung der Teilsummen t_n der Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ aus, die man durch zweimalige partielle Summation erhält:

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = s_n b_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta \lambda_\nu \frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu},$$

$$(3) \qquad t_n = s_n b_n - \sigma_{n-1} \lambda_n \frac{\Delta b_{n-1}}{\Delta \lambda_{n-1}} - \sum_{\nu=0}^{n-2} \sigma_\nu \lambda_{\nu+1} \Delta \left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \right),$$

$$(4) \qquad t_n = \sigma_n \Lambda_n b_n - \sigma_{n-1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} b_n + \lambda_n \frac{\Delta b_{n-1}}{\Delta \lambda_{n-1}} \right) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \sigma_\nu \lambda_{\nu+1} \Delta \left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \right).$$

Die Teilsummen t_n sind in (4) dargestellt als lineare Transformation der arithmetischen Mittel σ_n; dabei durchläuft σ_n alle konvergenten Zahlenfolgen, wenn s_n alle $R(\lambda, 1)$-limitierbaren Zahlenfolgen durchläuft. Die Zahlen b_ν sind also genau dann Konvergenzfaktoren für $R(\lambda, 1)$, wenn die unter (4) stehende lineare Transformation $t_n = \sum \sigma_\nu a_{n\nu}$ konvergenztreu ist.

Nun ist bekannt, daß die Matrix $(a_{n\nu})$ dann und nur dann konvergenztreu ist, wenn die folgenden als Zeilennorm-, Zeilensummen- und Spalten-Bedingung bezeichneten Beziehungen erfüllt sind:

$$\text{(Zn)} \qquad \sum_{\nu} |a_{n\nu}| \leqq M \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$\text{(Zs)} \qquad \sum_{\nu} a_{n\nu} \to a \qquad (n \to \infty),$$

$$\text{(Sp)} \qquad a_{n\nu} \to a_{\nu}^{*} \qquad (n \to \infty, \nu = 0, 1, \ldots).$$

Wie man sofort sieht, sind (Zs) und (Sp) in unserem Fall von selbst erfüllt. Es bleibt also nur die Bedingung

$$|\Delta_n b_n| + \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} b_n + \lambda_n \frac{\Delta b_{n-1}}{\Delta \lambda_{n-1}} \right| + \sum_{\nu=0}^{n-2} \lambda_{\nu+1} \left| \Delta \left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \right) \right| \leqq M$$

übrig, die gleichwertig mit (1°), (2°) und

$$\lambda_{n+1} \frac{\Delta b_n}{\Delta \lambda_n} = O(1) \tag{5}$$

ist. Um weiter die Äquivalenz von (1°), (2°) und (5) mit (1°), (2°), (3°) nachzuweisen, genügt es, (5) aus (2°) und (3°) herzuleiten:

$$\lambda_{n+1} \frac{\Delta b_n}{\Delta \lambda_n} = \lambda_{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta \left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \right) = O(1) \sum_{\nu=n}^{\infty} \lambda_{\nu+1} \left| \Delta \left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \right) \right| = o(1). \tag{6}$$

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen[4]).

Betrachtet man statt der $R(\lambda, 1)$-summierbaren die $R(\lambda, 1)$-beschränkten Reihen, so ändert sich an den Bedingungen von Satz 1 nur (1°), *und zwar ist dort O durch o zu ersetzen.*

Der Beweis kann ganz parallel zu dem obigen geführt werden, nur hat man statt des Satzes über konvergenztreue Matrizen den entsprechenden über konvergenzerzeugende Matrizen zu benutzen.

2. Allgemeinere hinreichende Bedingungen für Konvergenzfaktoren.

Für die Riesz'schen Mittel 1. Ordnung verlief der Beweis deswegen so glatt, weil wir die Teilsummen t_n in der einfachen Form (4) darstellen konnten. Man kann aber versuchen, auch für $R(\lambda, \varkappa)$ mit $\varkappa \neq 1$ aus dieser Darstellung Nutzen zu ziehen, indem man von den folgenden notwendigen Bedingungen[5]) für die Summierbarkeit der Reihe Σa_ν Gebrauch macht:

$$s_n - s = o(\Delta_n^{\varkappa}) \qquad (n \to \infty) \tag{7}$$

[4]) Zur Methode dieses Beweises vgl. man Knopp [7].

[5]) Diese Bedingungen finden sich bei Hardy-Riesz [5], S. 36.

und

$$\sigma_n - s = o(A_n^{\varkappa-1}) \quad \text{für} \quad \varkappa \geqq 1 \qquad (n \to \infty) \tag{8}$$

bzw.

$$\sigma_n - s = o(1) \quad \text{für} \quad 0 < \varkappa \leqq 1. \tag{8'}$$

Von diesem Gedanken ist es nur ein kleiner Schritt zu dem

Satz 2. *Gilt*

$$s_n b_n = o(1) \qquad (n \to \infty) \tag{1°}$$

und

$$\sigma_n = O(A_n) \quad (n \to \infty) \quad \textit{mit} \quad \Delta(A_n) \leqq 0, \tag{S}$$

so ist $\Sigma a_\nu b_\nu$ jedenfalls konvergent, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \lambda_{\nu+1} \left| \Delta\left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu}\right)\right| < +\infty, \tag{2°}$$

$$\frac{\Delta b_n}{\Delta \lambda_n} = o(1) \qquad (n \to \infty). \tag{3°}$$

Der *Beweis* ergibt sich in der einfachsten Weise aus der Formel (3), denn der erste Ausdruck konvergiert wegen (1°), der dritte wegen (2°) und der zweite wegen $A_n \lambda_{n+1} \frac{\Delta b_n}{\Delta \lambda_n} = o(1)$, was ganz entsprechend zu (6) gezeigt werden kann.

Der hinreichende Teil von Satz 1 ist in Satz 2 enthalten, wenn man $A_n = 1$ setzt und die Bedingung (7) mit $s = 0$ (o. B. d. A.!) berücksichtigt. Für $\lambda_n = n$ ist die Verallgemeinerung, die in der neuen Bedingung (1°) besteht — $A_n = 1$ —, schon bekannt [6]) und leistet nützliche Dienste in der Theorie der Fourier-Reihen. Weiter ist aber jetzt die Möglichkeit gewonnen, durch geeignete Wahl von A_n [7]) auch *für die Klassen $R(\lambda, \varkappa)$* mit $\varkappa \neq 1$ *Konvergenzfaktoren* anzugeben: *Hinreichende Bedingungen sind*

$$b_n = O\left(\frac{1}{A_n^{\varkappa}}\right) \qquad (n \to \infty), \tag{1°}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{\varkappa-1} \lambda_{\nu+1} \left| \Delta\left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu}\right)\right| < +\infty \qquad \textit{für } \varkappa \geqq 1 \tag{2°}$$

bzw.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu+1} \left| \Delta\left(\frac{\Delta b_\nu}{\Delta \lambda_\nu}\right)\right| < +\infty \qquad \textit{für } 0 < \varkappa \leqq 1, \tag{2'}$$

$$\frac{\Delta b_n}{\Delta \lambda_n} = o(1) \qquad (n \to \infty). \tag{3°}$$

Für die Klasse der $R(\lambda, \varkappa)$-beschränkten Reihen lassen sich entsprechende Bedingungen für die Konvergenzfaktoren angeben, und

[6]) Vgl. etwa Zygmund [12], S. 58.

[7]) $A_n = A_n^{\varkappa-1}$ für $\varkappa \geqq 1$, $A_n = 1$ für $0 < \varkappa \leqq 1$.

zwar braucht man bei (1°) *nur O durch o zu ersetzen*, wie das schon bei Satz 1 der Fall war.

Es wäre nicht schwer gefallen, statt Satz 2 *notwendige und hinreichende Bedingungen für Konvergenzfaktoren aufzustellen, wenn wir z. B. die Klasse S bzw. S*, d. h. die Reihen betrachtet hätten, für die*

$$(S) \qquad \sigma_u = O(A_n) \quad bzw. \quad (S^*) \qquad \sigma_n = o(A_n)$$

gilt. Die Bedingungen (2°) *und* (3°) *wären dann geblieben und statt* (1°) *hätten wir zu schreiben*

$$b_n = o\left(\frac{1}{A_n A_n}\right) \quad bzw. \quad b_n = O\left(\frac{1}{A_n A_n}\right).$$

— im ganzen eine einfache Verallgemeinerung von Satz 1. Bei Anwendungen aber, z. B. auf $R(\lambda, \varkappa)$ mit $0 < \varkappa < 1$ oder auf FOURIER-Reihen, würde dieser Satz in manchen Fällen viel zu schlechte hinreichende Bedingungen geben, einfach deswegen, weil die Klassen S bzw. S^* noch nicht genügend vielseitig sind.

Von Interesse ist vielleicht noch die Bemerkung, daß die Bedingung (1°) von Satz 2 in einem gewissen Sinne notwendig ist, nämlich: *Wenn* $b_n > 0$ *monoton gegen* 0 *strebt, so folgt* (1°) *aus der Konvergenz von* $\Sigma a_\nu b_\nu$. Dies ist nichts anderes als der bekannte Satz von KRONECKER[8]). Die weiteren Bedingungen über b_n — (2°) und (3°) — verlangen nur eine gewisse „Regularität" im Wachstum der b_ν, die natürlich mit der Art und Größe der Schwankungen von s_n — d. h. mit (S) — in Zusammenhang stehen muß. In diesem Sinne kann (1°) wohl als die charakteristische Bedingung für die Konvergenzfaktoren angesehen werden.

3. Über die Größenordnung der Konvergenzfaktoren.

Da man aus den Konvergenzfaktoren b_ν stets wieder solche erzeugen kann, indem man diese mit einer monoton abnehmenden, positiven Zahlenfolge multipliziert, so entsteht die Frage nach den „größten Konvergenzfaktoren". Für $R(\lambda, \varkappa)$ scheint — nach unseren hinreichenden Bedingungen zu urteilen — die Grenze bei der Größenordnung $\frac{1}{A_n^\varkappa}$ zu liegen. Diese Vermutung zu bestätigen, ist das Ziel der folgenden Untersuchungen.

Satz 3. *Für* $R(\lambda, \varkappa)$ *sind* $\frac{1}{A_n^\varkappa}$ *Konvergenzfaktoren, wenn* λ_n *die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1°) $\qquad \Delta A_n \leqq 0$, *d. h.* A_n *wächst monoton;*

(2°) $\qquad \Delta\left\{\Delta\left(\frac{1}{A_n^\varkappa}\right) \Big/ \Delta\lambda_n\right\} \leqq 0$, *d. h.* $\left|\Delta\left(\frac{1}{A_n^\varkappa}\right) \Big/ \Delta\lambda_n\right|$ *fällt monoton;*

[8]) Vgl. KNOPP [6], S. 131.

$$(3^0) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta A_\nu}{A_\nu}\right)^2 < +\infty \qquad \text{für } \varkappa > 1$$

bzw.

$$(3') \qquad \frac{\Delta A_n}{A_{n+1}^{\varkappa}} = O(1) \qquad \text{für } 0 < \varkappa \leqq 1.$$

(Für $\varkappa = 1$ ist (3') von selbst erfüllt!)

Für $\lambda_n = n$ sind alle Bedingungen des Satzes erfüllt, und wir erhalten die bekannten Konvergenzfaktoren $\frac{1}{n^{\varkappa}}$.

Zum *Beweis* des Satzes haben wir nur die in § 2 aufgestellten Bedingungen nachzuprüfen, was sich ohne Schwierigkeit durchführen läßt. Ein wenig mehr Rechenarbeit erfordert lediglich die Abschätzung

$$(9) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\varkappa-1} \lambda_{\nu+1} \Delta \left\{ \frac{1}{\Delta \lambda_\nu} \Delta \left(\frac{1}{A_\nu^{\varkappa}}\right)\right\} = O(1) \qquad \text{für } \varkappa > 1:$$

Durch Abel'sche partielle Summation erhält man für die linke Seite von (9)

$$O(1) - A_n^{\varkappa-1} \frac{\lambda_{n+1}}{\Delta \lambda_{n+1}} \Delta \left(\frac{1}{A_{n+1}^{\varkappa}}\right) - \sum_1^n \Delta \left(\frac{1}{A_\nu^{\varkappa}}\right) \frac{1}{\Delta \lambda_\nu} \Delta \left(\lambda_\nu A_{\nu-1}^{\varkappa-1}\right)$$

$$= O(1) + O(1) - \sum_1^n \Delta \left(\frac{1}{A_\nu^{\varkappa}}\right) \cdot \frac{\lambda_\nu}{\Delta \lambda_\nu} \cdot \Delta \left(A_{\nu-1}^{\varkappa-1}\right) - \sum_1^n \Delta \left(\frac{1}{A_\nu^{\varkappa}}\right) \cdot A_\nu^{\varkappa-1}$$

$$= O(1) + O(1) \sum_1^n \frac{1}{A_\nu^{\varkappa}} \frac{\Delta A_\nu}{A_\nu} \cdot A_\nu \cdot A_\nu^{\varkappa-1} \frac{\Delta A_{\nu-1}}{A_{\nu-1}} + O(1) \sum_1^n \frac{1}{A_\nu^{\varkappa}} \frac{\Delta A_\nu}{A_{\nu+1}} \cdot A_\nu^{\varkappa-1},$$

wobei die Betragstriche bei den Summanden weggelassen wurden, da diese alle dasselbe Vorzeichen besitzen. Die Behauptung folgt nun sofort, da sich die eine Summe mit Hilfe von (3°) abschätzen und die andere in der Form $\sum - \Delta \left(\frac{1}{A_\nu}\right)$ aufsummieren läßt.

Wir haben oben gesehen, daß $\frac{1}{A_n^{\varkappa}}$ unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich Konvergenzfaktoren sind. Ergänzend dazu zeigen wir jetzt, daß es keine „wesentlich größeren" Konvergenzfaktoren geben kann.

Satz 4. *Sind b_ν Konvergenzfaktoren für $R(\lambda, \varkappa)$, so gilt notwendig*

$$(1^0) \qquad b_n = O\left(\frac{1}{A_n^{\varkappa}}\right) \qquad (n \to \infty);$$

für $\varkappa > 1$ machen wir dabei folgende Voraussetzung über λ_n:

$$(2^0) \qquad 0 < a \leqq \frac{\Delta \lambda_n}{\Delta \lambda_{n-1}} \leqq A.$$

Für $\varkappa = 1$ ist dieser Satz schon in Satz 1 enthalten; die allgemeine Gültigkeit des Satzes werden wir aus der Tatsache herleiten können, daß die Bedingung (7) in einem gewissen Sinne als „beste Bedingung" dieser Art für die $R(\lambda, \varkappa)$-summierbaren Reihen anzusprechen ist. Genauer können wir das so formulieren:

Satz 5. *Zu jeder unbeschränkten Zahlenfolge* η_n, $\eta_n \neq O(1)$, *gibt es eine* $R(\lambda, \varkappa)$*-summierbare Reihe* Σa_ν, *für die*

$$(1^0) \qquad s_n - s \neq o\left(\frac{\Lambda_n^\varkappa}{\eta_n}\right) \quad \textit{und} \quad a_n \neq o\left(\frac{\Lambda_n^\varkappa}{\eta_n}\right)$$

ist; für $\varkappa > 1$ *machen wir dabei noch folgende Voraussetzung über* λ_n*:*

$$(2^0) \qquad 0 < a \leqq \frac{\Delta\lambda_n}{\Delta\lambda_{n-1}} \leqq A.$$

Satz 4 folgt aus Satz 5 in der einfachsten Weise: Wenn für jede $R(\lambda, \varkappa)$-summierbare Reihe Σa_ν die Reihe $\Sigma a_\nu b_\nu$ konvergieren soll, so muß stets

$$(10) \qquad a_n b_n = o(1)$$

sein. Wäre

$$b_n \neq O\left(\frac{1}{\Lambda_n^\varkappa}\right),$$

etwa $b_n \Lambda_n^\varkappa = \eta_n \neq O(1)$, so wäre für die nach Satz 5 existierende Reihe

$$a_n b_n = a_n \frac{\eta_n}{\Lambda_n^\varkappa} \neq o(1)$$

im Widerspruch zu (10).

4. Beweis von Satz 5.

Zunächst definieren wir eine Doppelfolge s_{mn} $(m, n = 0, 1, \ldots)$, indem wir $s_{mn} = 0$ setzen, falls die folgenden Rekursionsformeln keinen anderen Wert vorschreiben

$$(11) \qquad \left\{\prod_{\nu=m}^{m+k+1}{}' (\lambda_n - \lambda_\nu)\right\}^{-1} = \begin{cases} s_{mn} & \text{für} \quad n = m \\ s_{mn} - s_{m,n-1} & \text{für} \quad n = m+1, \ldots, m+k; \end{cases}$$

dabei sei k eine ganze Zahl mit $\varkappa - 1 \leqq k < \varkappa$ und der Strich an dem Produktzeichen bedeute, daß der Faktor für $\nu = n$ wegzulassen ist. Die Definition der in Satz 5 genannten Zahlenfolge s_n hängt von einer noch später zu wählenden Teilfolge n_ν der natürlichen Zahlen ab:

Für $n_\nu \leqq n < n_{\nu+1}$ $(\nu = 1, \ldots)$ sei

$$(12) \qquad s_n = \Lambda_m^\varkappa \, |\Delta\lambda_m|^{k+1} \frac{s_{mn}}{\eta_m} \qquad \text{mit } m = n_\nu,$$

für $n_0 = 0 \leqq n < n_1$ sei $s_n = 0$.

Die Wahl der Teilfolge n_ν geschieht durch Induktion und wird folgenden, auf Grund der Voraussetzungen erfüllbaren Bedingungen unterworfen:

$$(13) \qquad |\eta_{n_\nu}| \geqq \nu, \quad n_\nu > n_{\nu-1} + k + 1,$$

$$(14) \qquad \left| \sum_{\mu=0}^{n_{\nu-1}+k} \frac{1}{\omega^\varkappa} \left[(\omega - \lambda_\mu)^\varkappa - (\omega - \lambda_{\mu+1})^\varkappa\right] s_\mu \right| \leqq \frac{1}{\nu} \quad \text{für } \omega > \lambda_n, \; n > n_\nu \; [9].$$

[9] Eine solche Wahl von n_ν ist möglich, da die linke Seite von (14) mit $\omega \to \infty$ gegen 0 strebt.

Wir werden zeigen, daß die so definierte Folge s_n die in Satz 5 behaupteten Eigenschaften besitzt. Doch vorher sei auf eine Ungleichung hingewiesen, die später mehrfach benutzt wird: Es ist

$$\left|\frac{\lambda_{\mu'}-\lambda_\mu}{\lambda_{\nu'}-\lambda_\nu}\right| \leqq B, \tag{15}$$

wenn $\mu' \neq \mu$, $\nu' \neq \nu$ ist und alle Indices zwischen m und $m+k+1$ liegen. Für $0<\varkappa\leqq 1$, d. h. $k=0$ ist diese Ungleichung trivial, während sie für $\varkappa>1$ leicht aus (2°) gefolgert werden kann.

4. 1. *Die Zahlenfolge s_n ist $R(\lambda,\varkappa)$-summierbar zur Summe* 0.

Wir haben für $\lambda_n<\omega\leqq\lambda_{n+1}$

$$\frac{1}{\omega^\varkappa}\sum_{\lambda_\nu<\omega}(\omega-\lambda_\nu)^\varkappa a_\nu = \left(\frac{\omega-\lambda_n}{\omega}\right)^\varkappa s_n + \sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{1}{\omega^\varkappa}\left[(\omega-\lambda_\mu)^\varkappa-(\omega-\lambda_{\mu+1})^\varkappa\right]s_\mu$$

$$= \mathrm{I}+\mathrm{II}. \tag{16}$$

Hierin ist wegen (15) und (13)

$$\mathrm{I} = O\left(\frac{1}{A_n^\varkappa}\right)s_n$$

$$= O(1)\,\frac{A_m^\varkappa}{A_n^\varkappa}\,|\Delta\lambda_m|^{k+1}\,s_{mn}\,\frac{1}{\eta_m} \qquad (m\leqq n\leqq m+k)^{10})$$

$$= O\left(\frac{1}{\eta_m}\right) = o(1). \tag{17}$$

Durch weitere Aufteilung erhalten wir für $n_\nu<n\leqq n_{\nu+1}$

$$\mathrm{II} = \sum_{\mu=0}^{n-1} = \sum_{0}^{n_\nu-1}+\sum_{n_\nu}^{n-1} = \mathrm{II}_1+\mathrm{II}_2. \tag{18}$$

Der erste Teil ist leicht mit Hilfe von (14) abzuschätzen:

$$|\mathrm{II}_1| = \left|\sum_{0}^{n_{\nu-1}+k}\frac{1}{\omega^\varkappa}\left[(\omega-\lambda_\mu)^\varkappa-(\omega-\lambda_{\mu+1})^\varkappa\right]s_\mu\right| \leqq \frac{1}{\nu} = o(1). \tag{19}$$

Das Ziel des weiteren Beweises ist

$$\mathrm{II}_2 = o(1), \tag{20}$$

denn aus (16)—(20) zusammen folgt die Behauptung.

a) Ist $n_\nu<n\leqq n_\nu+k$, so kann man mit Hilfe von (15) so schließen:

$$|\mathrm{II}_2| = \left|\sum_{n_\nu}^{n-1}\frac{1}{\omega^\varkappa}\left[(\omega-\lambda_\mu)^\varkappa-(\omega-\lambda_{\mu+1})^\varkappa\right]s_\mu\right|$$

$$\leqq \sum_{m}^{n-1}\left(\frac{\omega-\lambda_\mu}{\omega}\right)^\varkappa|s_\mu| \leqq \sum_{m}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_\mu}{\lambda_{n+1}}\right)^\varkappa A_m^\varkappa\,|\Delta\lambda_m|^{k+1}\,\frac{|s_{m\mu}|}{|\eta_m|}$$

$$= O\left(\frac{1}{\eta_m}\right) = o(1). \tag{20'}$$

[10]) Für andere n ist $s_n=0$, so daß man nur diese zu betrachten braucht.

b) Ist dagegen $n_\nu + k < n \leqq n_{\nu+1}$, so ist

$$\mathrm{II}_2 = \sum_m^{m+k} \frac{1}{\omega^\varkappa} \left[(\omega - \lambda_\mu)^\varkappa - (\omega - \lambda_{\mu+1})^\varkappa\right] \Lambda_m^\varkappa \, |\Delta\lambda_m|^{k+1} \, \frac{s_{m\mu}}{\eta_m}$$

$$= \frac{\Lambda_m^\varkappa \, |\Delta\lambda_m|^{k+1}}{\eta_m \, \omega^\varkappa} \, d(\omega) \tag{21}$$

mit

$$d(\omega) = \sum_{\mu=m}^{m+k} \left[(\omega - \lambda_\mu)^\varkappa - (\omega - \lambda_{\mu+1})^\varkappa\right] s_{m\mu}$$

$$= \sum_{\mu=m}^{m+k+1} (\omega - \lambda_\mu)^\varkappa \left\{ \prod_{\nu=m}^{m+k+1}{}' (\lambda_\mu - \lambda_\nu) \right\}^{-1}. \tag{22}$$

Die Gleichung (22) entsteht, wenn man neben den Definitionsformeln (11) die Identität

$$\sum_{\mu=m}^{m+k+1} \left\{ \prod_{\nu=m}^{m+k+1}{}' (\lambda_\mu - \lambda_\nu) \right\}^{-1} = 0 \tag{23}$$

heranzieht. Wir sehen, daß $d(\omega)$ nichts weiter ist als die Steigung $(k+1)$-ter Ordnung der Funktion $(\omega - x)^\varkappa$, und (23) bedeutet eben, daß die Steigung der Konstanten 1 gleich 0 ist. Der Mittelwertsatz für Steigungen dieser Art erlaubt uns nun, $d(\omega)$ und die Ableitung $d'(\omega)$ für $\omega > \lambda_{m+k+1}$ zu berechnen:

$$d(\omega) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \, \varkappa(\varkappa - 1) \ldots (\varkappa - k) \, (\omega - \xi_m)^{\varkappa-(k+1)},$$

$$d'(\omega) = \varkappa \, \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \, (\varkappa - 1) \ldots (\varkappa - k) \, (\varkappa - k - 1) \, (\omega - \xi'_m)^{\varkappa-1-(k+1)}.$$

Wir finden so $\frac{d'(\omega)}{d(\omega)} \leqq 0$, d. h. $|d(\omega)|$ fällt monoton; speziell ist also

$$|d(\omega)| \leqq |d(\lambda_{m+k+1})| \qquad \text{für } \omega > \lambda_{m+k+1}. \tag{24}$$

Mit (24) und (21) haben wir wegen (15)

$$|\mathrm{II}_2| \leqq \frac{1}{|\eta_m|} \, \frac{\Lambda_m \, |\Delta\lambda_m|^{k+1}}{\lambda_{m+k+1}^\varkappa} \, |d(\lambda_{m+k+1})|$$

$$\leqq \frac{1}{|\eta_m|} \, \frac{\Lambda_m \, |\Delta\lambda_m|^{k+1}}{\lambda_{m+k+1}^\varkappa} \sum_m^{m+k} (\lambda_{m+k+1} - \lambda_\mu)^\varkappa \, |s_{m\mu}|$$

$$= O\left(\frac{1}{\eta_m}\right) = o(1). \tag{20''}$$

(20′) und (20″) zusammen ergeben (20), q. e. d.

4. 2. *Die Zahlenfolge s_n hat die Eigenschaft* (1°).

Es genügt zu zeigen, daß (1°) für $n = n_\nu = m$ erfüllt. Da wegen (13)

$$s_m = a_m = \Lambda_m^\varkappa \, |\Delta\lambda_m|^{k+1} \, \frac{s_{mm}}{\eta_m}$$

ist, läuft dies auf den Beweis von

$$|\Delta\lambda_m|^{k+1} s_{mm} \neq o(1) \tag{25}$$

hinaus. Die Bedingung (25) ist aber erfüllt, da wegen (15) sogar

$$\{|\Delta\lambda_m|^{k+1} s_{mm}\}^{-1} = O(1)$$

ist.

Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis.

Bosanquet, L. S.

[1] Note on the Bohr-Hardy theorem, Journal London Math. Soc. 17 (1942), 166—173.

[2] Note on convergence and summability factors, Journal London Math. Soc. 20 (1945), 39—48.

[3] Note on convergence and summability factors II, Proc. London Math. Soc. (2), 50 (1948), 295—304.

[4] Note on convergence and summability factors III, Proc. London Math. Soc. (2), 50 (1949), 482—496.

Hardy, G. H. — Riesz, M.

[5] The general theory of Dirichlet's series, Cambridge (1915).

Knopp, K.

[6] Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl. Berlin—Heidelberg (1947).

[7] Beweis eines von J. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes, Journal f. Math. 187 (1950), 70—74.

Moore, C. N.

[8] On convergence factors for series summable by Nörlund means, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 21 (1935), 263—266.

[9] Summable series and convergence factors, New York (1938).

Peyerimhoff, A.

[10] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Diss. Tübingen (1951).

Schur, J.

[11] Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journal f. Math. 151 (1921), 79—111.

Zygmund, A.

[12] Trigonometrical series, Warszawa—Lwów (1935).

(Eingegangen am 16. März 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 3, S. 272—274 (1951).

Inequalities for Riemann-Stieltjes Integrals.

by

J. D. Weston in Newcastle upon Tyne (England).

The theorem of bounded convergence for RIEMANN integrals has been known since 1885, when it was proved by ARZELÀ, and an elementary proof (not dependent on the theory of LEBESGUE measure) was given by HAUSDORFF in 1927 [1]). In this note a pair of inequalities for upper and lower RIEMANN-STIELTJES integrals is obtained, from which the theorem of bounded convergence follows trivially. The argument used is quite different from that of HAUSDORFF, but no less elementary.

Let S be an interval, or a finite set of non-overlapping intervals, and let $\alpha(x)$ be a bounded non-decreasing function in S. If $f = f(x)$ is any real function bounded in S, let $\bar{J}(f)$ and $\underline{J}(f)$ be its upper and lower RIEMANN-STIELTJES integrals with respect to $\alpha(x)$ over S. The following lemma is easily proved by a routine argument.

Lemma. *If f and g are functions bounded in S then*

$$\underline{J}(f+g) \leqq \underline{J}(f) + \bar{J}(g) \leqq \bar{J}(f+g).$$

The main result is the following

Theorem. *Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions uniformly bounded in S. Then*

$$\underline{J}(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leqq \liminf_{n\to\infty} \bar{J}(f_n)$$

and

$$\bar{J}(\limsup_{n\to\infty} f_n) \geqq \limsup_{n\to\infty} \underline{J}(f_n).$$

Proof. It is sufficient to establish the first inequality. Suppose, then, that it does not hold; this implies the existence of a positive number ε such that

$$\bar{J}(f_n) < \underline{J}(\liminf_{n\to\infty} f_n) - 2\varepsilon\Delta$$

for infinitely many values of n, where Δ is the total variation of $\alpha(x)$ in S and is positive. Let $g_n = f_n - \liminf_{n\to\infty} f_n$. Then the functions g_n are uniformly bounded, say

$$|g_n(x)| < M,$$

[1]) See ROGOSINSKI's Fouriersche Reihen (1930), pp. 120–122.

and, by the second inequality of the lemma (with $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ and $g = g_n$),

$$\bar{J}(g_n) < -\varepsilon \Delta$$

for infinitely many values of n. Let n_1 be one of these values. Then S can be divided into non-overlapping intervals $I_1, \ldots, I_k$ such that

$$\sum_{\nu=1}^{k} M_\nu(g_{n_1})\delta_\nu < -\tfrac{1}{2}\varepsilon \Delta,$$

where $M_\nu(g_{n_1}) = \sup g_{n_1}(x)$ for x in I_ν, and δ_ν is the total variation of $\alpha(x)$ in I_ν. Let S_1 be the set of those intervals I_ν for which $M_\nu(g_{n_1}) < -\frac{1}{4}\varepsilon$, and let Δ_1 be the total variation of $\alpha(x)$ in S_1. Then

$$-M\Delta_1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon(\Delta - \Delta_1) < \sum_{\nu=1}^{k} M_\nu(g_{n_1})\delta_\nu < -\tfrac{1}{2}\varepsilon\Delta,$$

so that

$$\Delta_1 > \eta\Delta,$$

where $\eta = \frac{1}{4}\varepsilon/(M - \frac{1}{4}\varepsilon) > 0$.

Now $\bar{J}_1(g_n)$, the upper integral of g_n over S_1, may satisfy the inequality $\bar{J}_1(g_n) < -\varepsilon\Delta_1$ for infinitely many values of n; if it does not, let S_2 be the set of intervals complementary to S_1 with respect to S, and let $J_2(g_n)$ be the corresponding upper integral. Then $\bar{J}_2(g_n) < -\varepsilon(\Delta - \Delta_1)$ for infinitely many values of n, and we can choose one of these values, n_2, so that $\bar{J}_1(g_n) \geqslant -\varepsilon\Delta_1$ whenever $n > n_2$. Arguing as in the last paragraph with n_2 in place of n_1 and S_2 in place of S, we find that S_2 contains a set S_3 of non-overlapping intervals throughout which $g_{n_1}(x) < -\frac{1}{4}\varepsilon$, and such that $\Delta_3 > \eta(\Delta - \Delta_1)$, where Δ_3 is the total variation of $\alpha(x)$ in S_3. If S_4 is the complement of S_3 with respect to S_2, the total variation of $\alpha(x)$ in S_4 is $\Delta - \Delta_1 - \Delta_3 < (1-\eta)^2\Delta$. If $\bar{J}_3(g_n) < -\varepsilon\Delta_3$ for only a finite number of values of n, we similarly divide S_4 into two sets of intervals S_5 and S_6.

Suppose that this process is repeated indefinitely. At the mth stage S is dissected into $m+1$ sets of intervals $S_1, S_3, \ldots, S_{2m-1}, S_{2m}$ such that

$$\bar{J}_1(g_n) + \bar{J}_3(g_n) + \ldots + \bar{J}_{2m-1}(g_n) \geqslant -\varepsilon(\Delta_1 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_{2m-1})$$

whenever $n \geqslant n_m$, and the total variation of $\alpha(x)$ in S_{2m} does not exceed $(1-\eta)^m\Delta$. We can choose m so that $(1-\eta)^m < \frac{1}{2}\varepsilon/\mathrm{M}$, and we then have

$$\begin{aligned}\bar{J}(g_n) &= \bar{J}_1(g_n) + \bar{J}_3(g_n) + \ldots + \bar{J}_{2m-1}(g_n) + \bar{J}_{2m}(g_n)\\ &> -\varepsilon(\Delta_1 + \Delta_3 + \ldots + \Delta_{2m-1}) - \tfrac{1}{2}\varepsilon\Delta > -\tfrac{3}{2}\varepsilon\Delta,\end{aligned}$$

whenever $n \geqslant n_m$. This contradicts the hypothesis that $\bar{J}(g_n) < -2\varepsilon\Delta$ for infinitely many values of n. Retaining this hypothesis, we conclude that the process cannot be repeated indefinitely; there is thus an m such that

$$\bar{J}_{2m-1}(g_n) < -\varepsilon\Delta_{2m-1}$$

for infinitely many values of n; and we note that $g_{n_m}(x) < -\frac{1}{4}\varepsilon$ throughout S_{2m-1}.

We now construct a sequence of sets $\{S^{(i)}\}$ and an unbounded sequence of integers $\{N_i\}$ as follows: $S^{(1)}$ is S_{2m-1} and N_1 is n_m: for $i > 1$, $S^{(i)}$ is obtained from $S^{(i-1)}$ in the same way as $S^{(1)}$ is obtained from S, and N_i is any integer such that $N_i > N_{i-1}$ and $g_{N_i}(x) < -\frac{1}{4}\varepsilon$ throughout $S^{(i)}$. The sets $S^{(i)}$ have at least one point in common, and if ξ is such a point then $g_{N_i}(\xi) < -\frac{1}{4}\varepsilon$ for every N_i. This is inconsistent with the definition of g_n. The first inequality of the theorem is therefore established.

Corollary. (Theorem of bounded convergence.) *Let $\alpha(x)$ be a function of bounded variation in S and let $\{f_n\}$ be a convergent sequence of functions uniformly bounded in S. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n \, d\alpha(x) = \int_S (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\alpha(x)$$

if the integrals exist in the Riemann-Stieltjes *sense.*

(Eingegangen am 27. März 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 3, S. 275—290 (1951).

Maß und Integral in der konstruktiven Analysis.

Von

Paul Lorenzen in Bonn.

Die konstruktive Analysis, wie sie in meiner Arbeit[1]) über die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis entwickelt wurde, unterscheidet sich von der klassischen Analysis vor allem dadurch, daß in ihr (wie auch schon in der WEYLschen Analysis) die Grundbegriffe der reellen Zahl, Menge, Folge und Funktion definiert sind mit Hilfe von Aussagen. Dadurch macht die konstruktive Analysis nur Aussagen über endliche Zeichen, bleibt also — absolut gesprochen — stets im Abzählbaren. Die klassischen Definitionen vom Grenzwert, Stetigkeit usw. und die klassischen Sätze einschließlich der Beweise erfahren dagegen gar keine oder nur eine sehr geringfügige Modifikation. Es ist daher selbstverständlich, daß auch die klassische Differential- und Integralrechnung (RIEMANNsches Integral) ohne jede Schwierigkeit auf der konstruktiven Grundlage aufgebaut werden kann.

Auf den ersten Blick zweifelhaft mag jedoch erscheinen, ob auch die moderne Theorie von Maß und Integral (LEBESGUE u. a.) konstruktiv begründet werden kann. Wenn z. B. das äußere Maß einer Menge M mit Hilfe *aller* offenen Obermengen von M definiert wird, so ist bei Übertragung dieser Definition in die konstruktive Theorie zu erwarten, daß das äußere Maß im allgemeinen keine reelle, sondern eine hyperreelle Zahl sein wird.

Interessanterweise ist das äußere und innere Maß auch schon von den zur konstruktiven Mathematik neigenden Analytikern der Pariser Schule (BOREL u. a) einer Kritik unterzogen. DE LA VALLÉE-POUSSIN definiert in „Intégrales de LEBESGUE" (Paris, 2. Aufl. 1934) nur Meßbarkeit und Maß mit Hilfe gleichzeitiger Approximation von außen und innen.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Theorie von Maß und Integral in dieser Form ebenso wie die klassische Analysis fast ohne Änderung in die konstruktive Mathematik übernommen werden kann. Um nicht mit Bekanntem zu langweilen, sind daher viele Beweise nur skizziert. In §§ 1—4 wird das Maß definiert und die Volladditivität bewiesen, in §§ 5—6 das Integral und seine Vollinearität eingeführt. Als eine der für die klassische Analysis — wie es scheint — wichtigsten Anwendungen des LEBESGUEschen Integrals wird in § 7 die metrische

[1]) P. LORENZEN, Math. Zeitschr. **54**, 1—24 (1951); zitiert als L_2.

Vollständigkeit des Raumes der quadratisch integrierbaren Funktionen auf einer meßbaren Menge M bezüglich

$$\varrho(f, g) = \sqrt{\int_M (f-g)^2}$$

behandelt.

Daß bei den Beweisen keine Modifikation notwendig ist, ist deshalb bemerkenswert, weil es durchaus möglich gewesen wäre, daß die naive Analysis viel häufiger Definitionen aufgestellt hätte, die konstruktiv „nicht zu retten" wären. Es scheint mir daher gerechtfertigt, anzunehmen, daß die Schöpfer der modernen Analysis weithin ein sicheres Gefühl für das Konstruktive besessen haben.

Die Kenntnis der Arbeit L_2 wird vorausgesetzt, dagegen nicht meine Arbeit[2]) über konstruktive Begründung der Mathematik. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei bemerkt, daß der Terminus konstruktiv hier nicht — wie in L_1 — als Gegensatz zu fiktiv (die fiktive Logik ist die Logik, die von der Fiktion des tertium non datur uneingeschränkt Gebrauch macht) benutzt wird, sondern nur im Gegensatz zu „naiv oder axiomatisch". Auf Grund der Widerspruchsfreiheit des tertium non datur wird stets die fiktive Logik als ein zweckmäßiges Konstruktionsmittel verwendet. Für die nicht-fiktive Logik scheint mir der Name effektive Logik geeigneter. Die wichtige Frage, welche Sätze der klassischen und modernen Analysis bei einer (möglichen, aber nicht notwendigen) Beschränkung auf die effektive Logik erhalten bleiben, wird auch in dieser Arbeit — wie in L_2 — nicht untersucht.

§ 1.

Der n-dimensionale Zahlenraum.

Wir übernehmen aus L_2 die Definition der reellen Zahlen als der Zeichen fin M, bei denen $M = \mathsf{M}_r A(r)$ eine Menge von rationalen Zahlen ist, die durch die — zu einer endlichen Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ gehörigen — Aussage $A(r)$ definiert wird.

$r, s, \ldots$ seien Variable für rationale Zahlen, $x, y, \ldots$ Variable für reelle Zahlen. n-gliedrige Systeme $x_1, \ldots, x_n$ nennen wir Punkte des n-dimensionalen Zahlenraumes (Variable: $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots$). Systeme $r_1, \ldots, r_n$ (Variable: $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \ldots$) heißen rationale Punkte. Mengen bzw. Hypermengen (Variable: $M, N, \ldots$) von Punkten werden durch Aussagen bzw. Hyperaussagen

$$A(\mathfrak{x}) = A(x_1, \ldots, x_n)$$

definiert:

$$M = \mathsf{M}_\mathfrak{x} A(\mathfrak{x}).$$

---

[2]) P. Lorenzen, Math. Zeitschr. **53**, 162—202 (1950); zitiert als L_1.

Funktionen bzw. Hyperfunktionen (Variable: $f, g, \ldots$) von Punkten werden durch Aussagen bzw. Hyperaussagen $A(\mathfrak{x}, y)$ definiert mit

$$A(\mathfrak{x}, y_1) \frown A(\mathfrak{x}, y_2) \to y_1 = y_2.$$

Wir schreiben dann $y_0 = \mathsf{T}_y A(\mathfrak{x}, y)$ oder $y_0 = f(\mathfrak{x})$ für $A(\mathfrak{x}, y_0)$ mit $f = \Phi_{\mathfrak{x}} \mathsf{T}_y A(\mathfrak{x}, y)$.

Funktionen bzw. Hyperfunktionen mit der Menge aller Kardinalzahlen (der sogenannten natürlichen Zahlen, Variable: $k, l, \ldots$) als Existenzbereich nennen wir Folgen bzw. Hyperfolgen. Sind die Werte einer Hyperfolge Punkte, so bezeichnen wir die Hyperfolge durch $\mathfrak{x}^*$ (oder auch $\mathfrak{x}_0^*, \mathfrak{y}^*, \ldots$) und ihre Glieder durch $\mathfrak{x}^{(k)}$. Also $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots\ldots$ (mit fünf Punkten).

Hyperfolgen von rationalen Punkten, von Mengen, ... bezeichnen wir entsprechend durch $\mathfrak{r}^*, M^*, \ldots$.

Im Unterschied zu der mißverständlichen Bezeichnung $\mathsf{T}_{0k} A(k)$ in L_2 schreiben wir für die kleinste Kardinalzahl k, für die $A(k)$ gilt, jetzt im Anschluß an das Hilbertsche ε-Symbol: $\mathsf{E}_k A(k)$.

Für zwei Punkte $\mathfrak{x} = x_1, \ldots, x_n$ und $\mathfrak{y} = y_1, \ldots, y_n$ definieren wir $\mathfrak{x} < \mathfrak{y}$ bzw. $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{y}$ durch

$$x_1 < y_1 \frown x_2 < y_2 \frown \cdots \frown x_n < y_n \text{ bzw. } x_1 \leqq y_1 \frown x_2 \leqq y_2 \frown \cdots \frown x_n \leqq y_n.$$

Die Übertragung der Sätze aus L_2, § 3 (Konvergenzkriterium von Cauchy, Kompaktheitskriterium von Bolzano-Weierstrass, und ähnliches) läßt sich ohne weiteres durchführen. Verzichtet man auf die (allerdings sofort mögliche) Einführung des Abstandes, so läßt sich z. B. definieren:

$\mathfrak{x}_0$ Häufungspunkt von $\mathfrak{x}^* \longleftrightarrow \underset{\mathfrak{r}_1 < \mathfrak{x}_0 < \mathfrak{r}_2}{\wedge_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2}} \wedge_{k_0} \vee_k (k > k_0 \frown \mathfrak{r}_1 < \mathfrak{x}^{(k)} < \mathfrak{r}_2)$

M beschränkt $\longleftrightarrow \vee_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2} \wedge_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{x} \in M \to \mathfrak{r}_1 < \mathfrak{x} < \mathfrak{r}_2)$.

Allgemein gesprochen empfiehlt es sich, für die konstruktive Analysis alle Hilfspunkte (hier z. B. die Endpunkte der Intervalle) wenn möglich als rational anzunehmen. Die naive Analysis verwendet dagegen gern überflüssigerweise alle reellen Punkte. Wie in L_2 benutzen wir $\delta, \varepsilon, \ldots$ stets als Variable für positive rationale Zahlen.

§ 2.

Intervalle und offene Hypermengen.

Für eine Strecke $\mathfrak{u} = \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ mit $\mathfrak{x}_1 < \mathfrak{x}_2$ definieren wir das offene Intervall $(\mathfrak{u}) = \mathsf{M}_{\mathfrak{x}} \mathfrak{x}_1 < \mathfrak{x} < \mathfrak{x}_2$ und das abgeschlossene Intervall

$$[\mathfrak{u}] = \mathsf{M}_{\mathfrak{x}} \mathfrak{x}_1 \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{x}_2.$$

Jede Hypermenge M mit $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) \subset M \subset [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2]$ nennen wir ein Intervall mit den Endpunkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$. Als Variable für Intervalle benutzen wir $I, \ldots$. Ist I ein Intervall mit den Endpunkten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$, so sei $\underline{I} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$.

$\bar{I} = [\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2]$. Zwei Intervalle I_1, I_2 heißen kernfremd, wenn $\underline{I}_1 \cap \underline{I}_2 = \bigcap$ ($\bigcap$ sei die leere Menge). Elementare Eigenschaften der Intervalle setzen wir als bekannt voraus, z. B. (1) der Durchschnitt nicht fremder offener Intervalle ist ein offenes Intervall, (2) die Differenz $\bar{I}_1 \smile \underline{I}_2$ (nur wenn $M > N$, schreiben wir $M - N$ statt $M \smile N$) ist Vereinigung endlich vieler kernfremder abgeschlossener Intervalle, (3) das Komplement $-\bar{I}$ (wir bilden immer das Komplement zum Gesamtraum) ist Vereinigung von offenen Intervallen (die Folge der rationalen Endpunkte kann leicht konstruiert werden), (4) für das Maß μI (sind die Endpunkte von I: $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$, dann ist $\mu I = (y_1 - x_1) \ldots (y_n - x_n)$) gilt bei paarweise kernfremden $I_1, \ldots, I_\varkappa$:

$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_\varkappa < I'_1 \cup \cdots \cup I'_\lambda \to \mu I_1 + \cdots + \mu I_\varkappa \leqq \mu I'_1 + \cdots + \mu I'_\lambda .$$

Nennen wir wie in L_2 eine Hypermenge M offen, wenn es eine *Menge* N von Strecken mit $M = \bigcup_N (\mathfrak{u})$ gibt, dann können in dieser Definition ohne Einschränkung die Endpunkte von $\mathfrak{u}$ als rational angenommen werden. Es gilt ja

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \bigcup_{\mathfrak{x}_1 \leqq \mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{x}_2} (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2).$$

Mit Hilfe der Folge aller rationalen Punkte ergibt sich hieraus für jede offene Hypermenge M die Existenz einer Folge $\mathfrak{u}^*$ rationaler Strecken mit $M = \bigcup(\mathfrak{u}^*)$. Aus

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \bigcup_{\mathfrak{x}_1 < \mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}_2 < \mathfrak{x}_2} [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2]$$

folgt ebenso, daß es für jede offene Hypermenge eine Folge $\mathfrak{u}^*$ rationaler Strecken mit $M = \bigcup[\mathfrak{u}^*]$ gibt. Zur Vereinfachung des Ausdrucks werden wir meist von Folgen von Intervallen sprechen, dann soll aber stets die Folge der Strecken der Endpunkte gemeint sein.

Neben dem linearen Struktursatz (L_2, Satz 7) gilt

Satz 1 (Struktursatz). *Zu jeder offenen Hypermenge M gibt es eine paarweise kernfremde Folge rationaler Intervalle I^* mit $M = \bigcup \bar{I}^*$.*

Beweis. In einer Darstellung

$$\begin{aligned} M = \bigcup \bar{I}_0^* &= \bar{I}_0^{(1)} + (\bar{I}_0^{(2)} \smile \bar{I}_0^{(1)}) + \cdots \\ &= \bar{I}_0^{(1)} \cup (\bar{I}_0^{(2)} \smile \underline{I}_0^{(1)}) \cup (\bar{I}_0^{(3)} \smile \underline{I}_0^{(1)} \smile \underline{I}_0^{(2)}) \cup \cdots \end{aligned}$$

(nur bei paarweise fremden Mengen schreiben wir + statt $\cup$) läßt sich jede Differenz durch eine Vereinigung endlich vieler paarweise kernfremder abgeschlossener Intervalle ersetzen. (Für die mehrfachen Differenzen ist

$$(M_1 \cup M_2 \cup \cdots) \smile M = (M_1 \smile M) \cup (M_2 \smile M) \cup \cdots$$

anzuwenden.)

Der Überdeckungssatz von HEINE-BOREL gilt wörtlich wie in $\mathbf{L}_2$ (Definition 4, Satz 5): Jede offene Überdeckung eines abgeschlossenen Intervalles enthält eine endliche Untermenge, die ebenfalls eine offene Überdeckung des Intervalles ist.

Der Beweis kann durch Induktion nach der Dimension geführt werden. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial und wir setzen sie jetzt für n voraus. Bei einer offenen Überdeckung eines $n+1$-dimensionalen Intervalles $[y_0, \mathfrak{x}_0; y_1, \mathfrak{x}_1]$ wird die *Menge* M der rationalen Zahlen r gebildet, für die es eine endliche Teilüberdeckung von $[y_0, \mathfrak{x}_0; r, \mathfrak{x}_1]$ gibt. Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus $y \in [y_0, y_1]$ die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung von $[y, \mathfrak{x}_0; y, \mathfrak{x}_1]$. Diese überdeckt auch ein Intervall $[y-\varepsilon, \mathfrak{x}_0\ y+\varepsilon, \mathfrak{x}_1]$. Daher ist M nicht leer und für $y = \overline{\text{fin}}\, M$ führt $y \in [y_0, y_1]$ zum Widerspruch. Denn es gibt eine endliche Teilüberdeckung von $[y_0, \mathfrak{x}_0; y-\varepsilon, \mathfrak{x}_1]$ und es ergäbe sich also eine endliche Teilüberdeckung von $[y_0, \mathfrak{x}_0; y+\varepsilon, \mathfrak{x}_1]$. Aus $\overline{\text{fin}}\, M > y_1$ folgt die Behauptung.

Auf die leicht zu erhaltenden Verallgemeinerungen des Überdeckungssatzes können wir hier verzichten. Wichtig ist nur, daß aus dem Überdeckungssatz wie in $\mathbf{L}_2$ (vgl. Satz 8) das für die Maßtheorie fundamentale BORELsche Lemma folgt:

Satz 2. *Gilt für zwei Intervallfolgen I_1^*, I_2^* — von denen I_1^* paarweise kernfremd sei — $\bigcup I_1^* < \bigcup I_2^*$, dann ist $\sum \mu I_1^* \leqq \sum \mu I_2^*$.*

§ 3.

Das Maß von Intervallsummen.

Während auf Grund der elementaren Eigenschaften des Intervallmaßes nur für jede endliche Intervallsumme $M = I_1 \cup \cdots \cup I_\varkappa$ mit paarweise kernfremden $I_1, \ldots, I_\varkappa$ definiert werden kann:

$$\mu M = \mu I_1 + \cdots + \mu I_\varkappa,$$

kann auf Grund des BORELschen Lemmas auch für unendliche Intervallsummen $M = \bigcup I^*$, falls I^* paarweise kernfremd ist, gesetzt werden: $\mu M = \sum \mu I^*$. Von einer Intervallsumme $M = \bigcup I^*$ (I^* paarweise kernfremd) setzen wir stets voraus, daß die zugehörigen Strecken durch eine Folge (nicht nur Hyperfolge) gegeben sind. Diese Hypermengen gehören also gewissermaßen nur scheinbar zu den Hyperschichten, ihre Untersuchung läßt sich stets auf die Untersuchung rationaler Punktfolgen reduzieren. Insbesondere ist daher für jede Intervallsumme M das Maß μM eine reelle Zahl (nicht nur hyperreell), und zwar eine endliche reelle Zahl, wenn M beschränkt ist.

Für Darstellungen einer Intervallsumme als Vereinigung von Intervallen gilt

Satz 3.

$$\mu \bigcup I^* = \lim \mu (I^{(1)} \cup I^{(2)} \cup \cdots).$$

(Wir gebrauchen die rechte Seite, in der drei Punkte ... stehen, als Abkürzung für $\lim_k \mu(I^{(1)} \cup I^{(2)} \cup \cdots \cup I^{(k)})$ — entsprechend in ähnlichen Fällen.)

Beweis. Aus

$$\bigcup I^* = I^{(1)} + (I^{(2)} \frown I^{(1)}) + (I^{(3)} \frown I^{(1)} \frown I^{(2)}) + \cdots\cdots$$

folgt

$$\begin{aligned} \mu \bigcup I^* &= \mu I^{(1)} + \mu (I^{(2)} \frown I^{(1)}) + \cdots\cdots \\ &= \lim (\mu I^{(1)} + \mu (I^{(2)} \frown I^{(1)}) + \cdots) \\ &= \lim \mu (I^{(1)} + (I^{(2)} \frown I^{(1)}) + \cdots) \\ &= \lim \mu (I^{(1)} \cup I^{(2)} \cup \cdots). \end{aligned}$$

Da nach Satz 1 jede offene Hypermenge eine Intervallsumme ist (und zwar eine unendliche Summe abgeschlossener Intervalle, da eine endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle nicht offen ist — wie aus dem Überdeckungssatz folgt), erhalten wir für jede beschränkte offene Hypermenge — wir bezeichnen diese durch $\underline{B}$, daher auch kurz als $\underline{B}$-Menge — eine endliche reelle Zahl $\mu \underline{B}$ als Maß. Aus Satz 2 folgt wie üblich

Monotonie: $$\underline{B}_1 \subset \underline{B}_2 \to \mu \underline{B}_1 \leqq \mu \underline{B}_2,$$

Additivität: $$\mu (\underline{B}_1 + \underline{B}_2) = \mu \underline{B}_1 + \mu \underline{B}_2.$$

Zur Formulierung der Volladditivität dieses Maßes haben wir *Folgen* $\underline{B}^*$ zu betrachten — darunter sind jetzt selbstverständlich zu verstehen: Hyperfolgen $\underline{B}^*$, bei denen für $\underline{B}^{(k)} = \bigcup \bar{I}^{(k,*)}$ und $\bar{I}^{(k,l)} = [\mathfrak{r}_1^{(k,l)}, \mathfrak{r}_2^{(k,l)}]$ die Terme $\mathfrak{r}_1^{(k,l)}$ und $\mathfrak{r}_2^{(k,l)}$ durch Aussagen, nicht nur Hyperaussagen definiert sind. Für eine Folge $\underline{B}^*$ ist daher auch $\bigcup \underline{B}^*$ eine offene Hypermenge.

Satz 4. *Ist die aufsteigende Folge* $\underline{B}^{(1)} \subset \underline{B}^{(2)} \subset \cdots\cdots$ *beschränkt, dann gilt*

$$\mu \bigcup \underline{B}^* = \lim \mu \underline{B}^*.$$

Beweis. Es sei $\underline{B}^{(k)} = \bigcup I^{(k,*)}$. Für $\underline{B} = \bigcup \underline{B}^*$ folgt $\underline{B} = \bigcup I^{**} = \bigcup I_0^*$, wenn die Doppelfolge I^{**} zu einer einfachen Folge I_0^* geordnet wird. Nach Satz 3 folgt

$$\wedge_\varepsilon \vee_l \mu (I_0^{(1)} \cup \cdots \cup I_0^{(l)}) > \mu \underline{B} - \varepsilon.$$

Zu jedem l gibt es ferner ein k mit $I_0^{(1)} \cup \cdots \cup I_0^{(l)} \subset \bar{B}^{(k)}$, so daß $\mu \underline{B}^{(k)} > \mu \underline{B} - \varepsilon$ entsteht. Zusammen mit $\mu \underline{B}^{(k)} \leqq \mu \underline{B}$ folgt die Behauptung.

Die Volladditivität

$$\mu \sum \underline{B}^* = \sum \mu \underline{B}^*$$

— wir schreiben nur für Folgen mit paarweise fremden Gliedern Σ statt $\bigcup$ — ist eine triviale Konsequenz von Satz 4.

Eine Hypermenge M, deren Komplement $-M$ offen ist, nennen wir abgeschlossen. Diese Definition ist verträglich mit der Definition abgeschlossener Intervalle. Beschränkte, abgeschlossene Hypermengen bezeichnen wir als $\overline{B}$-Mengen. Ist $\underline{I} > \overline{B}$, dann ist $\underline{I} - \overline{B}$ offen. Wir definieren das Maß von $\overline{B}$-Mengen durch

$$\mu\,\overline{B} = \mu\,\underline{I} - \mu(\underline{I} - \overline{B}).$$

Diese Definition ist ersichtlich unabhängig von $\underline{I}$ und wegen der Additivität verträglich mit der Maßdefinition für Intervallsummen (falls $\overline{B}$ gleichzeitig Intervallsumme sein sollte).

Monotonie und Additivität des Maßes übertragen sich auf $\overline{B}$-Mengen. Für $\underline{B} > \overline{B}$ bzw. $\overline{B} > \underline{B}$ folgt

$$\mu(\underline{B} - \overline{B}) = \mu\,\underline{B} - \mu\,\overline{B} \geqq 0$$

bzw.

$$\mu(\overline{B} - \underline{B}) = \mu\,\overline{B} - \mu\,\underline{B} \geqq 0.$$

Satz 5.

(1) $$\vee_{\overline{B}^*}(\wedge_k \overline{B}^{(k)} < \underline{B} \frown \lim \mu\,\overline{B}^* = \mu\,\underline{B})$$

(2) $$\vee_{\underline{B}^*}(\wedge_k \underline{B}^{(k)} > \overline{B} \frown \lim \mu\,\underline{B}^* = \mu\,\overline{B}).$$

Beweis. (1) Nach Satz 1 gibt es eine Folge I^* mit $\underline{B} = \bigcup \overline{I}^*$. Für $\overline{B}^{(k)} = \overline{I}^{(1)} \cup \cdots \cup \overline{I}^{(k)}$ folgt die Behauptung aus Satz 3.

(2) ergibt sich aus (1), da die zu $\underline{I} - \overline{B}$ gehörige Folge $\overline{B}^*$ eine Folge $\underline{B}^* = \underline{I} - \overline{B}^*$ liefert.

§ 4.

Meßbare Hypermengen.

Auf Grund von Satz 5 ist die folgende Definition eines Maßes für Hypermengen M mit den bisherigen Definitionen eines Maßes für $\underline{B}$- und $\overline{B}$-Mengen verträglich:

$$\mu\,M = x \longleftrightarrow \vee_{\overline{B}^*, \underline{B}^*}(\wedge_k \overline{B}^{(k)} < M < \underline{B}^{(k)} \frown \lim \mu\,\overline{B}^* = x = \lim \mu\,\underline{B}^*).$$

Die Folgen $\overline{B}^*$, $\underline{B}^*$ sollen stets durch Aussagen definierbar sein, daher ist das Maß einer meßbaren Hypermenge eine reelle Zahl. Für eine meßbare Hypermenge M braucht $\mathfrak{x} \in M$ keine Aussage zu sein (bei den bisher betrachteten $\underline{B}$- und $\overline{B}$-Mengen war das der Fall), es könnte erst in einer Hyperschicht liegen. Wie sich im folgenden zeigt, treten solche Hyperaussagen aber praktisch gar nicht auf, — wir werden es immer nur mit den Folgen $\underline{B}^*$, $\overline{B}^*$ zu tun haben.

Auf Grund der in § 3 bewiesenen Monotonie ist selbstverständlich daß Maß μM eindeutig bestimmt, wenn M meßbar ist. Wir nennen die meßbaren Hypermengen kurz μ-Mengen. Die Monotonie und Additivität überträgt sich wieder auf alle μ-Mengen. Die μ-Mengen bilden einen Körper; daher folgt

$$\mu(M_1 - M_2) = \mu M_1 - \mu M_2$$

und

$$\mu(M_1 \frown M_2) = \mu(M_1 \cup M_2) - \mu M_2 = \mu M_1 - \mu(M_1 \cap M_2).$$

Für die Verträglichkeit der Maßdefinition für μ-Mengen mit der Maßdefinition für Intervallsummen brauchen wir die Volladditivität. Dazu sind zunächst *Folgen* von μ-Mengen zu definieren. Zu jeder μ-Menge M gibt es Folgenpaare $\overline{B}^*, \underline{B}^*$ mit

$$\bigcup \overline{B}^* < M < \bigcap \underline{B}^*, \quad \lim \mu \overline{B}^* = \lim \mu \underline{B}^*.$$

Wir wollen sagen, daß $\overline{B}^*, \underline{B}^*$ zu M gehören. Umgekehrt gehört jedes Folgenpaar $\overline{B}^*, \underline{B}^*$ mit $\bigcup \overline{B}^* < \bigcap \underline{B}^*$ und $\lim \mu \overline{B}^* = \lim \mu \underline{B}^*$ zu mindestens einer μ-Menge.

Ist nun eine Hyperfolge M^* von μ-Mengen gegeben, und gibt es außerdem zu jedem k ein Folgenpaar $\overline{B}^{(k,*)}, \underline{B}^{(k,*)}$, so daß $\overline{B}^{(k,*)}, \underline{B}^{(k,*)}$ zu $M^{(k)}$ gehört, so sprechen wir kurz von einer μ-Folge M^*. Die Doppelfolgen $\overline{B}^{**}, \underline{B}^{**}$ sollen hierbei — und das ist selbstverständlich das Entscheidende — durch Aussagen definiert sein. Da z. B. $\underline{B}^{(k,l)}$ seinerseits durch eine Folge von Intervallen, d. h. ein Folgenpaar $\underline{\mathfrak{r}}_1^*, \underline{\mathfrak{r}}_2^*$ rationaler Punkte gegeben ist, müssen bei einer μ-Folge M^* — außer der Hyperfolge M^* selbst — noch vier dreifache Folgen $\overline{\mathfrak{r}}_1^{***}, \overline{\mathfrak{r}}_2^{***}, \underline{\mathfrak{r}}_1^{***}, \underline{\mathfrak{r}}_2^{***}$, rationaler Punkte existieren. Diese dreifachen Folgen sollen also durch Aussagen gemäß $\mathfrak{r}^{(k_1,k_2,k_3)} = \mathfrak{r}_0 \longleftrightarrow A(k_1, k_2, k_3, \mathfrak{r}_0)$ definiert sein.

Satz 6. *Ist die aufsteigende μ-Folge M^* beschränkt, dann gilt*

$$\mu \bigcup M^* = \lim \mu M^*.$$

Beweis. Zu $M^{(k)}$ gibt es ein Folgenpaar $\overline{B}^{(k,*)}, \underline{B}^{(k,*)}$. Es sei $\lim \delta^* = 0$ und für jedes l eine Folge ε^* mit $\sum \varepsilon^* = \delta^{(l)}$ definiert. Wir setzen

$$l_0^{(k)} = \mathsf{E}_{l_0} \mu(\underline{B}^{(k,l_0)} - \overline{B}^{(k,l_0)}) < \varepsilon^{(k)}$$

und

$$\overline{B}_0^{(k)} = \overline{B}^{(k,l_0^{(k)})}, \quad \underline{B}_0^{(k)} = \underline{B}^{(k,l_0^{(k)})}.$$

$\overline{B}_0^*$ bzw. $\underline{B}_0^*$ ist nach Voraussetzung eine Folge von $\overline{B}$- bzw. $\underline{B}$-Mengen (die noch von l abhängt), daher ebenso $\overline{B}_l^*, \underline{B}_l^*$ mit

$$\overline{B}_l^{(k)} = \overline{B}_0^{(1)} \cup \cdots \cup \overline{B}_0^{(k)}$$

$$\underline{B}_l^{(k)} = \underline{B}_0^{(1)} \cup \cdots \cup \underline{B}_0^{(k)}.$$

Setzen wir noch

$$\underline{B}_l = \bigcup \underline{B}_l^*,$$

dann erhalten wir für $M = \bigcup M^*$

$$\overline{B}_l^{(k)} < M < \underline{B}_l, \quad \overline{B}_l^{(k)} < \underline{B}_l^{(k)}.$$

Wegen

$$\underline{B}_l - \overline{B}_l^{(k)} = (\underline{B}_l - \underline{B}_l^{(k)}) + (\underline{B}_l^{(k)} - \overline{B}_l^{(k)}),$$

$$\vee_k \mu(\underline{B}_l - \underline{B}_l^{(k)}) < \delta^{(l)} \quad \text{(Satz 4)}$$

und

$$\mu(\underline{B}_l^{(k)} - \overline{B}_l^{(k)}) \leqq \sum_{l_0}^{k} \mu(\underline{B}_0^{(l_0)} - \overline{B}_0^{(l_0)}) \leqq \sum \varepsilon^* = \delta^{(l)}$$

folgt

$$\vee_k \mu(\underline{B}_l - \overline{B}_l^{(k)}) < 2\,\delta^{(l)}.$$

Wir setzen

$$k^{(l)} = \mathsf{E}_k \mu(\underline{B}_l - \overline{B}_l^{(k)}) < 2\,\delta^{(l)}.$$

Das Folgenpaar $\underline{B}_1, \underline{B}_2, \ldots\ldots$ und $\overline{B}_1^{(k^{(1)})}, \overline{B}_2^{(k^{(2)})}, \ldots\ldots$ ist zu M gehörig, M also meßbar. Da ferner aus der Monotonie von M^* folgt

$$\overline{B}_l^{(k^{(l)})} < M^{(k^{(l)})} < \underline{B}_l,$$

erhalten wir sofort $\mu M = \lim \mu M^*$.

Die Volladditivität ist wieder eine unmittelbare Konsequenz von Satz 6. Daher gilt — bei dem hier gewählten Sprachgebrauch — daß jede *Menge* das Maß 0 hat, denn jede Menge ist nach L_2 abzählbar. Dieses Resultat steht nur scheinbar im Widerspruch zur naiven Theorie — denn für das, was dort „Menge" heißt, sind hier ja auch Intervalle, $\underline{B}$- und $\overline{B}$-Mengen und alle meßbaren Hypermengen einzusetzen. Diese haben i. a. positives Maß. Ist z. B. $\mathfrak{x}^*$ eine Hyperfolge derart, daß $\mathfrak{x}^{(k)}$ zur Schicht $\mathfrak{S}_k$, aber keiner niedrigeren gehört, so ist $M = \mathsf{M}(\mathfrak{x}^*)$ nicht abzählbar, nur hyperabzählbar. Gibt es zu $\mathfrak{x}^*$ und zu jedem ε jedoch eine rationale Intervallfolge I^* mit $\mathfrak{x}^{(k)} \in I^{(k)}$ und $\sum \mu I^* \leqq \varepsilon$, so folgt auch hier $\mu M = 0$. Die Existenz solcher Intervallfolgen kann aber i. a. nicht erschlossen werden, nur Intervallhyperfolgen sind trivial zu konstruieren — mit diesen ist jedoch nichts über die Meßbarkeit auszumachen.

Das bekannte Vitalische Beispiel einer nicht meßbaren „Menge" (vgl. z. B. E. Kamke, Das Lebesguesche Integral, Leipzig, 1925) liefert hier sofort die Konstruktion einer nicht meßbaren Hypermenge. An Stelle des Auswahlprinzips ist dabei von einer Hyperabzählung aller reellen Zahlen auszugehen.

§ 5.

Meßbare Quasifunktionen.

Mit der Definition des volladditiven Maßes ist grundsätzlich auch schon ein Integralbegriff gegeben. Für eine nicht-negative Hyperfunktion f über einer Hypermenge M braucht ja nur das Integral als das Maß der „Ordinatenmenge"

$$\int_M f = \mu \mathsf{M}_{\mathfrak{x},\,y}\,(\mathfrak{x} \in M \frown 0 \leqq y \leqq f(\mathfrak{x})),$$

definiert zu werden, sofern dieses existiert. (Wir verzichten auf das traditionelle $d\mathfrak{x}$, das erst bei Benutzung von Differentialformen sinnvoll wird, und schreiben statt dessen bei Termen $y(\mathfrak{x})$ entweder $\int_M \Phi_{\mathfrak{x}}\, y(\mathfrak{x})$ oder $\int_M{}_{\mathfrak{x}}\, y(\mathfrak{x})$.)

Zum Beweis der Linearität des Integrales ist es jedoch zweckmäßig, zunächst den naiven Begriff der meßbaren Funktion zu übertragen. Diese bilden in der naiven Analysis einen Funktionenraum, der abgeschlossen ist bezüglich solcher Operationen wie $\underline{\text{fin}}\, f^*$, $\lim f^*$, ... Dieselbe Abgeschlossenheit erreichen wir dadurch, daß wir uns auf Quasifunktionen beschränken (vgl. L_2, § 6, insbesondere Satz 13). Wir betrachten Quasifunktionen f, die über einer μ-Menge M definiert seien. Eine Quasifunktion f heiße meßbar (kurz: eine μ-Funktion), wenn für alle rationalen Zahlen r:

$$\mu(f, r) = \mu \underset{M}{\mathsf{M}}_{\mathfrak{x}}\, f(\mathfrak{x}) \geqq r = \mu \mathsf{M}_{\mathfrak{x}}\,(\mathfrak{x} \in M \frown f(\mathfrak{x}) \geqq r)$$

existiert, genauer: wenn die Mengen $\underset{M}{\mathsf{M}}_{\mathfrak{x}}\, f(\mathfrak{x}) \geqq r$ — kürzer $\mathsf{M}\,(f \geqq r)$ — meßbar sind und zwar so, daß es zugehörige Folgen $\overline{B}^*(r)$, $\underline{B}^*(r)$ gibt, die durch Aussagen definierbar sind. Für $\underline{B}^{(k)}(r) = \bigcup \underline{l}^{(k,*)}(r)$ sollen also die Endpunkte $\mathfrak{x}_1^{(k,l)}(r)$ und $\mathfrak{x}_2^{(k,l)}(r)$ von $\underline{l}^{(k,l)}(r)$ Terme sein, d. h. durch Aussagen definierbar sein, und nicht nur Hyperterme.

Nach dieser Definition ist für jede μ-Funktion f und jede reelle Zahl $y = \overline{\text{fin}}\, r^*$ (mit einer Folge r^*) auch $M^* = \mathsf{M}(f \geqq r^*)$ eine μ-Folge und daher $\mathsf{M}(f \geqq y) = \bigcap M^*$ ebenfalls eine μ-Menge.

Die Hyperfunktion

$$\mu(f) = \Phi_y\, \mu(f, y) = \Phi_y\, \mu\, \mathsf{M}(f \geqq y)$$

ist eine Quasifunktion, denn zunächst ist $\mu(f, r)$ durch einen Term definierbar und

$$\mu(f, y) = \underline{\text{fin}}\, \mu(f, r^*) \quad \text{für} \quad y = \overline{\text{fin}}\, r^*,$$

also $\mu(f, y)$ auch für alle Argumente y einer Schicht $\mathfrak{S}_\varkappa$ durch einen Term definierbar.

Für eine μ-Funktion f und eine reelle Konstante c sind auch $f+c$ und $c \cdot f$ μ-Funktionen (für $c = \operatorname{fin} r^*$ ist z. B. $\mathsf{M}(f+c \geqq r) = \mathsf{M}(f \geqq r-c) = \bigcap \mathsf{M}(f \geqq r - r^*)$). Für jede reelle Zahl y ist auch

$$\mathsf{M}(f < y) = M - \mathsf{M}(f \geqq y)$$

meßbar und daher mit einer weiteren auf M definierten μ-Funktion g auch

$$\mathsf{M}(f < g) = \bigcup_r (\mathsf{M}(f < r) \cap \mathsf{M}(g \geqq r)).$$

Hieraus folgt wie üblich, daß mit f und g auch $f \pm g$, $f \cdot g$ μ-Funktionen sind. Nennen wir eine Quasifolge f^* von μ-Funktionen eine μ-Folge, wenn für die μ-Mengen $\mathsf{M}(f^{(k)} \geqq r)$ zugehörige Folgen $\overline{B}^{(k,*)}(r)$, $\underline{B}^{(k,*)}(r)$ durch Aussagen definierbar sind, so ergibt sich schließlich, daß für jede μ-Folge f^* die Quasifunktion $f = \operatorname{fin} f^*$ wegen $\mathsf{M}(f \geqq r) = \bigcap \mathsf{M}(f^* \geqq r)$ eine μ-Funktion ist. Konvergiert eine μ-Folge f^*, dann ist $f = \lim f^*$ meßbar.

Wegen $|f| = \max(f, -f)$ ist mit f auch $|f|$ meßbar.

§ 6.

Das Integral von μ-Funktionen.

Es seien zunächst $f, g, \ldots$ beschränkte μ-Funktionen, definiert auf einer μ-Menge. Es sei $|f(\underset{\sim}{x})| \leqq r$ im Definitionsbereich M und

$$-r = s_1 < s_2 < \cdots < s_{l+1} = r$$

eine rationale Zerlegung $\mathfrak{s}$ von $[-r, r]$.

Wir bilden

$$\underline{S}(f, \mathfrak{s}) = \sum_1^l{}_\lambda \, s_\lambda \, \mu \, \mathsf{M}(s_\lambda \leqq f < s_{\lambda+1})$$

$$\overline{S}(f, \mathfrak{s}) = \sum_1^l{}_\lambda \, s_{\lambda+1} \, \mu \, \mathsf{M}(s_\lambda \leqq f < s_{\lambda+1}).$$

Da f μ-Funktion ist, sind diese Unter- und Obersummen Funktionen von $\mathfrak{s}$, es existieren also die *reellen* Zahlen $\operatorname{fin}_{\mathfrak{s}} \underline{S}(f, \mathfrak{s})$ und $\operatorname{fin}_{\mathfrak{s}} \overline{S}(f, \mathfrak{s})$. Außerdem sind diese Zahlen einander gleich, da sich für zwei Zerlegungen $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ und eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{s}$ sofort ergibt

$$\underline{S}(f, \mathfrak{s}_1) \leqq \underline{S}(f, \mathfrak{s}) \leqq \overline{S}(f, \mathfrak{s}) \leqq \overline{S}(f, \mathfrak{s}_2)$$

und für $\varepsilon = \max_\lambda (s_{\lambda+1} - s_\lambda)$

$$\overline{S}(f, \mathfrak{s}) - \underline{S}(f, \mathfrak{s}) \leqq \varepsilon \sum_\lambda \mu \, \mathsf{M}(s_\lambda \leqq f < s_{\lambda+1}) = \varepsilon \, \mu \, M.$$

Den gemeinsamen Grenzwert bezeichnen wir durch $\int\limits_M f$.

Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar

(1) $$\int\limits_M c = c \, \mu \, M \text{ (für eine Konstante } c)$$

$$c_1 \leqq f \leqq c_2 \rightarrow c_1 \mu M \leqq \int_M f \leqq c_2 \mu M \tag{2}$$

$$\lim \mu M^* = 0 \rightarrow \lim \int_{M^*} f = 0. \tag{3}$$

Für $M = M_1 + M_2$ folgt aus

$$\mathsf{M}_M(s_\lambda \leqq f < s_{\lambda+1}) = \mathsf{M}_{M_1}(s_\lambda \leqq f < s_{\lambda+1}) + \mathsf{M}_{M_2}(s_\lambda \leqq f < s_{\lambda+1})$$

die Additivität des Integrals

$$\int_{M_1+M_2} f = \int_{M_1} f + \int_{M_2} f, \tag{4}$$

und hieraus wegen (3) auch die Volladditivität für μ-Folgen M^* mit beschränkter Summe

$$\int_{\sum M^*} f = \sum \int_{M^*} f, \tag{5}$$

denn für diese gilt

$$\mu \sum M^* = \mu M^{(1)} + \cdots + \mu M^{(k)} + \mu \sum_{k+1}^{\infty}{}_l M^{(l)}$$

und

$$\lim_k \mu \sum_{k+1}^{\infty}{}_l M^{(l)} = 0.$$

Mit (2) und (4) ergibt sich die Monotonie

$$f \leqq g \rightarrow \int_M f \leqq \int_M g \tag{6}$$

und anschließend die Linearität

$$\int_M (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_M f_1 + c_2 \int_M f_2 \tag{7}$$

$$\left| \int_M f \right| \leqq \int_M |f|. \tag{8}$$

Um zu zeigen, daß sich an den Gedankengängen der naiven Analysis nichts ändert außer den zusätzlichen Überlegungen, die feststellen, daß μ-Mengen, μ-Folgen, ... vorliegen, führen wir den Beweis des Lebesgueschen Hauptsatzes durch.

Satz 7. *Konvergiert eine μ-Folge f^* gleichmäßig beschränkter μ-Funktionen, dann gilt*

$$\int_M \lim f^* = \lim \int_M f^*. \tag{9}$$

Beweis. Nach (7) und (8) genügt es $f^{(k)} \geqq 0$ und $\lim f^* = 0$ anzunehmen. Für jedes ε konstruieren wir eine μ-Folge N^* mit

$$N^{(k)} = \bigcap_{l \geq k}{}_l \mathsf{M}(f^{(l)} < \varepsilon).$$

Aus $M = \bigcup N^*$ folgt für $M^{(1)} = N^{(1)}$, $M^{(k+1)} = N^{(k+1)} - N^{(k)}$

$$M = \sum_k M^{(k)}.$$

Auch M^* ist eine μ-Folge und daher gilt nach (5)

$$\int_M f^{(l)} = \sum_k \int_{M^{(k)}} f^{(l)}.$$

Die Konvergenz der unendlichen Reihe ist gleichmäßig bezüglich l, denn aus der gleichmäßigen Beschränktheit $\wedge_l f^{(l)} \leqq r$ folgt

$$\sum_{k_0}^{\infty k} \int_{M^{(k)}} f^{(l)} \leqq r \sum_{k_0}^{\infty k} \mu M^{(k)}$$

und $\sum_k \mu M^{(k)}$ konvergiert gegen μM.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz bezüglich l folgt

$$\vee_{k_0} \wedge_l \int_M f^{(l)} \leqq \sum_1^{k_0 k} \int_{M^{(k)}} f^{(l)} + \varepsilon,$$

also — wegen $\wedge_{l \geqq k} \int_{M^{(k)}} f^{(l)} \leqq \varepsilon \mu M^{(k)}$ —

$$\vee_{k_0} \wedge_{l \geqq k_0} \int_M f^{(l)} \leqq \varepsilon \sum_1^{k_0 k} \mu M^{(k)} + \varepsilon \leqq \varepsilon \mu M + \varepsilon$$

und hieraus

$$\lim \int_M f^* = 0.$$

Zur Integration nicht-beschränkter μ-Funktionen definieren wir im Anschluß an Lebesgue zunächst für nicht-negative μ-Funktionen f:

$$\int_M f = \lim_k \int_M \min(f, k).$$

Ist dieser Limes endlich, dann heißt f integrierbar.

Für beliebiges f sei ${}^+f = \max(f, 0)$ und ${}^-f = \min(f, 0)$. Sind ${}^+f, -{}^-f$ integrierbar, dann heißt auch f integrierbar, und es sei

$$\int_M f = \int_M {}^+f - \int_M -{}^-f = \int_M {}^+f + \int_M {}^-f.$$

Nach diesen Definitionen ist f genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist. Ist $|f| \leqq g$ und g integrierbar, dann ist auch f integrierbar. Zusätzlich zur naiven Theorie hat man sich nur davon zu überzeugen, daß das Integral stets eine reelle Zahl ist. Die Quasifunktionen $\min(f, k)$ sind meßbar und die Quasifolge $\min(f, *)$ ist eine μ-Folge, denn für die μ-Mengen

$$\mathsf{M}(\min(f, k) \geqq r) = \begin{cases} \mathsf{M}(f \geqq r) & \leftarrow k \geqq r \\ \cap & \leftarrow k < r \end{cases}$$

sind zugehörige Folgen $\overline{B}^{(k,*)}(r)$, $\underline{B}^{(k,*)}(r)$ durch Aussagen definierbar. Die Eigenschaften (3)—(8) übertragen sich wörtlich wie in der naiven Theorie von den beschränkten auf die integrierbaren μ-Funktionen

Der Beweis von (9) (Satz 7) läßt sich ebenfalls übertragen, wenn die Voraussetzung der gleichmäßigen Beschränktheit durch die Existenz einer integrierbaren μ-Funktion g als Majorante, d. h. $\bigwedge_{\mathfrak{x}} \bigwedge_{M} \bigwedge_{l} |f^{(l)}(\mathfrak{x})| \leqq g(\mathfrak{x})$ ersetzt wird. (Denn auch aus dieser Voraussetzung folgt die bezüglich l gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_k \int_{M^{(k)}} f^{(l)}$.) Von den Kriterien, aus denen sich die Integrierbarkeit von $f = \lim f^*$ aus der Integrierbarkeit aller $f^{(k)}$ ergibt, führen wir das Fatousche Lemma an.

Satz 8. *Ist f^* eine gleichmäßig nach unten beschränkte μ-Folge integrierbarer μ-Funktionen und ist $\underline{\lim} \int_M f^*$ endlich, dann ist $f = \underline{\lim} f^*$ integrierbar und*

$$\int_M f \leqq \underline{\lim} \int_M f^*.$$

Beweis. Es ergibt sich zunächst, daß $\underline{\lim} \int_M f^*$ reell ist, denn dieser Grenzwert berechnet sich z. B. aus der Untersumme $\underline{S}(\min(f^{(k)}, l), \mathfrak{s})$, die nach Voraussetzung durch einen Term in k, l, $\mathfrak{s}$ definierbar ist.

Wir setzen

$$g^{(k)} = \underline{\text{fin}}(f^{(k)}, f^{(k+1)}, \ldots\ldots).$$

Alle $g^{(k)}$ sind integrierbar, g^* ist eine μ-Folge, und es gilt

$$\lim g^* = \underline{\lim} f^* = f.$$

Aus

$$\int_M g^{(1)} \leqq \int_M g^{(2)} \leqq \cdots\cdots \quad \text{und} \quad \int_M g^{(k)} \leqq \int_M f^{(k)}$$

folgt

$$\lim \int_M g^* \leqq \underline{\lim} \int_M f^*.$$

Wegen

$$\min(f, k) = \lim \min(g^*, k)$$

gilt nach Satz 7:

$$\int_M \min(f, k) = \lim \int_M \min(g^*, k) \leqq \lim \int_M g^*.$$

Hieraus folgt die Integrierbarkeit von f mit

$$\int_M f = \lim_k \int_M \min(f, k) \leqq \underline{\lim} \int_M f^*.$$

§ 7.

Der Raum der quadratisch-integrierbaren μ-Funktionen.

Eine μ-Funktion f heißt (über M) quadratisch-integrierbar, wenn f^2 integrierbar über M ist. Wie üblich beweist man, daß mit f und g

auch $f \pm g$ quadratisch-integrierbare μ-Funktionen sind. Im Raum der über einer μ-Menge M definierten quadratisch-integrierbaren μ-Funktionen setzen wir

$$\varrho(f, g) = \sqrt{\int_M (f-g)^2},$$

ϱ definiert eine Metrik. Eine μ-Folge f^* heißt ϱ-konvergent gegen f, wenn

$$\wedge_\varepsilon \vee_k \wedge_{l \geqq k} \varrho(f^{(l)}, f) < \varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$\wedge_\varepsilon \vee_k \wedge_{l_1, l_2 \geqq k} \varrho(f^{(l_1)}, f^{(l_2)}) < \varepsilon.$$

Eine μ-Folge, die dieser Cauchy-Bedingung genügt, heißt ϱ-konvergent. Die ϱ-Vollständigkeit des Raumes der quadratisch-integrierbaren μ-Funktionen behauptet, daß für jede ϱ-konvergente μ-Folge f^* quadratisch-integrierbarer μ-Funktionen mindestens eine quadratisch-integrierbare μ-Funktion f existiert, so daß f^* ϱ-konvergent gegen f ist.

Satz 9. *Der Raum der quadratisch-integrierbaren μ-Funktionen ist ϱ-vollständig.*

Beweis. Ist eine μ-Folge f^* ϱ-konvergent, so folgt zunächst

$$\wedge_{\varepsilon, \delta} \vee_k \wedge_{l_1, l_2 \geqq k} \int_M |f^{(l_1)} - f^{(l_2)}|^2 < \delta^2 \varepsilon.$$

Wegen

$$\int_M |f^{(l_1)} - f^{(l_2)}|^2 \geqq \delta^2 \mu \mathsf{M}(|f^{(l_1)} - f^{(l_2)}| \geqq \delta)$$

gilt also

$$\wedge_{\varepsilon, \delta} \vee_k \wedge_{l_1, l_2 \geqq k} \mu \mathsf{M}(|f^{(l_1)} - f^{(l_2)}| \geqq \delta) < \varepsilon.$$

Für eine monotone Folge ε^* mit $\sum \varepsilon^* < \infty$ setzen wir

$$k^{(1)} = \mathsf{E}_k \wedge_{l_1, l_2 \geqq k} \mu \mathsf{M}(|f^{(l_1)} - f^{(l_2)}| \geqq \varepsilon^{(1)}) < \varepsilon^{(1)},$$

$$k^{(l+1)} = \mathsf{E}_k (k > k^{(l)} \wedge \wedge_{l_1, l_2 \geqq k} \mu \mathsf{M}(|f^{(l_1)} - f^{(l_2)}| \geqq \varepsilon^{(l+1)}) < \varepsilon^{(l+1)}).$$

k^* ist eine Folge, weil die Hyperaussage $\mu \mathsf{M}(|f^{(l_1)} - f^{(l_2)}| \geqq \varepsilon^{(l)}) < \varepsilon^{(l)}$ durch eine Aussage über eine zu der μ-Menge $\mathsf{M}(|f^{(l_1)} - f^{(l_2)}| \geqq \varepsilon^{(l)})$ gehörige Folge B^* ersetzt werden kann.

Wir setzen $f_0^{(l)} = f^{(k^{(l)})}$. f_0^* ist dann wieder eine μ-Folge.

Aus der Monotonie von ε^* folgt

$$\wedge_{l_1, l_2 \geqq k} \mu \mathsf{M}(|f_0^{(l_1)} - f_0^{(l_2)}| \geqq \varepsilon^{(k)}) < \varepsilon^{(k)}.$$

Für

$$M^{(l)} = \mathsf{M}(|f_0^{(l+1)} - f_0^{(l)}| \geqq \varepsilon^{(l)})$$

$$N^{(l)} = M^{(l)} \cup M^{(l+1)} \cup \cdots, \quad N = \bigcap N^*$$

gilt

$$\mu M^{(l)} < \varepsilon^{(l)}$$
$$\mu N^{(l)} < \varepsilon^{(l)} + \varepsilon^{(l+1)} + \cdots\cdots$$
$$\mu N = 0.$$

Andererseits gilt für alle $\mathfrak{x} \in M - N^{(l)}$

$$\bigwedge_{l_1 \geq l_2 \geq l}^{l_1, l_2} |f_0^{(l_1)}(\mathfrak{x}) - f_0^{(l_2)}(\mathfrak{x})| < \varepsilon^{(l)} + \varepsilon^{(l+1)} + \cdots\cdots,$$

d. h. nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium (vgl. L_2, Satz 2) gilt für alle $\mathfrak{x} \in M - N$:

$$\exists \lim f_0^*(\mathfrak{x}).$$

Wir definieren

$$f(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \lim f_0^*(\mathfrak{x}) & \leftarrow \mathfrak{x} \in M - N \\ 0 & \leftarrow \mathfrak{x} \in N, \end{cases}$$

f ist eine μ-Funktion. Da in $M - N$ gilt

$$\lim (f_0^{(l)}(\mathfrak{x}) - f_0^*(\mathfrak{x}))^2 = (f_0^{(l)}(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{x}))^2$$

und aus der vorausgesetzten ϱ-Konvergenz von f^* folgt

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_{l' \geq l \geq k}^{l, l'} \int_{M-N} (f_0^{(l)} - f_0^{(l')})^2 < \varepsilon^2,$$

gilt

$$\bigvee_k \lim \int_{M-N} (f_0^{(k)} - f_0^*)^2 \leqq \varepsilon^2,$$

also ist nach Satz 8 $f_0^{(k)} - f$ quadratisch-integrierbar über $M - N$, d. h. aber auch über M. Es folgt, daß f quadratisch-integrierbar über M ist und

$$\bigwedge_\varepsilon \bigvee_k \bigwedge_{l \geq k}^{l} \int_M (f_0^{(l)} - f)^2 \leqq \varepsilon^2.$$

Demnach ist f_0^* ϱ-konvergent gegen f, also auch f^* ϱ-konvergent gegen f.

(Eingegangen am 18. April 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 3, S. 291—296 (1951).

Über die Konvergenzabszisse des Laplace-Integrals.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Wenn das LAPLACE-Integral

$$\int_0^\infty e^{-st}\, x(t)\, dt \tag{1}$$

weder beständig noch nirgends konvergiert, so gibt es bekanntlich eine reelle Zahl β, so daß das Integral (1) für $\Re(s) > \beta$, aber nicht für $\Re(s) < \beta$ konvergiert. Die in der Literatur angegebenen Formeln für diese sogen. Konvergenzabszisse β, nämlich

$$\beta = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \left| \int_0^t x(\tau)\, d\tau \right| \tag{2}$$

bzw.

$$\beta = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \left| \int_t^\infty x(\tau)\, d\tau \right|, \tag{3}$$

setzen schon eine gewisse Kenntnis des zu bestimmenden Wertes β voraus. Denn die erste Formel gilt nur dann sicher, wenn $\beta \geqq 0$ ist, die zweite, wenn $\beta < 0$ ist.

Formel (2) wurde für den ähnlich liegenden Fall der (gewöhnlichen) DIRICHLETschen Reihen zuerst 1894 von E. CAHEN [1] bewiesen[1]). Für LAPLACE- (genauer: MELLIN-)Integrale wurde sie 1906 von E. LANDAU [2] aufgestellt. Die durch die Unzulänglichkeit von (2) veranlaßte Ergänzung (3) rührt (wiederum für DIRICHLETsche Reihen) von W. SCHNEE [3] her. Verf. hat 1910 eine Formel angegeben [4], die, die Nachteile von (2) und (3) vermeidend, im Fall der gewöhnlichen DIRICHLETschen Reihen ausnahmslos die Konvergenzabszisse β liefert. Für allgemeine DIRICHLETsche Reihen wurden entsprechende Formeln 1914/15 von T. KOJIMA [5], von M. FUJIWARA [6] und von G. MITTAG-LEFFLER und E. LINDH [7] aufgestellt. Da für LAPLACE-Integrale auch in den neuesten Werken von D. V. WIDDER [8], E. HILLE [9] und G. DOETSCH [10] keine ausnahmslos gültigen Formeln angegeben werden, ist es vielleicht nicht überflüssig, es hier zu tun.

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Wir betrachten dazu das LAPLACE-Integral in der STIELTJESschen Form

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\chi(t), \tag{4}$$

bei dem die Dinge besonders durchsichtig liegen. In ihm ist $\chi(t)$ eine für $t \geqq 0$ erklärte (komplexwertige) Funktion, die in jedem beschränkten Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$ von beschränkter Schwankung ist. Das Integral

$$\int_0^t e^{-s\tau}\, d\chi(\tau)$$

existiert dann für jedes $t \geqq 0$ und (4) soll den Grenzwert desselben für $t \to +\infty$ bedeuten, wofern er vorhanden ist. Setzt man nun

$$\overline{\operatorname{fin}}_{\nu \leqq t \leqq \nu+1} |\chi(t) - \chi(\nu)| = \chi_\nu, \tag{5}$$

so gilt schon der

Satz. *Es ist ausnahmslos*

$$\beta = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \log \chi_n. \tag{6}$$

Beweis. Wir bezeichnen den in (6) rechtsstehenden Wert mit λ und zeigen:

a) Ist $\Re(s_0) = \sigma_0 > \lambda$ (also λ endlich oder $= -\infty$), so ist (4) für $s = s_0$ konvergent. Es muß also $\beta \leqq \sigma_0$ und, da dies für jedes $\sigma_0 > \lambda$ gilt, sogar $\beta \leqq \lambda$ sein.

b) Ist $\Re(s_0) = \sigma_0 > \beta$ (also β endlich oder $= -\infty$), so ist $\lambda \leqq \sigma_0$. Es ist also sogar $\lambda \leqq \beta$, was zusammen mit a) die Behauptung des Satzes liefert, einschließlich der Grenzfälle, daß $\lambda = +\infty$ oder $= -\infty$ ist.

Um a) zu beweisen, wählen wir reelle s_1 und s_2 gemäß $\lambda < s_1 < s_2 < \sigma_0$. Dann ist nach (6) bei geeignetem (von ν unabhängigem) $K > 0$ für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\chi_\nu \leqq K e^{s_1 \nu}, \tag{7}$$

also für alle ν auch

$$|\chi(t) - \chi(\nu)| \leqq K e^{s_1 \nu} \text{ in } \nu \leqq t \leqq \nu + 1. \tag{8}$$

Für $T > 0$, $n \leqq T < n+1$ ist dann

$$\int_0^T e^{-s_2 t}\, d\chi(t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_\nu^{\nu+1} + \int_n^T.$$

Hierin ist

$$\int_\nu^{\nu+1} e^{-s_2 t}\, d\chi(t) = \int_\nu^{\nu+1} e^{-s_2 t}\, d(\chi(t) - \chi(\nu))$$

$$= [e^{-s_2 t}(\chi(t) - \chi(\nu))]_\nu^{\nu+1} + s_2 \int_\nu^{\nu+1} e^{-s_2 t}(\chi(t) - \chi(\nu))\, dt,$$

also

$$\left|\int_{\nu}^{\nu+1} e^{-s_2 t}\, d\chi(t)\right| \leqq \chi_\nu \{e^{-s_2(\nu+1)} + |e^{-s_2\nu} - e^{-s_2(\nu+1)}|\}$$
$$\leqq K_1 e^{-(s_2-s_1)\nu},$$

wenn K_1 (unabhängig von ν) geeignet gewählt wird. Analog und mit dem gleichen K_1 ergibt sich

$$\left|\int_{n}^{T} e^{-s_2 t}\, d\chi(t)\right| \leqq K_1 \cdot e^{-(s_2-s_1)n}.$$

Also ist

$$\left|\int_{0}^{T} e^{-s_2 t}\, d\chi(t)\right| \leqq K_1 \sum_{\nu=0}^{n} e^{-(s_2-s_1)\nu} \leqq K_2.$$

Wegen $\Re(s_0) > s_2$ ist also (4) nach einem bekannten Satze für $s = s_0$ konvergent.

Um b) zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß bei geeignetem K für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\chi_\nu \leqq K e^{\sigma_0 \nu} \tag{9}$$

ist, da dann ersichtlich $\lambda \leqq \sigma_0$ sein muß.

Um (9) zu beweisen, bilden wir für t in $\nu \leqq t \leqq \nu + 1$

$$\int_{\nu}^{t} d\chi(\tau) = \int_{\nu}^{t} e^{\sigma_0 \tau} \cdot e^{-\sigma_0 \tau}\, d\chi(\tau).$$

Setzen wir nun

$$\int_{\nu}^{t} e^{-\sigma_0 \tau}\, d\chi(\tau) = A_\nu(t),$$

so liegen diese Werte, da (4) in $s = \sigma_0$ konvergiert, für alle $\nu = 0, 1, \ldots$ und die jeweils in Betracht kommenden t unter einer festen Schranke M. Wegen

$$\int_{\nu}^{t} d\chi(\tau) = [e^{\sigma_0 \tau} A_\nu(\tau)]_\nu^t - \sigma_0 \int_{\nu}^{t} e^{\sigma_0 \tau} A_\nu(\tau)\, d\tau$$

ist also

$$|\chi(t) - \chi(\nu)| = \left|\int_{\nu}^{t} d\chi(\tau)\right| \leqq 2M\,(e^{\sigma_0 t} + e^{\sigma_0 \nu}),$$

woraus (9) abzulesen ist. Damit ist der Beweis vollendet.

Folgerungen.

1. Liegt das gewöhnliche Laplace-Integral (1) vor und setzt man

$$\int_{0}^{t} x(\tau)\, d\tau = \chi(t),$$

so ist für jedes $t \geqq 0$ und jedes (komplexe) s

$$\int_0^t e^{-s\tau}\, x(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-s\tau}\, d\chi(\tau),$$

so daß (1) dann und nur dann konvergiert, wenn (4) es tut. Daher wird die Konvergenzabszisse β von (1) ausnahmslos durch (6) gegeben, wenn jetzt

$$\chi_\nu = \max_{\nu \leqq t \leqq \nu+1} \left| \int_\nu^t x(\tau)\, d\tau \right| \tag{10}$$

gesetzt wird.

2. Für diese Integrale (1) erhält man aus unserem Satze natürlich leicht die eingangs angegebenen Formeln (2) und (3). Setzen wir die dort rechts stehenden Werte $= \lambda'$ bzw. λ'', so zeigen wir genauer:

a) *Es ist stets* $\lambda \leqq \lambda'$ *und, wenn* $\lambda = \beta \geqq 0$ *ist, auch* $\lambda' \leqq \lambda$, *also* $\beta = \lambda'$ $(= \lambda)$.

b) *Es ist stets* $\lambda \leqq \lambda''$ *und, wenn* $\lambda = \beta < 0$ *ist, auch* $\lambda'' \leqq \lambda$, *also* $\beta = \lambda''$ $(= \lambda)$.

Beweis. a) Ist $\lambda' = +\infty$, so ist nichts zu beweisen. Ist $\lambda' < +\infty$, so wähle man $s_1 > \lambda'$. Dann ist für alle großen t

$$\left| \int_0^t x(\tau)\, d\tau \right| < e^{s_1 t}$$

und folglich für alle großen t und $\nu \leqq t \leqq \nu+1$

$$\left| \int_\nu^t x(\tau)\, d\tau \right| \leqq \left| \int_0^t \right| + \left| \int_0^\nu \right|,$$

also gemäß (10)

$$\chi_\nu \leqq 2 e^{s_1(\nu+1)} \quad \text{oder} \quad \leqq 2 e^{s_1 \nu},$$

je nachdem $s_1 \geqq 0$ oder < 0 ist. Hiernach ist $\lambda \leqq \lambda'$. Andererseits $\beta = \lambda \geqq 0$ und $s_1 > \lambda$, so gilt (7) für alle ν und es ist daher

$$\chi_0 + \chi_1 + \cdots + \chi_n \leqq K \cdot \frac{q}{q-1} \cdot q^n, \qquad (q = e^{s_1} > 1).$$

Um so mehr ist für $n \leqq t \leqq n+1$

$$\left| \int_0^t x(\tau)\, d\tau \right| \leqq K' e^{s_1 n},$$

woraus $\lambda' \leqq \lambda$ folgt.

Der Beweis von b) verläuft ganz ähnlich, da für endliches λ'', $s_1 > \lambda''$ und alle großen t nebst $\nu \leqq t \leqq \nu+1$ jetzt

$$\left| \int_\nu^t x(\tau)\, d\tau \right| \leqq \left| \int_\nu^\infty \right| + \left| \int_t^\infty \right| < K e^{s_1 \nu}$$

ist, was sofort $\lambda \leqq \lambda''$ liefert. Ist aber $\lambda = \beta < 0$ und $\lambda < s_1 < 0$, so gilt zunächst (7) und folglich für $n \leqq t \leqq n+1$

$$\left| \int_t^{\infty} x(\tau)\, d\tau \right| \leqq \left| \int_t^{n+1} \right| + \left| \int_{n+1}^{n+2} \right| + \cdots < K'' e^{s_1 n}.$$

Hieraus ist $\lambda'' \leqq s_1$, also $\lambda'' \leqq \lambda$ abzulesen.

3. Die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \ \lambda_\nu \to +\infty, \tag{11}$$

ist genau dann konvergent, wenn das Laplace-Stieltjes-Integral (4) mit

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 \text{ in } 0 \leqq t \leqq \lambda_1, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu \text{ in } \lambda_\nu < t \leqq \lambda_{\nu+1} \end{cases}$$

konvergiert. Beide haben dann den gleichen Wert. Die Konvergenzabszisse β von (11) wird daher wieder ausnahmslos durch (6) geliefert, wenn jetzt

$$\chi_\nu = \operatorname{Max} |a_\mu + \cdots + a_\varrho|, \ \mu \leqq \varrho \leqq \mu', \tag{12}$$

gesetzt wird und hierbei μ den kleinsten Index bedeutet, für den $\nu \leqq \lambda_\mu$ ist, und μ' den größten, für den $\lambda_{\mu'} < \nu + 1$ ist.

4. Für die gewöhnlichen Dirichlet'schen Reihen ($\lambda_\nu = \log \nu$) wird also die Konvergenzabszisse β ausnahmslos durch (6) und (12) geliefert, wenn jetzt $\mu = [e^\nu] + 1$ gesetzt wird und ϱ die Indizes $e^\nu < \varrho < e^{\nu+1}$ durchläuft.

5. Die Abszisse α der absoluten Konvergenz von (4) wird ausnahmslos durch

$$\alpha = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \bar{\chi}_n \tag{13}$$

geliefert, wenn jetzt $\bar{\chi}_\nu$ die Bedeutung

$$\bar{\chi}_\nu = \int_\nu^{\nu+1} |d\chi(t)|$$

hat. In den eben behandelten Sonderfällen bedeutet dies

$$\bar{\chi}_\nu = \int_\nu^{\nu+1} |x(t)|\, dt \quad \text{bzw.} \quad \sum |a_\varrho|, \tag{14}$$

wenn die Summe in den Fällen **3.** und **4.** über alle ϱ erstreckt wird, für die $\nu \leqq \lambda_\varrho < \nu + 1$ bzw. $e^\nu < \varrho < e^{\nu+1}$ ist.

6. Ist $\lambda_\nu = \nu$, so ist χ_ν in (12) mit $\bar{\chi}_\nu$ in (14) identisch, nämlich $= |a_\nu|$: Im Fall der Potenzreihe gibt es keinen Streifen bedingter Konvergenz und aus (6) erhält man die Cauchy-Hadamardsche Formel für ihren Radius.

Literaturverzeichnis.

CAHEN, E.

[1] Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues, Ann. scient. Éc. Norm. sup. (3) **11** (1894), 75—164.

LANDAU, E.

[2] Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzber. math.-phys. Kl. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. **36** (1906), 151—218.

SCHNEE, W.

[3] Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen, Gött. Nachr. 1910, 1—42.

KNOPP, K.

[4] Über die Abszisse der Grenzgeraden einer Dirichletschen Reihe, Sitzber. d. Berliner Math. Ges. **10** (1910), 1—7.

KOJIMA, T.

[5] On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku Math. Journ. **6** (1914/15), 134—139.

FUJIWARA, M.

[6] On the convergence-abscissa of general Dirichlet's series, Tôhoku Math. Journ. **6** (1914/15), 140—142.

MITTAG-LEFFLER, G.

[7] Sur un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet, Comptes Rendus **160** (1915), 271—273.

WIDDER, D. V.

[8] The Laplace Transform, Princeton 1946.

HILLE, E.

[9] Functional Analysis and Semi-Groups, New York 1948.

DOETSCH, G.

[10] Handbuch der Laplace-Transformation I, Basel 1950.

(Eingegangen am 9. Mai 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 3, S. 297—328 (1951).

Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten.

Von

Egon Ullrich in Gießen.

§ 1.

Einleitung.

1. 1. Die Analytische Landschaft oder Betragfläche

$$x, y, h = |w(x + iy)|$$

einer analytischen Funktion ist von funktionentheoretischer Seite her vielfach untersucht: ihre Schichtlinien insbesondere sind mit Hilfe des Prinzips vom Maximum und seiner Verallgemeinerungen studiert worden; man kennt Sätze über das Krümmungsverhalten dieser Kurven [1]).

Auch die angewandte Mathematik hat seit dem Erscheinen der Neubearbeitung von JAHNKE-EMDE's Funktionentafeln lebhaftes Interesse an den Betragflächen genommen und sie erfolgreich zur übersichtlichen Darstellung des Funktionsverlaufs herangezogen, weil sie eine Beschränkung auf drei Dimensionen ermöglichen; zeichnet man die Linien ein, auf denen $\arg w(z)$ fest bleibt, so kann diese Beschränkung wettgemacht werden.

Obwohl also die Betragflächen allgemein geläufig sind, ist ihre Untersuchung mit den einfachsten Mitteln der Flächentheorie kaum unternommen worden. Dies scheint uns daran zu liegen, daß die klassischen Formeln der metrischen Differentialgeometrie eine Gestalt haben, welche funktionentheoretische Schlüsse nicht begünstigt, weil sie bei $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ die partiellen Ableitungen von u, v benutzt. Erst 1944 hat Herr ZAAT in seiner Gießener Dissertation [5] funktionentheoretisch taugliche Ausdrücke angestrebt und mit ihrer Hilfe einige einfache Schlüsse ziehen können. Ich nenne als Beispiel die folgende Formel für das GAUSS'sche Krümmungsmaß

$$K = \frac{|w''|^2}{(1 + |w'|^2)^2} \Re\left\{\frac{w'^2}{ww''} - 1\right\}. \tag{1. 1}$$

Sie bezieht sich unmittelbar auf die analytische Funktion w und ihre Ableitungen; das erlaubt — wie in dieser Arbeit gezeigt werden soll —

[1]) Wir verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Schluß; Einzelhinweise geschehen durch eckige Klammern [ ].

eine ganze Reihe schöner funktionentheoretischer Folgerungen, die in eine bisher nicht begangene Richtung weisen.

1. 2. Wir fragen nach Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten derart, daß *im ganzen Existenzgebiet* $\mathfrak{Z}_w$ der analytischen Funktion $w(z)$ *einerlei Vorzeichen für die* Gauss*'sche Krümmung gefordert wird.* Wir haben also drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem überall

$$K \equiv 0, \qquad K \geqq 0, \qquad K \leqq 0 \tag{1. 2'}$$

gilt. Nach Formel (1, 1) enthält K einen ersten Faktor, den Bruch, der wesentlich positiv ist, abgesehen von isolierten Nullstellen von w'', und von $w'' \equiv 0$. Es kommt also an auf die Fallunterscheidung

$$\Re\left(\frac{w'^2}{w\,w''} - 1\right) \equiv 0, \qquad \geqq 0, \qquad \leqq 0. \tag{1. 2''}$$

Danach erhalten wir Betragflächen aus lauter *parabolischen* Punkten, bzw. *„einsinnig gekrümmte"* Betragflächen von *durchweg elliptischem* oder *durchweg hyperbolischem* Krümmungsverhalten.

1. 3. Drei Betragflächen aus lauter parabolischen Punkten sind allgemein bekannt: Die (horizontale) Ebene zu $w \equiv$ const, der Kreiskegel zur linearen Funktion, mit der Spitze in der Nullstelle, und der Exponentialzylinder zu $w = e^z$.

Die erste unserer Bedingungen, $K \equiv 0$, fordert entweder das identische Verschwinden von w'' — das sind die ersten dieser Sonderfälle, $w = a + b\,z$ — *oder* das identische Verschwinden des Realteils einer analytischen Funktion, und damit die Konstanz des Imaginärteils: Es ist dann[2])

$$\frac{w'^2}{w\,w''} \equiv 1 + i\beta. \tag{1. 3}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung lehrt, daß nur noch e i n e weitere Funktion eine durchweg parabolisch gekrümmte Betragfläche zeigt, nämlich die allgemeine Potenz mit Exponenten vom Realteil 1,

$$w(x) = (a\,z + b)^{1+i\beta}.$$

1. 4. Die Forderung *einsinniger*, d. h. durchweg positiver bzw. durchweg negativer Gauss'scher Krümmung schränkt den Wertevorrat der dem gesuchten $w(z)$ zugeordneten analytischen Funktion

$$\frac{w'^2}{w\,w''} = c(z) \tag{1. 4}$$

auf eine Halbebene ein, die rechte oder die linke in Bezug auf die Gerade $\Re\,c = 1$.

---

[2]) α, β bezeichnen reelle, a, b, c komplexe Konstanten, nicht notwendig immer dieselben.

Bei *einfachen Existenzgebieten* $\mathfrak{Z}_c$ für $c(z)$, wie etwa der *endlichen Ebene*, wird dann der LIOUVILLE'sche Satz herangezogen werden können; er liefert wieder die Konstanz von (1. 4); die Integration führt auf die *allgemeine Potenz mit beliebigem komplexen (oder reellen) Exponenten*, und zwar

$$(1.5) \qquad w(z) = (az+b)^{\alpha+i\beta} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} K > 0 & \text{für} \quad \alpha > 1, \\ K \equiv 0 & \text{für} \quad \alpha = 1, \\ K < 0 & \text{für} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Der Wert von β beeinflußt wohl den Verlauf der Betragflächen, nicht aber die von uns ins Auge gefaßte Krümmungseigenschaft (Einsinnigkeit).

Angesichts der ausgezeichneten Rolle, die die Betragflächen der allgemeinen Potenz spielen, haben wir sie am Ende der Arbeit etwas näher beschrieben und auch in Figuren dargestellt. Neben dem *Kegel der logarithmischen Spirale* ($\alpha = 1$, $K \equiv 0$) umfassen sie noch *genau eine Regelfläche* (für $\alpha = 0$, $K < 0$); diese läßt sich deuten als das gerade Konoid der auf einen Kreiszylinder aufgerollten Exponentialkurve („*Exponentialwendel*").

1. 5. Unser Schluß steht und fällt offenbar mit dem LIOUVILLE'schen Satz. Dieser gilt nun bekanntlich nicht nur für die endliche Ebene, sondern auch noch für viele andere RIEMANN'sche Flächen als Träger analytischer Funktionen. (Unter dem *Träger* $\mathfrak{Z}_w$ einer analytischen Funktion verstehen wir die *einfachste* RIEMANN'sche Fläche, auf der $w(z)$ eben noch eindeutig ausgebreitet werden kann — ohne überzählige Punkte und Verzweigungen.) Nun kommt es dabei aber gar nicht auf $\mathfrak{Z}_w$ selbst an, sondern auf den Träger $\mathfrak{Z}_c$ des zu $w(z)$ zugeordneten Differentialausdrucks

$$(1.6) \qquad \frac{w'^2}{w\,w''} = c(z);$$

und dieser neue Träger *kann* einfacher sein; jedenfalls ist er *nicht stärker* verzweigt als $\mathfrak{Z}_w$; er ist eine *Unterlagerung* davon. So ergibt sich uns etwa:

Von den Potenzen z^n mit ganzzahligen Exponenten $n \neq 0,1$ abgesehen gibt es keine ganzen oder gebrochenen Funktionen (rational oder transzendent), deren Betragfläche einsinnig gekrümmt ist.

Es gibt keine algebraische Funktion vom Geschlecht $p \geq 1$ mit einsinnig gekrümmter Betragfläche. Gleiches gilt für $p = 0$, mit Ausnahme der reinen Potenzen mit rationalen Exponenten.

Die Sätze lassen sich noch erheblich weiter führen angesichts einer jüngsten Entwicklung in der Funktionentheorie, die die Gültigkeit des LIOUVILLE'schen Satzes auf die RIEMANN'schen Flächen mit *hebbarem Rand* erstreckt hat. Vgl. dazu etwa SARIO und PFLUGER [12, 13]. Wir erhalten das Ergebnis:

Auf der Gesamtheit der Riemann*'schen Flächen mit hebbarem Rand gibt es keine anderen Funktionen mit einsinnig gekrümmter Betragfläche als die allgemeinen Potenzen, nach oben* (1. 5).

1. 6. Ganz anders liegen aber die Dinge, wenn der Träger $\mathfrak{Z}_c$ des zugeordneten Differentialausdrucks einen so starken Rand besitzt, daß er *vom* Liouville*'schen Satze frei* ist. Es gibt dann auf ihm *eindeutige und beschränkte, aber nicht konstante* (und nicht über ihn hinaus fortsetzbare) *Funktionen.* Mit deren Hilfe können wir nach geeigneter Normierung des Wertvorrats in das Ganze oder einen Teil des Inneren von zwei komplementären Gebieten — etwa $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ genannt, von der Kurve Γ getrennt — die Differentialgleichung (1. 6) aufstellen, welche durch Integration die *Gesamtheit aller* $w(z)$ *mit einsinnig gekrümmten Betragflächen liefert, sobald* $c(z)$ *alle Funktionen mit Wertvorrat nur in* $\mathfrak{I}$ *bzw. nur in* $\mathfrak{A}$ *durchläuft:* Für $c(z)$ sind das die Halbebenen $\Re c \lesseqgtr 1$. Wir betrachten aber auch ein anderes Kriterium.

Die nichtlineare Differentialgleichung (1. 6) kann als Bernoulli'sche Differentialgleichung für die logarithmische Ableitung $w' : w$ aufgefaßt und mittels zweier Quadraturen und Erhöhung in den Exponenten vollständig integriert werden. Die Lösungen $w(z; a)$ hängen jedoch noch von einer Integrationskonstanten a wesentlich ab (eine zweite erscheint nur als belangloser Faktor); wir können behaupten:

Über jedem vom Liouville*'schen Satze freien Träger* $\mathfrak{Z}_c$ *gibt es — nach Vorgabe einer beliebigen beschränkten Funktion des Trägers* (wie oben) *— unbegrenzt viele Scharen von Funktionen* $w(z, a)$ *über* $\mathfrak{Z}_c$*, mit einsinnig gekrümmten Betragflächen.*

Indes sind diese i. a. mit Relativverzweigungen oder auch einzelnen wesentlichen Singularitäten gegenüber von $\mathfrak{Z}_c$ behaftet; und nur in Sonderfällen kann die *Eindeutigkeit* dieser $w(z, a)$ schon auf dem Träger $\mathfrak{Z}_c$ selbst nachgewiesen werden. Sie hängt zum Teil von der Integrationskonstanten a ab; die Relativverzweigungen bilden also die aus der Theorie der Differentialgleichungen im Komplexen bekannten beweglichen Singularitäten.

Insbesondere im Einheitskreis als Träger gibt es beliebig viele eindeutige $w(z)$ *mit einsinnig gekrümmten Betragflächen.*

Wir heben hervor, daß es dabei sowohl Flächen mit $K \geqq 0$, wie solche mit $K \leqq 0$ auf oder über jedem solchem Liouville-freien Träger gibt — jedoch keine einzige mit $K \equiv 0$: Diese sind bereits unter § 1. 3 erschöpft worden.

1. 7. Unsere Untersuchungen legen es nahe und machen es sogar notwendig, die funktionentheoretischen Beziehungen zu überschauen, welche zwischen $c(z)$, bzw. einer linearen Transformierten davon, $b(z) = \frac{c(z) - 1}{c(z)}$, und den Lösungen $w(z, a)$ bestehen. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf Andeutungen über dies Thema, auf das wir ausführlicher in einer eigenen Note eingehen wollen.

Eine Fortführung unserer Arbeit wird durch die folgende Beobachtung verständlich gemacht werden: Wir gehen *hier* für sehr allgemeine Funktionenklassen darauf aus, einsinnige Krümmung der Betragfläche im ganzen Funktionsverlauf zu fordern, und alle Funktionen überschauen zu lernen, welchen diese Eigenschaft zukommt.

Für weite und wichtige Funktionenklassen, wie etwa die ganzen Transzendenten, müssen wir jedoch feststellen, daß die geforderte Eigenschaft bei ihnen gar nicht möglich ist, daß sie vielmehr sowohl Gebiete positiver, wie solche negativer Krümmung in der Betragfläche aufweisen müssen, die durch Parabolische Linien (mit $K = 0$) getrennt werden.

Es liegt nun auf der Hand, anstelle des LIOUVILLE'schen Satzes — der ja eine globale Aussage ist — funktionentheoretische Seitenstücke von weniger globaler Natur (ohne doch schon von lokaler Natur zu sein) heranzuziehen; sagen wir etwa die Erweiterungen des Prinzips vom Maximum, den PHRAGMÉN-LINDELÖF'schen Satz und ähnliche mehr. Diese Sätze müssen uns, wenn $w''/w\,w''$ ganz ist, oder sich von der Natur einer ganzen Funktion „nicht zu weit" entfernt, Auskunft geben über die mögliche Höchstausdehnung eines Gebiets, etwa negativer Krümmung, in Abhängigkeit von der Wachstumsordnung, — Aussagen, durch die z. B. von neuer Seite Einblick in die Natur der Approximation einer Funktion an Zielwerte zu erwarten ist. Auch darüber werden wir in Kürze in einer eigenen Arbeit berichten.

1. 8. Lineare Abbildungen. Im Zuge unserer Überlegungen werden wir einige spezielle lineare Abbildungen treffen; es empfiehlt sich, ihre Eigenschaften vorweg festzustellen. Es sei

$$c = \alpha + i\beta, \qquad c' = \alpha' + i\beta'.$$

$$c' = \frac{c}{c-1} = Lc, \tag{1.7}$$

Diese Abbildung hat die Fixpunkte 0 und 2, ist vom elliptischen Typus, $L^2 c = c$, vertauscht also obere und untere Halbebene, führt aber die Halbebenen, bzw. den Strahl

$$\Re c < 1, \qquad \Re c = 1, \qquad \Re c > 1 \tag{1.8}$$

je in sich über.

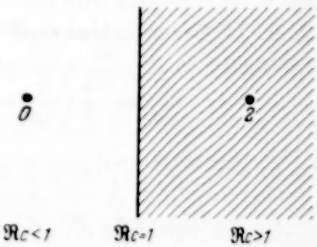

Fig. 1: c-Ebene

Fügen wir noch eine Stürzung $b = 1 : c'$ hinzu, so führt

Fig. 2: b-Ebene.

$$b = \frac{c-1}{c} = 1 - \frac{1}{c} = Mc \tag{1.9}$$

diese Elemente über in das Äußere, den Umfang, das Innere des Kreises vom Radius $\frac{1}{2}$ um $b = \frac{1}{2}$, d. h.

$$|b - \tfrac{1}{2}| > \tfrac{1}{2}, \quad |b - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}, \quad |b - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{2}. \tag{1.10}$$

Auch sie ist vom elliptischen Typus, mit den Fixpunkten $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$, $M^3 c = c$. Beide Abbildungen, Lc und Mc, gehören zur Doppelverhältnisgruppe.

§ 2.

Funktionentheoretisches zum Gauß'schen Krümmungsmaß.

2. 1. Differentialgeometrischer Ausgangspunkt. Wir beschreiben die Betragfläche der analytischen Funktion $w(z)$ durch die Koordinaten

$$x, y, h = |w(x + iy)|,$$

die wir zum Ortsvektor zusammenfassen; x, y dienen uns als Gausssche Flächenparameter: Dadurch tritt eine erhebliche Vereinfachung gegenüber dem allgemeinen Fall der Parameterdarstellung ein, wie sie in der Differentialgeometrie geläufig ist. Unser Sonderfall führt auf das Gauss'sche Krümmungsmaß

$$K = \frac{L N - M^2}{E G - F^2} = \frac{h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}. \tag{2. 1}$$

Indes ist diese Formel nicht unmittelbar funktionentheoretisch brauchbar, weil sie auf partielle Ableitungen von $h = |w(z)|$ bezogen ist. Wir streben eine Schreibweise an, welche statt dessen $w(z)$, $w'(z)$, $w''(z)$ benutzt, also die Ableitungen der analytischen Funktion unmittelbar. Dazu empfiehlt sich, um die Rechnungen kurz zu halten, ein Differentiationskalkül, den z. B. schon Peschl [7] in seinen Arbeiten zur Krümmung von Schichtlinien bei konformer Abbildung mit Nutzen herangezogen hat. Er ruht darauf, daß statt x, y nun $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ als Koordinaten dienen; wir meiden aber alle entbehrlichen Weiterungen und bleiben auf einem einfachen und formalen Wege:

2. 2. Differentiationskalkül. Wir benutzen die linearen Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

bzw. umgekehrt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

„Partielle" Ableitungen deuten wir durch Indizes an. Dann ist

$$h_z = \tfrac{1}{2}(h_x - i h_y), \qquad h_{\bar{z}} = \tfrac{1}{2}(h_x + i h_y),$$

und umgekehrt

$$h_x = h_z + h_{\bar{z}}, \qquad h_y = i(h_z - h_{\bar{z}}).$$

Daraus folgt

$$1 + h_x^2 + h_y^2 = 1 + 4 h_z h_{\bar{z}}. \tag{2. 2}$$

Die zweiten Differentiationen führen auf

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \quad h_{zz} + h_{\bar z\bar z} + 2h_{z\bar z}, \\ h_{yy} &= -(h_{zz} + h_{\bar z\bar z} - 2h_{z\bar z}), \\ h_{xy} &= \quad i(h_{zz} - h_{\bar z\bar z}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (2.3) \qquad h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 &= -(h_{zz} + h_{\bar z\bar z})^2 + 4h_{z\bar z}^2 + (h_{zz} - h_{\bar z\bar z})^2 \\ &= -4(h_{zz}h_{\bar z\bar z} - h_{z\bar z}^2). \end{aligned}$$

Das Gauss'sche Krümmungsmaß lautet daher nach (2.1; 2.2; 2.3) und unter zweckmäßiger Erweiterung mit 4

$$(2.4) \qquad K = \frac{-4^2}{4}\,\frac{h_{zz}h_{\bar z\bar z} - h_{z\bar z}^2}{(1+4h_zh_{\bar z})^2}.$$

2.3. Die Anwendung der Operatoren $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ auf eine analytische Funktion $f(z) = u + iv$, bzw. auf deren Konjugierte $\bar f(z) = u - iv$, genügt den folgenden Regeln, wie man mittels der Cauchy-Riemann-schen Gleichungen sofort sieht:

$$(2.5) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f_z = f', \qquad \frac{\partial \bar f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0, \qquad \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = \bar f'.$$

$f'(z)$ bedeutet dabei die komplexe Differentiation schlechthin.

Wir wenden diese Regeln an auf

$$h^2 = w\bar w,$$

und erhalten (unter wiederholter Benutzung eben dieser Formel)

$$2hh_z = w'\bar w + 0, \qquad 2hh_{\bar z} = 0 + w\bar w',$$

und daraus

$$(2.6) \qquad 2h_z = \frac{\bar w w}{h}\,\frac{w'}{w} = h\frac{w'}{w}, \qquad 2h_{\bar z} = h\frac{\bar w'}{\bar w},$$

sowie

$$(2.7) \qquad 1 + 4h_zh_{\bar z} = 1 + h^2\,\frac{w'\bar w'}{w\bar w} = 1 + |w'|^2.$$

Erneute Differentiation gibt schließlich (nach Multiplikation der Formeln (2.6) mit 2):

$$\begin{aligned} (2.8) \qquad 4h_{zz} &= 2h_z\frac{w'}{w} + 2h\left(\frac{w'}{w}\right)' = h\left(\frac{w'}{w}\right)^2 + 2\left(\frac{w'}{w}\right)' = h\frac{2ww'' - w'^2}{w^2}, \\ 4h_{\bar z\bar z} &= h\frac{2\bar w\bar w'' - \bar w'^2}{\bar w^2}, \qquad 4h_{z\bar z} = h\frac{w\bar w'}{w\bar w}. \end{aligned}$$

Der Zähler im Ausdruck für die Gauss-Krümmung ergibt sich jetzt unter einfacher Rechnung:

$$
\begin{aligned}
-4^2(h_{zz}h_{\bar z\bar z}-h_{z\bar z}^2) &= (4h_{z\bar z})^2-4h_{zz}\cdot 4h_{\bar z\bar z}\\
&= \frac{h^2}{w^2\overline{w}^2}\{w'^2\overline{w}'^2-(2ww''-w'^2)(2\overline{w}\overline{w}''-\overline{w}'^2)\}\\
&= \frac{2}{w\overline{w}}\{2(w\overline{w}'^2w''+\overline{w}w'^2\overline{w}'')-4w\overline{w}w''\overline{w}''\}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Wir klammern das zweite Glied aus und erkennen in der Klammer den Realteil einer analytischen Funktion; so finden wir zuletzt

$$
-4^2(h_{zz}h_{\bar z\bar z}-h_{z\bar z}^2) = 4|w''|^2\,\Re\left\{\frac{w'^2}{ww''}-1\right\}
\tag{2.10}
$$

und unter Zusammenfassen von (2.4; 2.7; 2.10) den

Satz 1. *Die Gauss'sche Krümmung der Betragfläche einer analytischen Funktion $w(z)$ ist darstellbar als*[3])

$$
K=\frac{|w''|^2}{(1+|w'|^2)^2}\;\Re\left\{\frac{w'^2}{ww''}-1\right\}.
\tag{2.11}
$$

2.4. Diskussion des Ausdrucks für K. Unsere Formel für K gestattet es, eine Reihe funktionentheoretischer Schlüsse anzuknüpfen, wenn wir geeignete Annahmen über das Krümmungsverhalten der Betragfläche im Großen heranziehen.

Man sagt bekanntlich, die Fläche sei in einem Punkte hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch gekrümmt, je nachdem dort

$$
K<0, \qquad K=0, \qquad K>0
$$

gilt. Der erste Faktor in K ist stets größergleich 0. Über das Zeichen der Krümmung entscheidet also allein der zweite Faktor; die Krümmung ist bei

$$
\Re\frac{w'^2}{ww''}\begin{cases} >1 & K>0 \quad \text{elliptisch,}\\ =1 & K=0 \quad \text{parabolisch,}\\ <1 & K<0 \quad \text{hyperbolisch.}\end{cases}
\tag{2.12}
$$

Wir bestimmen vorweg alle Funktionen $w(z)$, deren Betragfläche im Gesamtverlauf parabolisch gekrümmt ist (§ 3). Dann wenden wir uns zu solchen Funktionen $w(z)$, deren Betragfläche im Gesamtverlauf einerlei Zeichen der Krümmung zeigt, also durchweg elliptisch (positiv) oder durchweg hyperbolisch (negativ) — bis auf isolierte Punkte mit $K=0$. Solche Flächen nennen wir *einsinnig gekrümmt*.

§ 3.

Betragflächen aus lauter parabolischen Punkten.

3.1. Parabolische Punkte, in denen das Gauss'sche Krümmungsmaß verschwindet, sind von dreierlei Arten. Sie liegen

[3]) Nach der letzten Zeile in (2.9) bringen Nullstellen von w'' keine Singularität für K; wohl aber wird K singulär in den einfachen Nullstellen von w selbst.

isoliert, in den Nullstellen der zweiten Ableitung

$$w''(z) = 0; \tag{3.1}$$

linienhaft, auf der *parabolischen Kurve*,

$$\Re\left(\frac{w'^2}{w\,w''} - 1\right) = 0; \tag{3.2}$$

flächenhaft, in Gebieten, wo eine dieser beiden Gleichungen identisch gilt.

$w'' \equiv 0$ führt auf die ganze lineare Funktion $w = a\,z + b$, bzw. auf die *Konstante* und die *Drehstreckung*, mit der *horizontalen Ebene* und dem *Kreiskegel* als Betragflächen; dieser hat die Spitze in der Nullstelle $-b/a$ und zeigt die Steigung $|a|$ für alle Erzeugenden. Indes sind diese Fälle in den allgemeinen Ergebnissen enthalten, welche sich im zweiten Falle einstellen.

Wenn die Gleichung (3. 2) in einem noch so kleinen Gebiet identisch gilt, so muß $w'^2/w\,w''$ dort eine Konstante vom Realteil 1 sein; und da diese Konstante „in die ganze Vollebene analytisch fortsetzbar" ist, muß die Identität in der ganzen Ebene bestehen. Wir haben also in diesem Falle die Möglichkeit zu einem Schluß über die Funktion w im Großen.

Satz 2. *Die analytischen Funktionen $w(z)$, deren Betragfläche durchweg verschwindende* Gauss*'sche Krümmung zeigt, genügen der Differentialgleichung*

$$\frac{w'^2}{w\,w''} = c = \alpha + i\beta \qquad \textit{mit } \alpha = 1. \tag{3.3}$$

3. 2. Die Integration dieser Differentialgleichung sei gleich für eine *allgemeine* Konstante $c = \alpha + i\beta$ behandelt. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{w''}{w'} = \frac{1}{c}\,\frac{w'}{w},$$

so sehen wir darin eine bemerkenswerte Beziehung zwischen den logarithmischen Ableitungen von w' und w selbst:

$$\frac{d}{dz}(\log w') = \frac{1}{c}\,\frac{d}{dz}(\log w). \tag{3.4}$$

Deren Integration gibt zunächst (a und b seien Konstanten)

$$w^{-\frac{1}{c}}\,w' = a. \tag{3.5}$$

Für die zweite Integration nehmen wir den Sonderfall $c = 1$ vorweg; er führt auf die Exponentialfunktion

$$w(z) = e^{az+b} \qquad \text{zu } c = 1. \tag{3.6}$$

Die Betragfläche ist hier, von der Drehstreckung abgesehen, dieselbe wie bei e^z, d. h. der *Exponentialzylinder*

$$x, y, h = e^x. \tag{3.7}$$

Die waagrechten Erzeugenden, parallel der y-Achse, gleiten längs der Leitlinie $h = e^x$. Für $a = 0$ entsteht die Konstante und die Ebene.

Im allgemeinen Fall $c = \alpha + i\beta \neq 1$ gibt die zweite Integration von (3.5)

$$w(z)^{1-\frac{1}{c}} = az + b \tag{3.5'}$$

oder schließlich

$$w(z) = (az + b)^{\frac{c}{c-1}}. \tag{3.5''}$$

Im Sonderfalle (3.3) ist $c = 1 + i\beta$, also nach den Bemerkungen bei (1.7)

$$c' = \frac{c}{c-1} = 1 + \frac{1}{c-1} = 1 + \frac{1}{i\beta} = 1 + i\beta'. \tag{3.8}$$

Da es uns auf den numerischen Wert für β, β' nicht anzukommen braucht, sondern nur auf die Natur des Exponenten, lassen wir den Strich bei β' wieder fort, heben aber ein für allemal hervor, daß das neue β nicht dasselbe ist, wie in der Differentialgleichung. Der Sachverhalt wird an Hand der linearen Abbildung (1.7) verständlich: Rechte, konstante Seite der Differentialgleichung c und Exponent c' gehören hier derselben Geraden $\Re c = 1$ an, allgemein demselben der drei Gebilde $\Re c \lesseqgtr 1$ der Figur 1.

Satz 3. *Die einzigen analytischen Funktionen, deren Betragfläche überall verschwindende* Gauss*'sche Krümmung zeigt, sind die Exponentialfunktion und die allgemeine Potenz mit konstantem Exponenten vom Realteil* 1*; als Sonderfälle sind darin die ganze lineare Funktion (Drehstreckung) und die Konstante enthalten:*

$$e^{az+b},\ (az+b)^{1+i\beta},\ az+b,\ b. \tag{3.9}$$

Die zugehörigen Betragflächen sind der Exponentialzylinder und der Kegel der logarithmischen Spirale (3.10) *mit ihren Ausartungen, Kreiskegel und horizontaler Ebene.*

Die Gestalt der Betragfläche zu $z^{1+i\beta}$ ergibt sich nämlich bei $z = re^{i\varphi}$ aus

$$h = re^{-\beta\varphi}. \tag{3.10}$$

Jeder Horizontalschnitt $h =$ const ist eine logarithmische Spirale, die Fläche ein Kegel mit der Spitze zu $z = 0$ und der Spirale als Leitkurve. Eine andere Deutung geben wir am Schluß der Arbeit in größerem Zusammenhang.

§ 4.

Eine Differentialgleichung für Funktionen mit einsinnig gekrümmter Betragfläche.

4. 1. Einsinnige Krümmung liegt bei einer Betragfläche von $w(z)$ vor, wenn diese in ihrem Gesamtverlauf entweder nur negativ (hyperbolisch) oder in ihrem Gesamtverlauf nur positiv (elliptisch) gekrümmt ist — abgesehen vielleicht von isolierten Nullstellen der Krümmung. Nach dem Ausdruck (1) für die Gauss'sche Krümmung K entscheidet darüber der *Wertvorrat* für einen der Funktion $w(z)$ zugeordneten *Differentialausdruck*, den wir abkürzend als eine neue Funktion $c(z)$ bezeichnen, nämlich

$$\frac{w'(z)^2}{w(z)\,w''(z)} = c(z). \tag{4. 1}$$

Neben diesem Differentialausdruck bietet sich uns ein zweiter, der damit nahe zusammenhängt, nämlich

$$\frac{w'^2 - w\,w''}{w'^2} = b(z). \tag{4. 2}$$

Auch sein Wertvorrat kann zur Entscheidung über das Zeichen der Gauss-Krümmung der Betragfläche von $w(z)$ herangezogen werden. Es ist dabei

$$b = 1 - \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{1-b}. \tag{1. 9}$$

Aus § 1, 8 entnehmen wir die Zuordnung des Wertvorrats von b zu dem von c. Und aus § 2, 4 ergibt sich uns als

Satz 4. *(Krümmungsregel): Eine Funktion $w(z)$ ist überall dort von einer Gauss-Krümmung*

$$K \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad wo \quad \Re\, c(z) \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases} \quad oder \quad |b(z) - \tfrac{1}{2}| \begin{cases} > \tfrac{1}{2} \\ = \tfrac{1}{2} \\ < \tfrac{1}{2} \end{cases} \tag{4. 3}$$

gilt.

Die Figuren 1 und 2 machen die Wertvorratsbedingungen anschaulich: Schraffiertes Gebiet entspricht positiver Krümmung.

4. 2. Zwei Untersuchungsrichtungen werden wir nun verfolgen. Einmal soll *bei gegebenen Funktionen $w(z)$* an Hand der Krümmungsregel die Natur der Betragflächen festgestellt werden. Das wird insbesondere *im Großen* geschehen, unter Voraussetzungen über Einsinnigkeit der Krümmung im Gesamtverlauf — bzw. bei *gegebenen Funktionenklassen* mit der Frage, ob Einsinnigkeit möglich ist; so bei ganzen und gebrochenen, rationalen und transzendenten Funktionen, bei algebraischen und algebroiden Funktionen.

Auf der anderen Seite sind die Formeln (4. 1) und (4. 2) bei jedem gegebenen $c(z)$ oder $b(z)$, welches eine der Bedingungen der Krümmungsregel erfüllt, geeignet, *Funktionen $w(z)$ aufzubauen*, welche Be-

tragflächen einsinniger Gauss-Krümmung liefern. Im § 3 ist das für die Gesamtheit der Flächen mit $K \equiv 0$ bereits geschehen; deren Gesamtheit ist sehr eng. Die Gesamtheit der Flächen mit überall positiver bzw. überall negativer Gauss-Krümmung ist viel umfangreicher — wenn auch gerade unter den Funktionen des „naheliegenden" Funktionenbereichs wieder außerordentlich eng. Wir fassen das in den

Satz 5. *(Differentialgleichungen): Die Gesamtheit aller analytischen Funktionen $w(z)$ mit einsinnig gekrümmter Betragfläche wird gekennzeichnet durch jede der Differentialgleichungen* (4. 1) *oder* (4. 2), *wenn dabei $c(z)$ oder $b(z)$ die Gesamtheit aller Funktionen durchlaufen, deren ganzer Wertvorrat einer der Bedingungen in der Krümmungsregel* (4. 3) *unterworfen ist.*

4. 3. Träger einer analytischen Funktion. In der Funktionentheorie ist es oft zweckmäßig, eine und dieselbe Funktion aufzufassen als ausgebreitet auf bald dieser, bald jener Riemann'schen Fläche. So sieht man etwa die Funktionen $1-z^2$, $\sqrt{1-z^2}$ und $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ alle drei nebeneinander an als eindeutig ausgebreitet auf der bekannten zweiblättrigen Fläche mit 4 Windungspunkten, dem elliptischen Gebilde. Das geschieht, weil man diese Funktionen zugleich studieren und miteinander verknüpfen will.

Für uns aber wird es durchweg darauf ankommen, zu jeder Funktion $w(z)$ eine *eigentümliche, einfachste* Riemann'sche Fläche in Betracht zu ziehen, die weder überflüssige, noch zu starke Verzweigungspunkte enthält, und die wir zugleich mit der natürlichen Grenze beranden, über welche hinaus $w(z)$ nicht fortgesetzt werden kann. Diese Riemann-sche Fläche sprechen wir an als den *Träger $\mathfrak{Z}_w$ der analytischen Funktion $w(z)$.*

Wir stellen sofort fest, daß auch jede Ableitung von w eben diesen Träger hat. Bilden wir aber einen Differentialausdruck, wie

$$w' : w \quad \text{oder} \quad w'^2 : ww'' = c \quad \text{oder} \quad (w'^2 - ww'') : w'^2 = b,$$

so kann es sehr wohl eintreten, daß dieser Ausdruck zwar im obigen Sinne eindeutig auf dem Träger von w ausgebreitet werden *kann*, aber doch selbst einen *einfacheren* Träger *besitzt*. Als ein Beispiel darf schon der Hinweis auf

$$w(z) = z^{1+i\beta'} \quad \text{und} \quad \frac{w'^2}{ww''} = \text{const} = 1 + i\beta$$

genügen. Der Träger von $w(z)$ ist die *Polarkoordinatenfläche*, Träger des Differentialausdrucks aber ist die *Vollebene*. Ähnlich ist $w = e^z$, $c = w'^2 : ww'' \equiv 1$ zu verstehen; $\mathfrak{Z}_w$ ist die endliche Ebene, $\mathfrak{Z}_c$ die Vollebene[4]).

[4]) Die *Vollebene* erscheint im Sinne der folgenden Vereinbarung als *Unterlagerung* der *endlichen Ebene*. Die Berechtigung dieser Auffassung leuchtet ein: Gehen doch bei verzweigten Überlagerungen auch logarithmische Windungspunkte „verloren".

Die Träger von $c(z)$ und $b(z)$ sind identisch: $\mathfrak{Z}_c \equiv \mathfrak{Z}_b$, und beide sind (im allgemeinen) eine Unterlagerung des Trägers $\mathfrak{Z}_w$ von $w(z)$; Gleichheit ist einzuschließen.

Vereinbarung: Wir drücken eine Überlagerungsbeziehung zweier Riemann'scher Flächen aus durch das Zeichen $<$ bzw. $\leq$, bei möglicher Gleichheit. Also ist

$$\mathfrak{Z}_c \equiv \mathfrak{Z}_b \leq \mathfrak{Z}_w . \tag{4.4}$$

Bei der Untersuchung besonderer Funktionenklassen auf die Krümmungsverhältnisse ihrer Betragflächen wird es sich als sehr wesentlich herausstellen, daß wir unsere Schlüsse nicht auf die Funktion selbst, $w(z)$ und ihren Träger $\mathfrak{Z}_w$, anzuwenden haben, sondern auf den Differentialausdruck $c(z)$ und auf seinen (oft viel einfacheren) Träger $\mathfrak{Z}_c$.

Dieser Umstand wird von Bedeutung, weil er es mit sich bringt, daß bei echten Überlagerungen $\mathfrak{Z}_w > \mathfrak{Z}_c = \mathfrak{Z}_b$ die Verteilung des Krümmungsverhaltens der Betragfläche von $w(z)$ in allen den Blättern von $\mathfrak{Z}_w$ übereinstimmt, welche als Überlagerungen eines und desselben Blattes von $\mathfrak{Z}_c$ erscheinen; auch der Verlauf der parabolischen Linien stimmt also dort überein.

Unsere Betrachtungen gestatten eine wesentliche Vereinfachung für alle Träger, auf welchen eine Wertvorratsaussage vom Typus des Satzes von Liouville gilt — wir bezeichnen sie als *Liouville'sche Träger*. Ist schon $\mathfrak{Z}_w$ ein Liouville-Träger, so wegen der Unterlagerungsbeziehung auch $\mathfrak{Z}_c$. Die einzigen beschränkten Funktionen auf einem Liouville-Träger sind die Konstanten; die Krümmungsregel läßt also für $b(z)$ und $c(z)$ nur die Konstanten übrig, unsere Differentialgleichungen vereinfachen sich.

Dagegen werden wir es mit dem allgemeinen Falle zu tun haben, wenn auf dem Träger des Differentialausdrucks der Liouville'sche Satz nicht gilt, wenn es also dort beschränkte, aber nicht konstante Funktionen gibt, die diesem Träger eigentümlich sind. Wir sprechen dann von einem *Liouville-freien Träger*.

§ 5.

Liouville'sche Träger.

5. 1. Vollebene und Endliche Ebene. $w(z)$ sei eine Funktion, für welche der Differentialausdruck $w'' : w\,w'' = c(z)$ entweder in der Vollebene oder in der endlichen Ebene eindeutig ist. Dort gilt der

Satz von Liouville: *Eine in der endlichen Ebene eindeutige und beschränkte analytische Funktion ist konstant.*

Und etwas allgemeiner, nach linearer Transformation des Wertvorrats, der

Satz von Liouville (in der Form von Casorati-Weierstrass): *Eine in der endlichen Ebene eindeutige analytische Funktion kommt dort jedem Werte w_0 beliebig nahe — sie sei denn eine Konstante.*

Die Forderung nach einsinniger GAUSS-Krümmung der Betragfläche bedeutet nach § 4 das Bestehen einer der beiden *Ungleichungen* (4.3) für $c(z)$. Daher muß $c(z)$ *konstant* sein, gleich c, sobald der Träger von $w(z)$, also auch von $c(z)$, gleich der endlichen Ebene oder der Vollebene ist.

5. 2. Wir haben daher die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{w''^2}{w\,w''} = c = \alpha + i\beta \tag{5. 1}$$

zu ermitteln, wobei $K \lesseqgtr 0$ die Ungleichungen $\alpha \lesseqgtr 1$ entsprechen. Diese Integration ist aber schon in § 3. 2 vollständig erledigt worden. Sie führte auf die Gesamtheit der Funktionen (von einer Drehstreckung $a\,z + b$ statt z abgesehen)

$$z^c = z^{\alpha+i\beta}, \tag{5. 2}$$

die *allgemeinen Potenzen, mit komplexem Exponenten*[5]).

Ihre Krümmung ist negativ oder positiv, je nachdem der Realteil α des Exponenten kleiner oder größer als 1 ist.

Die allgemeinen Potenzen sind weithin die *einzigen* Funktionen mit durchweg einsinnig gekrümmter Betragfläche. Um ihre isolierte Stellung zu ermessen, ist es nötig, die Tragweite unserer Schlußweise auszuschöpfen.

5. 3. Liouville'sche Träger. Die Bedingung (4.3) für die Einsinnigkeit führt nämlich stets dann auf die Konstanz von $c(z)$, also auf die spezielle Differentialgleichung (5. 1), wenn auf dem Träger $\mathfrak{Z}_e$ der „LIOUVILLE'sche Satz" gilt, das heißt: Wenn aus einer Beschränktheit des Wertvorrats einer auf $\mathfrak{Z}_e$ eindeutig ausgebreiteten analytischen Funktion schon auf das völlige Einschrumpfen des Wertvorrats zu einer Konstanten geschlossen werden kann. Das ist aber viel allgemeiner der Fall als bloß in der punktierten Ebene.

Der „LIOUVILLE'sche Satz"gilt vielmehr auch für alle geschlossenen RIEMANN'schen *Flächen von endlichem Geschlecht p.*

Er gilt ferner für einfach zusammenhängende RIEMANN'sche Flächen, welche eineindeutig und konform in die endliche Ebene abgebildet werden können (*„Grenzpunktartige RIEMANN'sche Flächen"*).

Er gilt für die aus der Theorie der *algebroiden* Funktionen bekannten Flächen, welche über der endlichen z-Ebene überall k-blättrig (k endlich) ausgebreitet sind und dort nur algebraische Windungspunkte zeigen; diese häufen sich höchstens gegen das Unendliche.

Er gilt endlich ganz allgemein für die *Klasse der RIEMANN'schen Flächen mil „hebbarem Rand"*, die seit dem Kriege besonders von

[5]) Die Konstanten in (5. 1) und (5. 2) sind verknüpft durch (gestrichene Typen für (5. 2)):

$$c' = \frac{c-1}{c}, \quad \text{also} \quad \alpha' = \frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1-2\alpha}, \quad \beta' = \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2+1-2\alpha}.$$

finnischen Mathematikern behandelt worden ist. Darunter sind Flächen, deren Rand sogar positives harmonisches Maß zeigen kann. Man vergleiche dazu etwa NEVANLINNA, PFLUGER und SAARIO [11 bis 13].

Wir fassen alle diese Flächen unter die gemeinsame Bezeichnung *„LIOUVILLE'sche Träger"* zusammen, weil für unsere Untersuchung allein die Eigenschaft entscheidend ist, daß für jede auf einer dieser Flächen eindeutige, analytische Funktion $c(z)$ mit einer Gebietsbeschränkung des Wertvorrats nach (4. 3) schon die Konstanz von $c(z)$ folgt — wie beim klassischen LIOUVILLE'schen Satz in der endlichen Ebene.

Danach können wir unser Ergebnis aussprechen in dem

Satz 6. *Unter allen analytischen Funktionen $w(z)$, deren zugeordneter Differentialausdruck*

$$c(z) = \frac{w'^2}{w w''}$$

auf einem LIOUVILLE'schen Träger $\mathfrak{Z}_c$ eindeutig ausgebreitet werden kann, sind die allgemeinen Potenzen

$$(a z + b)^{\alpha + i\beta}$$

die einzigen mit einsinniger GAUSS-Krümmung der Betragfläche; es ist

$$K \lesseqgtr 0, \quad \text{je nachdem} \quad \alpha \lesseqgtr 1 \quad \text{gilt.}$$

5. 4. Sonderfälle. Es lohnt, einige wichtige Sonderfälle dieses Satzes ausdrücklich hervorzuheben. Wir wollen dabei sagen, daß eine Funktion, deren Betragfläche weder einsinnig (positiv oder negativ) gekrümmt ist, noch auch identisch verschwindende Krümmung zeigt, eine *Betragfläche gemischter Krümmung* habe: Es kommen dann sowohl Punkte positiver, wie Punkte mit negativer GAUSS-Krümmung vor, die vom System der parabolischen Linien ($K = 0$) getrennt werden. Isolierte Nullstellen der GAUSS-Krümmung werden nicht besonders erwähnt.

Beachten wir, daß es unter den reinen Potenzen

$$A(z - B)^c$$

rationale Funktionen gibt (für ganze rationale c) und einige *algebraische* Funktionen vom Geschlecht 0 (für rationale unganze c), so können wir sagen:

VI a) Es gibt *keine rationale Funktion*, und *keine algebraische Funktion vom Geschlecht* 0 mit einsinnig gekrümmter Betragfläche — *außer reinen Potenzen* mit rationalen Exponenten.

VI b) *Alle algebraischen Funktionen vom Geschlecht $p > 1$ zeigen Betragflächen gemischter Krümmung.*

VI c) *Alle ganzen und gebrochenen Transzendenten*, außer e^{az+b}, zeigen Betragflächen gemischter Krümmung.

VI d) *Alle algebroiden Transzendenten* (über der endlichen Ebene genau k-deutig) zeigen Betragflächen gemischter Krümmung.

VI e) Die *Umkehrfunktionen* $z(w) = z$ *aller ganzen, gebrochenen und algebroiden Transzendenten* (wie VI d) zeigen Betragflächen gemischter Krümmung.

5. 5. Ausblick. Man könnte diese Aufzählung noch sehr weit fortsetzen. Denken wir etwa an eine RIEMANN'sche Fläche $\mathfrak{W}$, welche von einer ganzen oder gebrochenen Transzendenten als Bild der endlichen z-Ebene, oder von einer algebroiden Transzendenten als Bild ihres darüber k-blättrigen Trägers $\mathfrak{Z}$ erzeugt wird. Sei $w(z) = w$ die Erzeugende Funktion, $z = z(w)$ deren Umkehrung. Natürlich gibt es auf $\mathfrak{W}$ noch sehr viele andere eindeutig ausgebreitete Funktionen, für welche $\mathfrak{W}$ der genaue Träger ist (d. h. keine überzähligen Verzweigungspunkte und keine entbehrlichen Gebietsstücke enthält). Beispiele bietet schon die Folge aller Ableitungen (neben $z^{(0)}(w) = z(w)$):

$$z'(w),\ z''(w),\ z'''(w),\ \ldots.$$

Auch deren Linearverbindungen „endlichen Grades", etwa

$$Z_n(w) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{(\nu)}(w)$$

sind alle gewiß auf ganz $\mathfrak{W}$ eindeutig ausbreitbar, wenn es auch für spezielle Konstantenwahl eintreten kann, daß der eine oder andere Windungspunkt von $\mathfrak{W}$ entbehrlich wird, d. h. daß ein spezielles $Z_n(w)$ schon einen einfacheren Träger, etwa $\mathfrak{W}_{Z_n}$ besitzt.

Doch gilt auch für diesen Träger wieder der LIOUVILLE'sche Satz; man kann eine Art Majorantenprinzip heranziehen, um aus dem Bestehen einer Überlagerungsbeziehung

$$\mathfrak{W}_{Z_n} < \mathfrak{W}$$

zu schließen: Gilt der LIOUVILLE'sche Satz auf $\mathfrak{W}$, so gilt er a fortiori auf $\mathfrak{W}_{Z_n}$.

Auch die Tatsache, daß es gar nicht auf den LIOUVILLE'schen Satz für $\mathfrak{W}_{Z_n}$ ankommt, sondern bei jedem speziellen $Z_n(w)$ nur auf den Träger $\mathfrak{W}_{D_n}$ des Differentialausdrucks

$$D_n = Z_n'^2 : Z_n Z_n''$$

läßt sich in ähnlicher Richtung verfolgen. Dieser Träger, sinngemäß mit $\mathfrak{W}_{D_n}$ bezeichnet, muß ja wieder einer Überlagerungsbeziehung

$$\mathfrak{W}_{D_n} < \mathfrak{W}_{Z_n} < \mathfrak{W}$$

genügen.

5. 6. Das kann aber ganz anders werden, wenn wir allgemein zu Linearverbindungen „unendlich hohen Grades", $n = \infty$, übergehen, wie

$$Z_\infty(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{(\nu)}(w).$$

Auch hier ist die ganze Flächenklasse in ihrer Gesamtheit gewiß noch

auf $\mathfrak{W}$ eindeutig — aber für eine spezielle unter diesen Funktionen kann $\mathfrak{W}$ viel zu umfangreich sein: Einmal können — wie schon oben — Windungspunkte fortfallen. Viel wichtiger aber ist die Möglichkeit, daß natürliche Grenzen auftreten können, so daß der Träger von Z_∞ ein echtes Teilgebiet (Teilfläche) mit Randkontinuum gegenüber $\mathfrak{W}$ wird. (Man denke an den Einheitskreis gegenüber der endlichen Ebene). Erst recht wird dann der Träger $\mathfrak{W}_{D_\infty}$ des zugeordneten Differentialausdrucks D_∞ Teil von $\mathfrak{W}_{Z_\infty}$ sein, und — vielleicht — durch $\mathfrak{W}_{Z_\infty}$ echt überlagert sein.

Dabei kann die Gültigkeit des Liouvilleschen Satzes für $\mathfrak{W}_{D_\infty}$ verloren gegangen sein. Wir kommen zu dem Fall der *Liouville-freien Träger,* der uns jetzt beschäftigen soll.

§ 6.

Liouville-freie Träger.

6. 1. Ist der Träger $\mathfrak{Z}_e$ mit einem genügend starken idealen Rand behaftet, so ist er vom Liouvilleschen Satze frei: Es gibt dann auf ihm beschränkte, aber nicht konstante eindeutige analytische Funktionen, welche über $\mathfrak{Z}_e$ hinaus nicht fortsetzbar sind; und verschiedene Zusatzabbildungen, welche den Wertvorrat einer solchen Funktion in die linke oder die rechte Halbebene $\Re c \lesseqgtr 1$ werfen (z. B. schon lineare Abbildungen), erlauben es, geeignete Funktionen $c(z)$ herzustellen, welche die Bedingungen für einsinnige Gauss-Krümmung erfüllen. Indes ist dazu erst — bei dem nun *gegebenen* $c(z)$ — die Differentialgleichung

$$\frac{w'^2}{w\,w''} = c(z) \tag{6. 1}$$

zu lösen: Jede ihrer Lösungen $w(z)$ zeigt eine Betragfläche mit einsinniger Gauss-Krümmung, je nach der Halbebene $\Re c \lesseqgtr 1$, in der der Wertevorrat von $c(z)$ gelegen ist, negative oder positive.

Das einfachste Beispiel eines Liouville-freien Trägers bietet der Einheitskreis $\mathfrak{E}$ mit beschränkten, aber nicht über $\mathfrak{E}$ hinaus fortsetzbaren Potenzreihen. Weitere Beispiele sehen wir in grenzkreisartigen Riemannschen Flächen; das sind solche, welche sich eineindeutig und konform in das Innere des Einheitskreises abbilden lassen: Die Abbildungsfunktion selbst gibt ein erstes Beispiel einer beschränkten Funktion auf der Fläche; weitere bieten sich, wenn man die Abbildungsfunktion in irgend eine (in $\mathfrak{E}$) beschränkte Potenzreihe einsetzt.

Unter diesen Flächen bemerken wir etwa besonders alle regulär verzweigten, universellen Überlagerungsflächen einer in $q \geqq 3$ Punkten punktierten Ebene — weiter aber auch alle nicht-universellen Überlagerungsflächen, die zu gegebenen Signaturen λ_k in q-Punkten gehören, wobei von den bekannten wenigen Fällen abzusehen ist, die auf grenzpunktartige Überlagerungsflächen oder auf solche von sphärischem Typus führen.

Danach erwarten wir, *daß es über der Klasse der* Liouville*-freien Träger* $\mathfrak{Z}_c$ *sehr viele analytische Funktionen* $w(z)$ *mit einsinnig gekrümmten Betragflächen geben wird.*

Unsere Betrachtungen erlauben es, grundsätzlich *alle solchen* $w(z)$ mithilfe der Integration der Differentialgleichung *zu bestimmen.* Wir beginnen mit der formalen Integration, bestätigen mit ihrer Hilfe die Existenz vieler Betragflächen einsinniger Gauss-Krümmung über Liouville-freien Trägern, und erläutern erst im nächsten Paragraphen etwas genauer das Aufsteigen von einer beschränkten Funktion zu $w(z)$. Unsere Betrachtungen werden sich *dabei* so allgemein gestalten, daß sie auch für den Fall gelten, wo an $c(z)$ keine einschränkenden Forderungen in bezug auf den Wertvorrat gestellt sind; sie beziehen sich also in gewissem Umfang auch auf die Vorzeichen der Krümmung für allgemeine Betragflächen.

6. 2. Formale Integration. Dazu bringen wir die Differentialgleichung (6. 1) erst in die Form

$$w\,w'' - \frac{1}{c(z)}\,w'^2 = 0,$$

erweitern durch Addieren und Subtrahieren von w'^2 und teilen durch w^2; so finden wir

$$\frac{w\,w'' - w'^2}{w^2} + \left\{1 - \frac{1}{c(z)}\right\}\frac{w'^2}{w^2} = 0.$$

Wir kürzen die Bezeichnung wie schon in §§ 1. 8 und 4. 1 durch

$$b(z) = 1 - \frac{1}{c(z)} = \frac{c(z) - 1}{c(z)} \tag{1. 9}$$

und erhalten dann die Differentialgleichung

$$\left(\frac{w'}{w}\right)' + b(z)\left(\frac{w'}{w}\right)^2 = 0. \tag{6. 2}$$

Das ist eine Bernoullische Differentialgleichung in $j = w' : w$,

$$j' + b(z)\,j^n = 0 \qquad \text{mit } n = 2.$$

Deren Integration gelingt, wie man weiß, durch den Ansatz

$$j = v^{1-n} = \frac{1}{v}, \quad \text{also } \frac{w'}{w} = \frac{1}{v}, \quad \left(\frac{w'}{w}\right)' = -\frac{v'}{v^2};$$

daraus entsteht als Differentialgleichung

$$v' = b(z) \tag{6. 3}$$

und unter Integration mit willkürlicher Konstante a

$$v(z) = a + \int^z b(\tau)\,d\tau.$$

(Die untere Integralgrenze denken wir festgelegt, lassen sie aber fort, um den Formelsatz zu erleichtern.)

Verfolgen wir den Weg rückwärts zu $w(z)$, so wird

$$j = \frac{w'}{w} = \frac{1}{a + \int_0^t b(\tau)\, d\tau}, \tag{6.4}$$

und daraus schließlich

$$w(z; a) = w(0) \exp \int_0^z \frac{dt}{a + \int_0^t b(\tau)\, d\tau} = w(0) \exp J(z). \tag{6.5}$$

Satz 7. *Die beiden Differentialgleichungen* (6.1) *und* (6.2) *sind unter der linearen Beziehung* (1.9) *für die gegebenen Funktionen* $b(z) = \frac{c(z) - 1}{c(z)}$ *gleichbedeutend. Ihre vollständige Lösung gelingt durch zwei Quadraturen vermöge*

$$w(z; a) = w(0) \exp \int_0^z \frac{dt}{a + \int_0^t b(\tau)\, d\tau}. \tag{6.5}$$

Es entsteht so eine von zwei Parametern, a und $w(0)$, abhängige Schar von Lösungen[6]).

Die Abhängigkeit von a wird sich als sehr wesentlich herausstellen; dagegen bewirkt $w(0)$ keine Änderung der Vorzeichen bei der Gauss-Krümmung, und wir werden ihm daher keine Beachtung zu schenken brauchen.

6.3. Der Einheitskreis als Träger. Wenn wir in (6.5) mit einer Funktion $b(z)$ eingehen, welche in ihrem Gesamtverlauf dem Inneren bzw. in ihrem Gesamtverlauf dem Äußeren des Kreises

$$|b(z) - \tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}$$

angehört, so liefert der Quadraturprozeß mit nachfolgender Erhöhung in den Exponenten eine analytische Funktion $w(z)$ mit einsinnig (positiv — bzw. negativ) gekrümmter Betragfläche.

Wir behandeln vorweg als einfachsten Fall den Einheitskreis als Träger; bei ihm bleibt eine wesentliche zusätzliche Schwierigkeit ausgeschlossen, und er liefert zugleich eine besonders wichtige Klasse mit einsinnig gekrümmten Betragflächen.

Es sei in ihm eine beschränkte Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ gegeben,

$$|\mathfrak{P}(z)| < 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Wir bilden aus ihr zwei beschränkte Funktionen

---

[6]) Dieser Satz ist von der Krümmungsregel ganz unabhängig. Er erlaubt es auch bei ganz beliebigen Trägern $\mathfrak{Z}_b$ von $b(z)$ durch ein konkretes Integrationsverfahren zu $w(z)$ aufzusteigen. Vgl. auch [7]).

(6. 6) $$b_-(z) = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{P}(z) - 1\} \quad \text{und} \quad b_+(z) = \tfrac{1}{2}\{\mathfrak{P}(z) + 1\}.$$

Sie erfüllen die Wertvorratsbedingungen, die unsere Krümmungsregel festlegt, um beim Aufsteigen von $b_\pm(z)$ zu $w_\pm(z)$ nach (6. 5) einsinnige Krümmung der Betragflächen zu erhalten; das Vorzeichen der Krümmung wird durch den Index angedeutet.

Bei dem Integrationsprozeß wird man darauf zu achten haben, ob im Nenner eine Nullstelle entsteht, d. h. ob

(6. 7) $$a + \int^{z} b(\tau)\, d\tau = 0$$

wird. Eine *einfache Nullstelle $z = s$ dieses Nenners* bringt bei der zweiten Integration einen Logarithmus herein, und bei der Erhebung in den Exponenten entsteht in der Regel eine allgemeine Potenz. Man bemerkt, daß es dabei auf den Koeffizienten $b_0 = b(s)$ ankommt, wenn wir etwa $z = s$ als untere Grenze der Integration wählen (das kann geschehen, da wir die Integrationskonstanten in a und $w(0)$ besonders berücksichtigt haben); es entsteht bei $w(z)$ ein Potenzfaktor

(6. 8) $$w(z) = w(0)\,(z-s)^{\frac{1}{b_0}}\,\mathfrak{Q}(z-s);$$

die arithmetische Natur von b_0 entscheidet über das Verzweigungsverhalten: $w(z)$ hat in der Regel über $z = s$ einen logarithmischen Windungspunkt; für rationales b_0 vereinfacht sich dieser zu einem algebraischen Windungspunkt, und nur wenn b_0 der Kehrwert einer ganzen Zahl ist, bleibt die Funktion unverzweigt. In den Sonderfällen bringt zudem negatives b_0 polares Verhalten.

Der Nenner (6. 7) bleibt aber gewiß ungleich 0 für alle a mit $|a| > 1$; denn das Integral in (6. 7) ist bei der Wahl von $b(z)$ nach (6. 6) betragkleiner als 1. Ähnliches kann auch erreicht werden, wenn man den Wertvorrat von $b(z)$ anders, aber beschränkt, normiert.

Satz 8. *Über dem Einheitskreis $\mathfrak{E}$ als Träger können, von jeder beschränkten Potenzreihe aus, beliebig viele Funktionen $w_\pm(z, a)$ mit einsinnig gekrümmten Betragflächen aufgebaut werden.*

Diese sind im allgemeinen erst auf einer Überlagerungsfläche $\mathfrak{Z}_{w,a}$ mit logarithmischen Verzweigungen gegenüber $\mathfrak{E}$ eindeutig ausgebreitet. Durch passende Wahl der Integrationskonstanten a, in gewissen Gebieten, läßt sich jedoch erreichen, daß solche Funktionen schon gegenüber dem Träger $\mathfrak{E}$ unverzweigt bleiben, das heißt, daß sie selbst $\mathfrak{E}$ zum Träger haben $\mathfrak{Z}_{w,a} \equiv \mathfrak{E}$. —

6. 4. Verallgemeinerungen. Unverzweigtheit von w gegen $\mathfrak{Z}_b$. Es ist offenbar möglich, diese Aussage nicht unerheblich zu verallgemeinern, etwa auf ein beliebiges, beschränktes, schlichtes Gebiet von einfachem Zusammenhang. Wir machen aber darauf aufmerksam, daß man nicht ganz allgemein behaupten kann, es gebe *auf jedem* Liouville-freien

Träger schon *eindeutig* ausgebreitete Funktionen mit einsinnig gekrümmter Betragfläche: Man kann vielmehr nur sagen, daß es *über* ihm solche Funktionen gebe, die aber im allgemeinen Falle erst auf einer *echten* Überlagerungsfläche $\mathfrak{Z}_w > \mathfrak{Z}_b$ eindeutig, gegen $\mathfrak{Z}_b$ also relativ verzweigt oder singulär sein können.

Das Auftreten einer Relativverzweigung hängt offenbar in erster Linie damit zusammen, daß bei dem doppelten Quadraturprozeß schon im ersten Schritt eine Funktion

$$B(z) = \int^{z} b(\tau)\, d\tau \tag{6.9}$$

entstehen kann, deren Wertvorrat die *endliche Ebene überdeckt* (man beachte Integrationswege unbegrenzter Länge); es könnte dann keine Integrationskonstante a gefunden werden, derart, daß

$$a + B(z) \neq 0 \tag{6.10}$$

bleibt. Dann muß aber für den zweiten Quadraturschritt das Auftreten eines von Null verschiedenen Residuums im Differential, und damit einer logarithmischen Verzweigung für $w(z, a)$ besorgt werden. Andererseits könnte sich ja auch schon beim ersten Quadraturschritt ein Logarithmus einstellen, falls für $b(z)$ — im Falle der Bedingung für hyperbolische Krümmung — Pole allgemeiner Art zugelassen werden.

Alle diese Vorkommnisse haben wir durch unser Vorgehen unter § 6.3 ausgeschlossen.

Unter den Liouville-freien Trägern werden demnach offenbar solche ein besonderes Interesse verdienen, auf denen es beschränkte Funktionen gibt, welche, nach passenden linearen Abbildungen ihres Wertvorrats in Teilgebiete von $|2\,b(z) - 1| \lesseqgtr 1$, Integrale zulassen mit einem über ganz $\mathfrak{Z}_b$ *von der endlichen Ebene verschiedenen Wertvorrat. Dann gibt es auf* $\mathfrak{Z}_b$ *eindeutige* $w(z)$. Sie entstehen, wenn man die Integrationskonstante a aus den Ausnahmewerten von $-B(z)$ wählt.

§ 7.

Funktionentheoretische Schlüsse über $w(z)$ bei gegebenen $b(z)$.

7.1. Es ist zweckmäßig in einigen Bemerkungen zu erörtern, welche funktionentheoretischen Aussagen sich über $w(z)$ gewinnen lassen, wenn das Verhalten von $b(z)$ bekannt ist. Der Aufbau von $w(z)$ aus $b(z)$ nach Formel (6.5) geschieht in fünf Schritten:

Erste Quadratur $B(t) = \int^{t} b(\tau)\, d\tau$,

Wahl der Integrationskonstanten a (Schiebung $a + B(z)$),

Stürzung $j(z) = \frac{1}{a + B(z)}$,

Zweite Quadratur $J(z) = \int^{z} j(t)\,dt$,

Erhöhung $w(z) = \exp J(z)$.

Jeder einzelne dieser Schritte ist in seiner Wirkung wohlbekannt — ihr Zusammenwirken aber macht doch ein sorgfältiges Eingehen auf mehrere mögliche Sonderfälle notwendig. Es ist unsere Absicht, das an anderer Stelle näher auszuführen, weil die Ergebnisse auch für sich ein gewisses Interesse bieten und für andere Zwecke festgehalten zu werden verdienen; nach den Angaben bei Herrn KAMKE [16] scheint die Differentialgleichung (6. 1) bzw. (6. 2) bei allgemeinen $c(z)$ oder $b(z)$ bisher nicht näher betrachtet zu sein[7]).

Wir begnügen uns hier damit, aufgrund unserer Untersuchung einige Erscheinungen beispielhaft herauszustellen, welche geeignet sein mögen erkennen zu lassen, was allgemein das Aufsteigen von $b(z)$ zu $w(z)$ mit sich bringt, und welche Tragweite unserer Gegenüberstellung der Träger $\mathfrak{Z}_b$ und $\mathfrak{Z}_w$ zukommt.

Dabei tritt natürlich noch wesentlich die Belegung von $\mathfrak{Z}_b$ mit Funktionen $b(z)$ ins Spiel — und die Wahl der Integrationskonstanten a, die an *einer* Stelle festgelegt werden kann, dann aber an allen anderen Stellen *durch Fortsetzung erschlossen* werden muß. Das ist insbesondere da zu beachten, wo wir die Integration *lokal* ausführen; wir verstehen dann unter $B(z)$ stets das Integral ohne Konstante, d. h. bei Reihenentwicklung von $b(z)$: Wir sehen die Entwicklungsmitte als untere Integralgrenze an.

7. 2. Vollebene als Träger. Schon dieses einfachste Beispiel eines Trägers $\mathfrak{Z}_b$, mit $b(z) = \text{const} = b$ belegt, führte uns in § 3 und § 5 auf die Funktionen

$$w(z) = e^{az} \quad \text{und} \quad w(z) = (b\,z + a)^{\frac{1}{b}}$$

---

[7]) Diese Differentialgleichungen sind bei KAMKE [16] nicht ausdrücklich erwähnt: Es finden sich nur Sonderfälle wie 6,164 $n\,y\,y'' - n - 1\,y'^2 = 0$ und 6,125 entsprechend unserem (3. 3) im Reellen. Andererseits sind diese Gleichungen als Sonderfälle von 6,224 unterstrichen: $f(y)\,y'' + a\,f'(y)\,y'^2 + g(y) = 0$.

Unsere Gleichungen sind bei $f(y) = y$, $g(y) = 0$ dadurch wesentlich allgemeiner, daß an Stelle der Konstanten a eine Funktion $c(z)$ eintritt. So entsteht ein ausgezeichneter Fall von KAMKE 6,187 und 6,241, der vielleicht der Erwähnung für sich wert ist, gerade angesichts seiner hier erschlossenen funktionentheoretischen Rolle. Er macht die dort angezogenen Theorien entbehrlich.

Wenn man auch weiß, daß unsere Gleichungen als BERNOULLISche Gleichungen und damit Sonderfälle einer RICCATIschen Gleichung auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung zurückgespielt werden könnten, so ist doch dieser Vorgang so verwickelt, daß die in diesem Abschnitt skizzierten direkten Schlüsse über die lokale funktionentheoretische Struktur von $w(z)$ in Abhängigkeit vom Träger $\mathfrak{Z}_b$ und seiner Belegung $b(z)$ — aufgrund der Quadraturformeln — recht dienlich scheinen.

mit einer *wesentlichen Singularität* bzw. *zwei logarithmischen Windungspunkten*, beide über Stellen des Trägers, wo die Belegungsfunktion $b(z) = b$ regulär geblieben war.

In der Tat ergibt sich aus unserer Quadraturformel (6. 5) für $b \neq 0$

$$w(z) = \exp \int^{z} \frac{d\,t}{a + \int^{t} b\,d\,\tau} = \exp \frac{1}{b} \int^{z} \frac{d(b\,t + a)}{b\,t + a} = (b\,z + a)^{\frac{1}{b}},$$

und für $b = 0$ die Exponentialfunktion e^{az} (wenn wir die Integrationskonstante ausnahmsweise als $1/a$ bezeichnen).

Schon hier macht sich die Bedeutung des konstanten Gliedes in der Entwicklung von $b(z)$ und die des Wertes der ersten Integrationskonstanten a bemerkbar; die zweite ist ja (als multiplikative Konstante) unerheblich und bleibe außer Betracht.

7. 3. Lokale Untersuchung. Man kann das Aufsteigen von $b(z)$ zu $w(z)$ ohne Schwierigkeit *lokal* verfolgen, und gewinnt dabei guten Überblick über alle Möglichkeiten, die eintreten können, auch dann, wenn für den Träger $\mathfrak{Z}_b$ eine beliebige Riemannsche Fläche herangezogen und eine ganz allgemeine Belegungsfunktion $b(z)$ zugelassen wird. Es sei $z = s$ eine beliebige flächeninnere Stelle mit λ-blättriger Umgebung ($\lambda \geqq 1$), und dann u eine zugeordnete Ortsuniformisierende; bei lokaler Betrachtung genügt es,

$$z - s = u^{\lambda} \quad \text{oder} \quad z = u^{-\lambda} \tag{7. 1}$$

zu wählen, je nachdem s endlich oder unendlich ist.

Es sei dann das gegebene $b(z)$ nach der Ortsuniformisierenden entwickelt

$$b(z) = u^{\varrho}\,\mathfrak{b}(u) \qquad (\varrho \text{ ganz}). \tag{7. 2}$$

Funktionszeichen in Fraktur mögen fortan gemeine Potenzreihen bedeuten, deren konstantes Glied ungleich Null ist, und deren Koeffizienten mit entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet seien:

$$\mathfrak{b}(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots \qquad (b_0 \neq 0).$$

Eine Anzahl sorgfältiger Fallunterscheidungen erlaubt es dann, immer bis zu Aussagen über die funktionentheoretische Natur von $w(z)$ im Kleinen vorzudringen. Sie hängt von folgenden Umständen ab:

α) von der Unterscheidung endlicher s von $s = \infty$.

β) von der Integrationskonstanten a (gleich oder ungleich 0).

γ) von der Lage der Ordnung ϱ zur Blattzahl λ.

δ) von der Blattzahl λ, weil die Differentiale

$$d\,z = \lambda\,u^{\lambda-1}\,d\,u \quad \text{bzw.} \quad d\,z = -\lambda\,u^{-\lambda-1}\,d\,u \tag{7. 1'}$$

bei beiden Quadraturen logarithmische Glieder einbringen können, unter einer gewissen Verschiebung der Potenzen, welche in den Entwicklungen

von $b(z) = u^{\varrho}\mathfrak{b}(u)$ oder von $j(z) = 1 : (a + B(z))$ auftreten können. Wenn das Residuum, der Koeffizient von u^{-1} des Gesamtdifferentials, verschwindet, kann das logarithmische Glied fortfallen.

Es muß dabei beachtet werden, daß ja schon aus der ersten Quadratur ein logarithmisches Glied auftreten kann. Dann wird die Entwicklung von $j(z)$ nach Potenzen von u allein unmöglich; man wird vielmehr auf Doppelreihen geführt, die nach u *und* $\log u$ fortschreiten, oder schärfer gesagt, nach Potenzen von u und von $u^{p}\log u$, mit festem positiven p, bzw. nach Potenzen von u und negativen Potenzen von $\log u$. Die zweite Quadratur führt dann dazu, den Exponenten $J(z)$ aus typischen Integralen aufzubauen, welche die Form haben

$$J_{\mu\nu} = \int u^{\mu-1}\log^{\nu} u\, d\, u. \tag{7.3}$$

Sie lassen sich elementar durch *Logarithmen* auswerten für $\nu \geqq 0$, während sie für $\nu < 0$ auf den *Integrallogarithmus* zurückgeführt werden können:

$$\int \frac{d\, u}{\log u} = \mathrm{li}_1 u = C + \log\log u + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\log^{\varkappa} u}{\varkappa!\,\varkappa}. \tag{7.4}$$

Der Integrallogarithmus ist ja die „einzige" neue Funktion, welche bei *doppelter* Quadratur rationaler Funktionen auftritt.

Die Erhöhung führt in diesen Fällen immer noch zum Auftreten logarithmisch verzweigter Faktoren bei $w(z)$. Nur wenn $J(z)$ den Logarithmus *allein* in der Form const $\log u$ enthält, kann $w(z)$ allein die allgemeine Potenz u^{const} als Faktor zeigen, die sich je nach der arithmetischen Natur der Konstanten in Exponenten auf eine algebraische oder sogar auf eine eindeutige Funktion, mit regulärem oder polarem Wertvorrat nahe $u = 0$, vereinfachen könnte.

Wir wenden uns jetzt zu einer knappen Übersicht über die wichtigsten Erscheinungen, ohne jedoch die längeren, wenn auch einfachen Rechnungen auszuführen.

7.4. Endliche Stellen des Trägers. Wir haben zu unterscheiden:

$$\boldsymbol{\varrho \geqq 0,\ a \neq 0} \tag{7.41}$$

liefert $w(z) = \mathfrak{W}(u)$ als reguläre Potenzreihe in u, d. h. im wesentlichen mit demselben Verzweigungsverhalten wie $b(z)$. Ganz anders, wenn aber

$$\boldsymbol{\varrho \geqq 0,\ a = 0} \tag{7.42}$$

ist. Dann bedingt $\varrho > 0$ eine *wesentliche Singularität*, $\varrho = 0$ das Auftreten einer *allgemeinen Potenz* als Faktor bei $w(z)$, und zwar

$$w(z) = (z - s)^{1/b_0}\mathfrak{W}(u);$$

je nach der Natur von b_0 kann sich die logarithmische Verzweigung vereinfachen.

$\varrho < 0$. *Negative* $\varrho = -\varkappa$ bedingen eine dreifache Fallunterscheidung. Hier wird das endliche s über $b(z) = \infty$ hin abgebildet; es kommt auf die Änderung der Blattzahl an:

(7.43) $\varkappa < \lambda$, *die Blattzahl sinkt*

(der Fall scheidet für schlichte Träger aus). Hier wird $w(z)$ regulär in u, und zwar

$$w(z) = 1 + u^{\lambda}\,\mathfrak{W}(u) \quad \text{oder} \quad w(z) = 1 + u^{\varkappa}\,\mathfrak{W}(u),$$

je nachdem die Integrationskonstante $a \neq 0$ oder $a = 0$ ist.

(7.44) $\varkappa = \lambda$, *die Blattzahl bleibt fest,*

(7.45) $\varkappa > \lambda$, *die Blattzahl wächst.*

Diese beiden Fälle führen eben auf Entwicklungen der Art, wie sie unter Nr. 7. 3 als Entwicklungen nach Logarithmen oder Integrallogarithmen skizziert worden sind.

Für Funktionen mit einsinnig gekrümmten Betragflächen scheidet der Fall $\varrho > 0$ ganz aus, weil er offenbar mit der Krümmungsregel für $b(z)$ unverträglich ist: Die wesentliche Singularität von $w(z)$ entspringt aus einer Nullstelle von $b(z)$, in deren Umgebung aber beiderlei Krümmungen auftreten müssen. Andererseits können alle Fälle mit $\varrho = -\varkappa < 0$ nur in Gebieten durchweg hyperbolischer Flächenkrümmung in Betracht kommen.

7.5. Als ein besonders einfaches Beispiel behandeln wir den Fall

$$b(z) = \frac{1}{z},$$

der nach der Quadraturformel (6.5) bei $a = 0$ auf

(7.5) $$w(z) = \exp(\mathrm{li}_1 z)$$

führt. Das Krümmungsverhalten der Betragfläche dieser Funktion ergibt sich, wenn man $b(z) = 1 - \frac{1}{c(z)}$ beachtet, also aus

$$c(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Nach unserer Bemerkung über diese lineare Abbildung in § 1, 5 und der Krümmungsregel hat $\exp(\mathrm{li}_1 z)$ eine Betragfläche, welche in allen ihren Blättern über den Halbebenen

$$\Re z < 1 \text{ negativ}, \quad \text{über } \Re z > 1 \text{ positiv}$$

gekrümmt ist, während die Gesamtheit der parabolischen Linien über $\Re z = 1$ durch alle Blätter verläuft.

Unsere Funktion gestattet die explizite Darstellung

$$w(z) = \exp(\mathrm{li}_1 z) = \log z \cdot \exp\left(C + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\log^{\varkappa} z}{\varkappa!\,\varkappa}\right),$$

die auf der ganzen Polarkoordinatenfläche konvergiert.

7. 6. Unendliche Stellen des Trägers bringen fast durchweg Komplikationen für $w(z)$ mit sich. Für

$\varrho \leqq \lambda$ ist eine logarithmische Verzweigung von $w(z)$ die Regel; im Exponenten $J(z)$ hat man es dabei mit typischen Teilintegralen der Form $J_{\mu\nu}$ zu tun; für $\varrho = \lambda$ wird $\nu < 0$ und logarithmische Verzweigung ist unvermeidlich. Für $\varrho < \lambda$ bleibt $\nu > 0$, und es treten nur endlich viele $\mu < 0$ auf. Indes gibt es für $\varrho < \lambda$ einen Ausnahmefall, bei dem $w(z) = \mathfrak{W}(u)$ regulär in u ausfallen kann, dann nämlich, wenn

1) in $b(z)$ der Koeffizient $b_{\lambda-\varrho}$ verschwindet und

2 a) entweder $\varrho < 0$ ist,

2 b) oder für $0 \leqq \varrho < \lambda$ in $j(z) = u^{\lambda-\varrho}(j_0 + j_1 u + \cdots)$ der Koeffizient $j_\varrho = 0$ ist. Für $\lambda = 1$, $\varrho = 0$ ist das nicht möglich.

$\varrho > \lambda$ führt, in mehreren Unterfällen, auf eine Darstellung von $w(z)$ als ein Produkt aus zwei Faktoren, deren erster in $u = 0$ (also $z = \infty$) notwendig wesentlich singulär wird, während der zweite eine allgemeine Potenz ist, die sich je nach der arithmetischen Natur ihres Exponenten vereinfachen kann und für $\varrho > 2\lambda$ ganz fehlt.

§ 8.

Über die Natur zugeordneter Träger $\mathfrak{Z}_c$ und $\mathfrak{Z}_w$.

8. 1. Durch den Differentialausdruck

$$(8.1) \qquad \frac{w'^2}{w\,w''} = c(z) \quad \text{oder} \quad \frac{w'^2 - w\,w''}{w'^2} = b(z)$$

und die Umkehrformel (6. 5) sind zwei Riemannsche Flächen $\mathfrak{Z}_w$ und $\mathfrak{Z}_c = \mathfrak{Z}_b$ einander zugeordnet. Wir haben schon festgestellt, daß die zweite dieser Flächen eine *Unterlagerung* der ersten ist; denn der Differentialausdruck (8. 1) ist gewiß auch auf $\mathfrak{Z}_w$ eindeutig, bedarf aber i. a. nicht aller Verzweigungen und singulären Stellen dieser Fläche, wie wir im vorigen Paragraphen genau belegt haben. Daher ist jedenfalls $\mathfrak{Z}_c$ immer dann ein Liouville-Träger, wenn $\mathfrak{Z}_w$ es ist. Das heißt, daß alle Funktionen $w(z)$, die selbst auf Liouville-Trägern ausgebreitet sind, sicher Betragflächen gemischten Krümmungsverhaltens zeigen.

Andererseits ist $\mathfrak{Z}_w$ stets Liouville-frei, wenn schon $\mathfrak{Z}_c$ es ist.

Man kennt, insbesondere durch Herrn Pfluger [12], hinreichende (aber doch nicht erschöpfende) Kriterien dafür, daß eine Fläche Liouville-Träger sei; dort wird von (w, M)-Hebbarkeit gesprochen.

8. 2. Es entsteht aber die Frage, ob etwa auch *jedem* Liouville-Träger $\mathfrak{Z}_c$ nur Liouville-Träger $\mathfrak{Z}_w$ zugeordnet werden könnten. Wir wollen das in größerem Zusammenhange in einer besonderen Arbeit behandeln, weil dazu neue methodische Mittel bereitgestellt werden müssen. Wir zeigten durch Beispiele:

Satz 9. *Es gibt Zuordnungen von* Liouville*-Trägern und* Liouville*-freien Trägern.*

8. 3. Ergebnis. Unser Beispiel, und damit Satz 9 lassen erkennen, daß es wesentlich ist, die Einzigkeitsaussage des Satzes 6 auf den Träger der Differentialausdrücke (8. 1) zu beziehen, und sich *nicht* etwa auf Liouville-Träger von $w(z)$ zu beschränken.

Auf der anderen Seite gestatten die Betrachtungen von § 7 den Satz 8 auszudehnen zu:

Satz 10. *Über jedem* Liouville*-freien Träger $\mathfrak{Z}_b$ können, von jeder beschränkten Funktion $b(z)$ ausgehend, nach den Integrationsregeln* (6. 5) *beliebig viele analytische Funktionen $w(z)$ konstruiert werden, deren Betragflächen im Gesamtverlauf einsinnig (durchweg positiv oder durchweg negativ) gekrümmt sind, sobald $b(z)$ den Krümmungsvorschriften* (4. 3) *entsprechend normiert wird.*

Freilich kann nur in ganz besonderen Fällen — wie etwa beim Einheitskreise — behauptet werden, daß diese Funktionen *schon über dem Träger $\mathfrak{Z}_b$ selbst eindeutig* ausgebreitet sind, daß also $\mathfrak{Z}_w$ mit $\mathfrak{Z}_b$ zusammenfällt. Im allgemeinen wird man erhebliche Relativverzweigungen und wesentliche Singularitäten (also Lochungen) gegenüber des Ausgangsträger $\mathfrak{Z}_b$ in Kauf nehmen müssen; gerade darüber sollte § 7 einen gewissen Einblick gestatten.

§ 9.

Die Potenzbetragflächen.

9. 1. Die ausgezeichnete Rolle der Betragflächen zur allgemeinen Potenz $w(z) = z^{\alpha+i\beta}$ rechtfertigt es, etwas näher auf die Gestalt solcher Flächen einzugehen. Das wird umso mehr am Platze sein, als ja die allgemeine Potenz in der Fuchsschen Theorie der linearen Differentialgleichungen eine hervorragende Rolle spielt, gleichwohl aber in den Funktionentafeln von Herrn Emde nicht unter die dort wiedergegebenen Betragflächen aufgenommen worden ist.

Wir setzen $z = re^{i\varphi}$, und finden nach

$$h = |z^{\alpha+i\beta}| = |\exp \Re\,(\alpha + i\beta)\,(\log r + i\varphi)| = \exp\,(\alpha \log r - \beta\varphi)$$

in Zylinderkoordinaten r, φ, h die Darstellung

$$h = r^{\alpha} e^{-\beta\varphi}. \tag{9. 1}$$

Sie legt es nahe, den Verlauf der Flächen an Hand von Schnitten mit den Koordinatenflächen zu verfolgen, indem wir der Reihe nach h, φ oder r als Konstante auffassen. Um unsere Formeln hier übersichtlich zu gestalten, wollen wir vereinbaren, eine festgehaltene Koordinate mit gewöhnlichen Typen, eine Veränderliche dagegen mit fetteren Typen $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{h}$ wiederzugeben.

9. 2. Horizontalschnitte. Wir fassen erst h als Konstante auf und erhalten

$$r = h^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\beta}{\alpha}\varphi} = e^{\frac{\beta}{\alpha}\left(\varphi + \frac{1}{\beta}\log h\right)}. \tag{9. 2}$$

Alle Horizontalschnitte sind also logarithmische Spiralen, untereinander kongruent, aber für verschiedene h gegeneinander gedreht. Ersetzen wir φ durch $\varphi + 2\pi$, so kann die Spirale zu h_0 wegen

$$e^{\frac{\beta}{\alpha}(\varphi + 2\pi)} = \left(e^{2\pi\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot e^{\frac{\beta}{\alpha}\varphi}$$

zugleich als z-Projektion des Schnittes zu $h_1 = e^{2\pi\beta} h_0$ aufgefaßt werden, ja sogar als die aller Schnitte zu

$$h_n = (2\pi\beta)^n h_0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9. 3}$$

Der Anstellwinkel ϑ, unter dem die logarithmischen Spiralen die Halbstrahlen von $z = 0$ aus schneiden, hängt nur vom Verhältnis $\beta : \alpha$ ab; bekanntlich ist bei $r = r(\varphi)$ allgemein $\dot{r} : r = \operatorname{cotg} \vartheta$, hier also $\vartheta = \operatorname{arc\,ctg} \frac{\beta}{\alpha}$. Das Netz der Höhenlinien in der z-Ebene hängt also nur von $\beta : \alpha$ ab, aber seine Bezifferung von α.

Wir bemerken ein für allemal, daß wir unter die logarithmischen Spiralen stets die Ausartungen einbegreifen: die Halbstrahlen für $\alpha = 0$, die Kreise um $z = 0$ für $\beta = 0$.

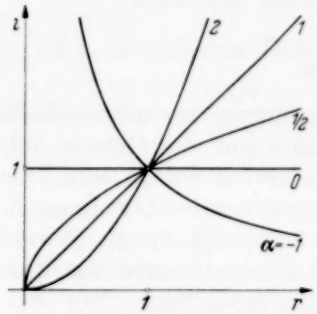

Fig. 3: Fächerschnitte.

9. 3. Fächerschnitte. Wir schneiden zweitens mit den Halbebenen des Fächers durch die h-Achse und fassen jetzt φ als Konstante auf. Alle Schnittkurven

$$h = r^\alpha e^{-\beta\varphi} \tag{9. 4}$$

sind jetzt vom Typus von Parabeln oder Hyperbelästen, doch werden sie in jeder Halbebene in besonderer Weise überhöht durch den Faktor $e^{-\beta\varphi}$. Fig. 3 zeigt die bekannten Typen; für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ tritt Ausartung zu Geraden ein.

9. 4. Zylinderschnitte. Der interessanteste Schnitt entsteht, wenn wir endlich r als Konstante auffassen, und die Fläche mit einem Kreiszylinder um die h-Achse schneiden:

$$h = r^\alpha e^{-\beta\varphi}. \tag{9. 5}$$

Diese Raumkurven gehen aus einer Exponentialkurve ganz ähnlich hervor, wie die gemeine Schraubenlinie aus einer Geraden — wenn man nämlich die Ebene auf den Zylinder aufrollt. Wir nennen eine solche Kurve eine *Exponentialwendel*, kurz *Wendel*. Speziell betrachten wir die *Hauptwendel* auf dem Einheitszylinder $r = 1$,

$$h = e^{-\beta\varphi}. \tag{9. 6}$$

Die allgemeine Wendel über $|z| = r$ entsteht aus ihr durch Projektion orthogonal zur h-Achse („*axiale Projektion*") und nachfolgende *Überhöhung* mit dem Faktor r^{α}.

Alle Potenzen mit demselben β haben *dieselbe Hauptwendel* und ihre *Betragflächen schneiden sich in dieser*[8]). Zur Erzeugung der allgemeinen Wendeln aber ist die Überhöhung in verschiedener Art vorzunehmen, mit r^{α} bzw. $r^{\alpha'}$.

Für $\beta = 0$, also reelle Exponenten, arten die Wendeln in horizontale Kreise aus; die Flächen sind dann Rotationsflächen mit Profilen nach Fig. 3.

9. 5. Figuren. Wir zeigen zuletzt Bilder einiger Potenzbetragflächen[9]). Zur Darstellung wurde schiefe Axonometrie gewählt, aber auf der h-Achse zur Vereinfachung nicht verkürzt. Mit Rücksicht auf günstige Sichtverhältnisse wurden die β in jedem Fall geeignet gewählt, konstante Faktoren zu $z^{\alpha+i\beta}$ hinzugenommen und die Achsen passend gestellt. Unsere Bilder zeigen die Fälle

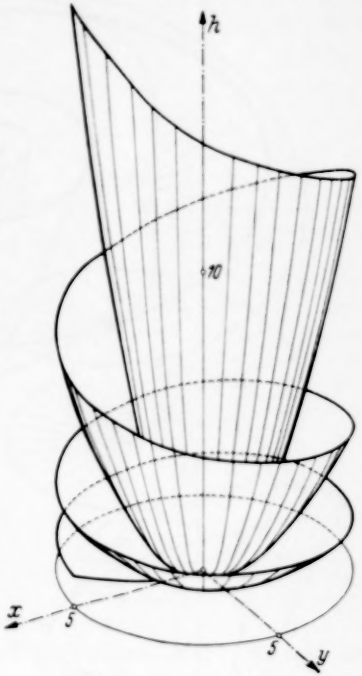

Fig. 4: $\alpha = 1$, $K \gtrless 0$.

$\alpha = 2$. Die Fläche hat durchweg positive Krümmung (Fig. 4).

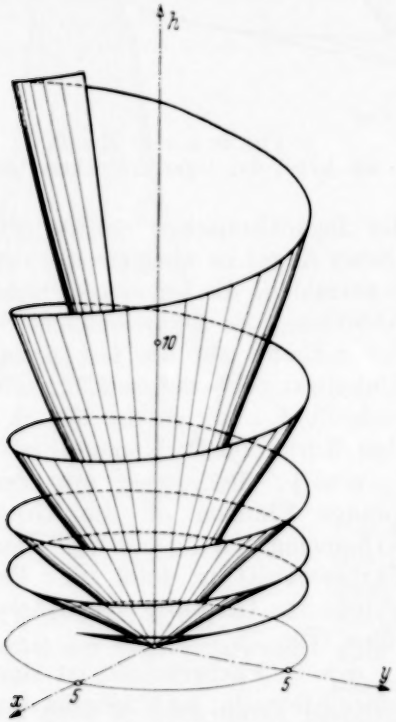

Fig. 5: $\alpha = 1$, $K \equiv 0$, als Kegel der Exponentialwendel.

$\alpha = 1$. Hier ist die GAUSS'sche Krümmung $K \equiv 0$. Fig. 5 zeigt diese Fläche aufgefaßt als Kegel mit der Spitze $z = 0$ und der Hauptwendel

[8]) Man vergleiche meine Arbeit [6].

[9]) Bei der Ausführung dieser Figuren hat mich Herr W. NOLI (Gießen) unterstützt.

als Leitkurve. Dieselbe Fläche aber kann auch durch den Horizontalschnitt als Leitkurve erzeugt werden und erscheint dann als Kegel

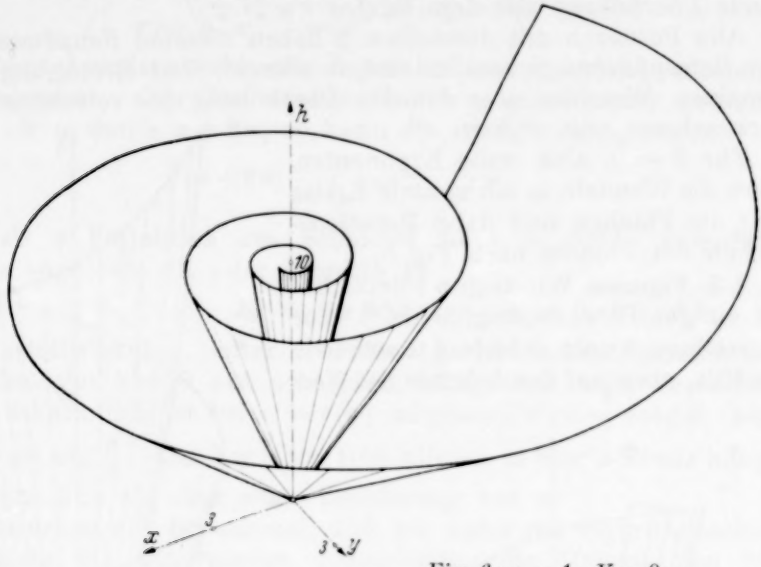

Fig. 6: $\alpha = 1$, $K \equiv 0$,
als Kegel der logarithmischen Spirale.

der logarithmischen Spirale (Fig. 6): Dieser Kegel ist übrigens der Ort aller Sehstrahlen, die bei stereographischer Abbildung die logarithmische Spirale der z-Ebene auf die Loxodrome der Einheitskugel beziehen (Kegelspitze im Südpol), d. i. die in der Nautik wichtige Kurve festen Kompaßkurses.

$\alpha = \frac{1}{2}$. Bei dieser und den folgenden Flächen ist die GAUSS'sche Krümmung K durchweg negativ. Fächerschnitt ist jetzt eine Parabel, welche im Ursprung die h-Achse berührt (Fig. 7).

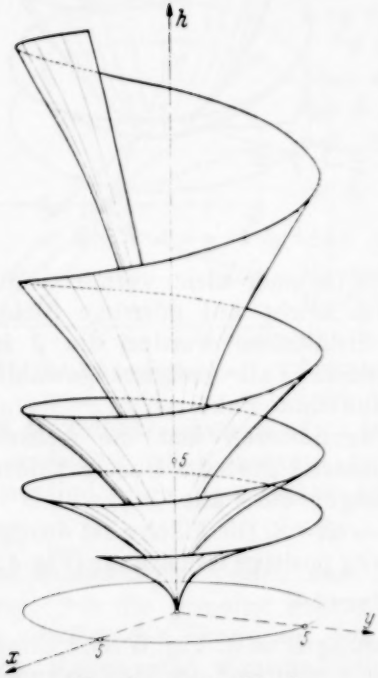

Fig. 7: $\alpha = \frac{1}{2}$, $K < 0$.

$\alpha = 0$. Fächerschnitt ist eine horizontale Gerade; die Fläche ist das *gerade Konoid der Hauptwendel* $\boldsymbol{h} = e^{-\beta\varphi}$; die Fächerschnitte sind diejenigen Geraden, welche die axiale Projektion bewirken; hier findet beim Übergang zu beliebigen r keine Überhöhung statt. Die Fläche ist eine *Regelfläche*, die einzige unter den Betragflächen un-

serer Klasse, außer den vier Fällen der Krümmung null (Fig. 8).

$\alpha = -1$. Fächerschnitt ist hier eine (gewöhnliche) Hyperbel. Mit Rücksicht auf die Annäherung der Fläche gegen die h-Achse — diese ist Asymptote eines jeden Fächerschnitts — wurde in der Zeichnung auch gegen die h-Achse hin mit einem Zylinderschnitt abgeschlossen ($1,5 \leqq r \leqq 5$) (Fig. 9).

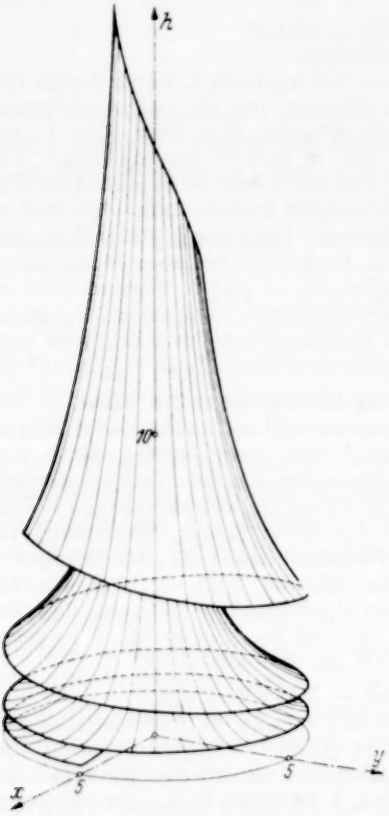

Fig. 9: $\alpha = -1$, $K < 0$. Hyperbelhut der Exponentialwendel.

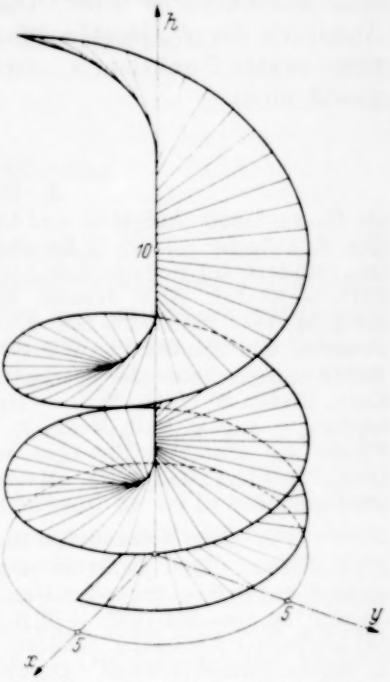

Fig. 8: $\alpha = 0$, $K < 0$. Konoid der Exponentialwendel.

Nachtrag.

Erst nach dem vollständigen Abschluß des vorliegenden Textes ist mir die Arbeit [6a] nachweisbar und zugänglich geworden. Sie gibt für K eine Formel, die unserem (1, 1) nahe kommt, aber minder durchsichtig ist; sie zieht daraus Schlüsse in der Richtung unseres § 3 und Satz 6, doch unter Beschränkung auf Funktionen mit endlich vielen *algebraischen* Windungspunkten bzw. wesentlichen Singularitäten. Die ausgezeichnete Rolle der logarithmisch verzweigten allgemeinen Potenz und ihrer Betragflächen kommt so nicht zur Geltung, wenn auch die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ als Kegel und Konoid genannt sind. Vor allem aber fehlt die Einsicht in die Bedeutung des LIOUVILLE'schen Satzes, bzw. seines Fehlens auf gewissen Trägern,

sowie in Existenz und Konstruktion von einsinnig gekrümmten Flächen im Liouville-freien Falle.

Siemon erwähnt die Mittlere Krümmung, bemerkt aber nicht, *daß es keine analytische Funktion* $w(z) \neq \text{const}$ *gibt, deren Betragfläche eine Minimalfläche wäre.* Das folgt aus dem bei Zaat [5] gegebenen Ausdruck für H; dessen identisches Verschwinden bedingt die Identität zweier Funktionen, deren eine harmonisch ist, die andre aber gewiß nicht.

Literatur.

A. Über Betragflächen.

[1] Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I. Band. Berlin 1925. Bes. S. 110—112. — [2] O. Reimerdes, Über Niveau- und Fallinien auf Flächen, insbesondere auf Modulflächen analytischer Funktionen. 40 S. Diss. Kiel, Leipzig 1911. — [3] J. L. W. V. Jensen, Recherches sur la théorie des équations. Acta math. **36**, 181—195 (1913), bes. S. 194 f. — [4] Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 2. (und spätere) Aufl. Leipzig-Berlin 1933. — [5] J. Zaat, Differentialgeometrie der Betragflächen analytischer Funktionen. Mitt. Math. Sem. Univ. Gießen **30** (1944) 38 S. — [6] E. Ullrich, Geometrisches über Potenzbetragflächen. Z. angew. Math. Mech. **31** (1951) (Im Druck). — [6a] K. Siemon, Über die Fläche des absoluten Betrages analytischer Funktionen komplexen Arguments. Diss. Frankfurt (Main) 1921. (Manuskript; im Verzeichnis d. Univ.-Schriften unter 1923 geführt.)

B. Über Niveaulinien und Krümmungsbetrachtungen an ihnen.

[7] E. Peschl, Über die Krümmung von Niveaukurven bei konformer Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete auf das Innere eines Kreises. Math. Ann. (Berlin) **106**, 574—594 (1932). — [8] H. Schmidt, Elementare Krümmungsbetrachtungen bei konformer Abbildung. Semester-Berichte z. Pflege d. Zusammenhangs v. Univ. u. Schule (Münster/Westf.) **13**, 54—81 (1939). — [9] L. Knöll, Krümmungsverhältnisse von Niveaulinien in der Kreisabbildung einfach-zusammenhängender schlichter Gebiete. Mitt. Math. Sem. Univ. Gießen **27** (1937) 54 S. — [10] L. Hibbert, Univalence et automorphie pour les polynomes et les fonctions entières. Bull. Soc. math. France **66**, 81—113, 115—154 (1938). Réseau $\log R = \text{const.}$, $V = \text{const.}$, des fonctions entières. J. math. pures appl. (9) **19**, 395—409 (1940).

C. Flächen mit hebbarem Rand — Liouville-Träger.

[11] R. Nevanlinna, Sur l'existence de certaines classes de différentielles analytiques. C. r. acad. sci. (Paris) **228**, 2002—2004 (1949). — [12] A. Pfluger, Über das Anwachsen eindeutiger analytischer Funktionen auf offenen Riemann'schen Flächen. Ann. Acad. Sci. Fennicae (Helsinki) **A, I, 64** (1949) 18 S. Sur l'existence de fonctions non constantes, analytiques uniformes et bornées sur une surface de Riemann ouverte. C. r. acad. sci. (Paris) **230**, 166—168 (1950). — [13] L. Sario, Über Riemann'sche Flächen mit hebbarem Rand. These und Ann. Acad. Sci. Fennicae (Helsinki) **A, I, 50** (1948) 78 S. — [14] L. V. Ahlfors, Bounded analytic functions. Duke Math. J. **14**, 1—11 (1947).

D. Allgemeines.

[15] J. E. Littlewood, Lectures on the Theory of Functions. Oxford 1944. — [16] E. Kamke, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig 1942. — [17] N. Nielsen, Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. Leipzig 1906.

(Eingegangen am 31. März 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 4, S. 329—338 (1951).

Absolut konvergente verallgemeinerte Dirichletsche Reihen im Reellen.

Von

Nicolaus Stuloff in München.

Im voraufgehenden Aufsatz des Verf.[1]), den wir im folgenden als Note I zitieren, wurde die Frage der Darstellbarkeit von Funktionen durch verallgemeinerte Dirichlet'sche Reihen mit positiven Koeffizienten im Reellen behandelt. Wir wollen nun Koeffizienten mit beliebigen Vorzeichen zulassen und dieselbe Fragestellung für Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \qquad (a_\nu \text{ reell}, \lambda_\nu > 0, x \geqq 0),$$

die für $x \geqq 0$ absolut konvergieren, untersuchen. Es sei hervorgehoben, daß es sich hier, wie auch in Note I, um ein Entwicklungsproblem handelt, bei dem die Dirichlet-Exponenten λ_ν *nicht* irgendwelche *fest vorgegebenen Zahlen* sind, sondern ebenso wie die Koeffizienten einer *entwickelbaren* Funktion derselben zugeordnet sind und sich aus ihr zusammen mit den Koeffizienten ergeben[2]). Die Exponenten können sich demnach im Endlichen häufen und insbesondere im ganzen Intervall $0 < \lambda_\nu < \infty$ dicht liegen.

Die absolute Konvergenz der Koeffizientensumme ist hier als „Normierungsbedingung" zu verstehen; liegt sie nicht vor, dann ersetze man das Argument durch $x + h$, wo $h > 0$ so zu wählen ist, daß obige Reihe für $x \geqq 0$ absolut konvergiert (was ja stets möglich ist, wenn keine beständige Divergenz vorliegt), d. h. man betrachte statt $f(x)$ bei der Frage nach der Entwickelbarkeit die Funktion $f(x + h)$.

In § 1 werden zwei Sätze formuliert, darunter der Eindeutigkeitssatz der Dirichlet-Entwicklung, die sich beide fast ohne Beweis aus den Ergebnissen der Note I übertragen lassen. § 2 bringt einige vorbereitende Überlegungen, worauf in § 3 das Kriterium für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine solche Reihe aufgestellt wird; § 4 enthält abschließend zwei Bemerkungen zu demselben.

---

[1]) N. Stuloff, Über die Entwickelbarkeit von Funktionen in verallgemeinerte Dirichletsche Reihen, Math. Zeitschr. **53** (1950) S. 273—284.

[2]) Das Entwicklungsproblem dieser Art ist im Komplexen behandelt worden von H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, Acta math. **47** (1926) S. 237—281.

In Note I ist gezeigt worden, daß eine solche Dirichlet'sche Reihe im Falle der *positiven* Koeffizienten sich als Momentenintegral

$$\int_0^1 u^x \, d\Psi(u)$$

einer in $0 \leqq u \leqq 1$ *monoton wachsenden* Belegungsfunktion $\Psi(u)$ darstellen läßt. Auf Grund dieser Tatsache wurde das dortige Kriterium bewiesen. Wenn wir nun zu *beliebigen* Koeffizienten übergehen, so ist bei absoluter Konvergenz eine solche Reihe die Differenz zweier Dirichlet'scher Reihen mit positiven Koeffizienten, so daß ersichtlich die Darstellung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} = \int_0^1 u^x \, d\Theta(u)$$

gilt, wo jetzt aber die Belegungsfunktion $\Theta(u)$ im Intervall $[0, 1]$ von *beschränkter Schwankung* ist. Das Kennzeichen für die Darstellbarkeit einer Funktion durch ein Momentenintegral in diesem erweiterten Sinne werden wir einer Arbeit von F. Hausdorff entnehmen.

Zwei Sätze aus Note I, die für das Folgende grundlegend sind, wollen wir hier nochmals ohne Beweis zusammenstellen:

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Entwickelbarkeit einer für $x \geqq 0$ definierten Funktion $f(x)$ in eine für $x \geqq 0$ konvergente (oder abbrechende) Dirichlet'sche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ mit zunächst noch unbekannten $a_\nu > 0$ und $\lambda_\nu \geqq 0$ ist, daß*

1) *$f(x)$ stetig ist für $x \geqq 0$,*
2) *$f(x)$ beliebig oft differenzierbar ist für $x > 0$,*
3) *$(-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$ ist für alle $x > 0$ und alle $n = 0, 1, 2, \ldots$,*
4) $\sum_{0 < \Lambda < \infty} \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^n\left(\frac{n}{\Lambda}\right) + \lim_{n \to \infty} f(n) = f(0)$ *ist.*

Der unter dem Summen-Zeichen in 4) stehende Ausdruck ist dabei (auf Grund der Bedingungen 1—3) nur für eine höchstens abzählbare Menge der Λ von 0 verschieden, über die dann zu summieren ist. Aus diesen Λ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) ergeben sich die Dirichlet-Exponenten

$$\lambda_\nu = \Lambda_\nu$$

und die dazugehörigen Koeffizienten aus

$$a_\nu = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{e}{\lambda_\nu}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda_\nu}\right) \quad \text{für} \quad 0 < \lambda_\nu < \infty$$

und

$$a_\nu = \lim_{n \to \infty} f(n) \qquad \text{für} \quad \lambda_\nu = 0.$$

Satz 2. *Ist $v(x)$ das Moment einer in $0 \leqq u \leqq 1$ monoton wachsenden Belegungsfunktion $V(u)$,*

$$v(x) = \int_0^1 u^x \, dV(u),$$

und bezeichnet $\alpha(\vartheta)$ die Sprunggrößen von $V(x)$ an den Stellen $0 < \vartheta < 1$ (wo die Stetigkeitsstellen mit $\alpha(\vartheta) = 0$ mit hineingenommen sind), so gilt

$$\alpha(\vartheta) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{e}{\lg \vartheta}\right)^n v^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg \vartheta}\right)$$

für $0 < \vartheta < 1$.

Wir wollen künftig die ersten zwei Forderungen des Satzes 1 nicht mehr gesondert hervorheben, da diese selbstverständlich auch für den jetzigen Fall gelten. Ferner wollen wir den Exponenten $\lambda_\nu = 0$, der einer additiven Konstanten entspricht, der Einfachheit halber ausschließen.

§ 1.

Aus der Koeffizientendarstellungsformel des Satzes 1 können wir nun sofort den Eindeutigkeitssatz der Dirichlet-Entwicklung bei beliebigen Koeffizienten formulieren:

Satz 3 (Eindeutigkeitssatz). *Wenn eine für $x \geqq 0$ definierte Funktion $f(x)$ durch eine für $x \geqq 0$ absolut konvergente Dirichlet'sche Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \qquad (a_\nu \text{ reell}, \ \lambda_\nu > 0, \ x \geqq 0) \tag{1}$$

darstellbar ist, wo die λ_ν (ebenso wie die a_ν) nicht vorgegeben sind, so gibt es nur eine solche Entwicklung, nämlich die Reihe

$$f(x) = \sum_{0 < \Lambda < \infty} \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right) \cdot e^{-\Lambda x}.$$

Beweis. Wenn $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ für $x \geqq 0$ absolut konvergiert, so sind durch

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad \text{und} \quad \psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \text{ wo} \tag{2}$$

$$\alpha_\nu = \tfrac{1}{2}(|a_\nu| + a_\nu) \geqq 0 \text{ und } \beta_\nu = \tfrac{1}{2}(|a_\nu| - a_\nu) \geqq 0,$$

zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eindeutig definiert, die insbesondere beide *total monoton* sind, d. h. es gilt

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad (-1)^n \psi^{(n)}(x) \geqq 0$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ und alle $x > 0$.

Auf diese kann also der Satz 1 angewendet werden und man kann mit

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) \tag{3}$$

schreiben:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n \varphi^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n \psi^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right),$$

da ja wegen Satz 1 die beiden rechts stehenden Limites existieren und die Größen α_ν bzw. β_ν ergeben. Somit liefert der links stehende Grenzwert die Koeffizienten a_ν mit den dazugehörigen Exponenten $\Lambda = \lambda_\nu$. Insbesondere verschwindet er für alle $\Lambda \neq \lambda_\nu$ und damit das ganze hinter dem Summenzeichen in der Behauptung stehende Produkt. Die in $e^{-\Lambda x}$ zu verbleibenden $\Lambda \neq 0$ werden durch den ersten Faktor vorgeschrieben und bilden also gemäß Satz 1 eine höchstens abzählbare Menge, so daß wir den Ausdruck in der Behauptung wieder als eine über alle $0 < \Lambda < \infty$ zu erstreckende Summe stehen lassen können. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Beschränkt man sich z. B. auf solche Funktionen, die durch die sog. *gewöhnlichen* Dirichlet'schen Reihen

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^x} \qquad (\text{für } x \geqq 0 \text{ abs. konvergent})$$

darstellbar sind, so lautet die Entwicklung, nachdem man in Satz 3 $\lambda_\nu = \lg \nu$ $(\nu = 2, 3, 4, \ldots)$ gesetzt hat:

$$f(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\lg \nu}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\lg \nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu^x}.$$

Ebenso einfach läßt sich der Satz 2 auf das erweiterte Momentenproblem übertragen. Bezeichnet nach wie vor ϑ die Sprungstelle und $a(\vartheta)$ die evtl. negative Sprunggröße der *schwankungsbeschränkten* Belegungsfunktion $\chi(u)$, so erhalten wir den

Satz 4. *Ist $\mu(x)$ das Moment einer in $0 \leqq u \leqq 1$ schwankungsbeschränkten Belegungsfunktion $\chi(u)$,*

$$\mu(x) = \int_0^1 u^x \, d\chi(u), \tag{4}$$

so gilt

$$a(\vartheta) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\lg \vartheta}\right)^n \mu^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg \vartheta}\right) \qquad \text{für } 0 < \vartheta < 1.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zwei in $[0, 1]$ *monoton wachsende* Funktionen $V(u)$ und $W(u)$ derart, daß

$$\chi(u) = V(u) - W(u) \tag{5}$$

ist. Daher gilt auch mit

$$v(x) = \int_0^1 u^x \, dV(u) \quad \text{und} \quad w(x) = \int_0^1 u^x \, dW(u) \tag{6}$$

die Beziehung

$$\mu(x) = v(x) - w(x), \tag{7}$$

wo $v(x)$ und $w(x)$ beide *total monoton* sind als Momentenintegrale mit monoton wachsenden Belegungsfunktionen [3]). Also kann man setzen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\lg\vartheta}\right)^n \mu^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg\vartheta}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\lg\vartheta}\right)^n v^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg\vartheta}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\lg\vartheta}\right)^n w^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg\vartheta}\right),$$

denn nach Satz 2 ergeben die beiden rechts stehenden Grenzwerte die Sprünge der durch (6) zu $v(x)$ und $w(x)$ zugeordneten Funktionen $V(u)$ und $W(u)$. Wegen (5) ergibt also die linke Seite der letzten Gleichung die Sprünge von $\chi(u)$, womit der Satz bewiesen ist.

§ 2.

Bevor wir die Bedingungen für die Entwickelbarkeit aussprechen, benötigen wir noch einige Bemerkungen. An den vorigen Paragraph anknüpfend heben wir hervor, daß eine Funktion $\mu(x)$ dann und nur dann durch das Stieltjes'sche Integral

$$\int_0^1 u^x\, d\,\chi(u) \tag{4}$$

mit einer in $[0, 1]$ *schwankungsbeschränkten* Belegungsfunktion $\chi(u)$ darstellbar ist, wenn $\mu(x)$ die *Differenz* zweier total monotoner Funktionen ist [4]). Nach Vorgabe einer solchen Funktion $\mu(x)$ ist $\chi(u)$ eindeutig bestimmt, wenn man die Bedingungen $\chi(0) = 0$ und $\chi(u) = \chi(u+0)$ hinzunimmt. Umgekehrt ist auch mit einer solchen Belegungsfunktion eine Momentenfunktion festgelegt, die Differenz zweier total monotoner Funktionen ist [4]).

Wir wollen jetzt die beim Beweis des Satzes 4 benutzte Darstellung

$$\mu(x) = v(x) - w(x) \tag{7}$$

dadurch *eindeutig* festlegen, daß wir verlangen, daß $v(x)$ und $w(x)$ die „kleinsten" unter den total monotonen Funktionen sein sollen, die die Darstellung (7) zulassen. Dabei sind als „kleinste" Funktionen $v(x)$ und $w(x)$ dasjenige Paar zu verstehen, das aus

$$v(x) = \int_0^1 u^x\, d\,V(u) \quad \text{und} \quad w(x) = \int_0^1 u^x\, d\,W(u) \tag{6}$$

[3]) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Zeitschr. **9** (1921) S. 74—109 und 280—299.

[4]) Vgl. Anm. 3, insbes. S. 80, 84, 102.

mit denjenigen Funktionen $V(u)$ und $W(u)$ entsteht, die sich aus der Darstellung der schwankungsbeschränkten Funktion $\chi(u)$,

$$\chi(u) = V(u) - W(u), \tag{5}$$

als die beiden *kleinsten* monoton wachsenden Funktionen in bekannter Weise ergeben: $V(u)$ bzw. $W(u)$ ist die *positive* bzw. die *negative* Variation von $\chi(u)$ in $[0, u]$[5]).

Das S. 330 erwähnte HAUSDORFF'sche Ergebnis fassen wir nun in die für uns geeignete Form zusammen zu[6])

Satz 5. *Eine für $x \geqq 0$ definierte und daselbst stetige Funktion $\mu(x)$ ist dann und nur dann die Differenz zweier totalmonotoner Funktionen, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} |\Delta^{n-\nu}\mu(\nu)| = T$$

(eigentlich) vorhanden ist. Sein Wert ist dann die totale Variation der mit (4) zu $\mu(x)$ gehörigen Belegungsfunktion $\chi(u)$ im Intervall $[0, 1]$.

Dabei bezeichnet

$$\Delta^{n-\nu}\mu(\nu) = \sum_{k=0}^{n-\nu} (-1)^k \binom{n-\nu}{k} \mu(\nu+k)$$

die $(n-\nu)$-te Differenz der durch $\mu(x)$ definierten Folge $\mu(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

Berücksichtigt man nun die oben erwähnte Eindeutigkeit der Darstellung (5), so ist offenbar

$$T = V(1) + W(1), \tag{8}$$

da ja $V(u)$ und $W(u)$ beide in $[0, 1]$ monoton wachsen. Mit (6) ist dann auch

$$T = v(0) + w(0).$$

§ 3.

Mit diesen Hilfsmitteln sind wir nun in der Lage, das notwendige und hinreichende Kriterium für die Entwickelbarkeit zu beweisen.

Satz 6. *Eine für $x \geqq 0$ definierte, daselbst stetige und für $x > 0$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann in eine für $x \geqq 0$ absolut konvergente (oder abbrechende) DIRICHLET-sche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ mit zunächst noch unbekannten reellen a_ν und $\lambda_\nu > 0$ entwickelbar, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} |\Delta^{n-\nu} f(\nu)| = \sum_{0<\Lambda<\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{\Lambda}\right)^n \left| f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right)\right|$$

---

[5]) Vgl. O. HAUPT und G. AUMANN, Differential- und Integralrechnung, Bd. I, 2. Aufl., Berlin 1938, S. 102.

[6]) S. 80—81, 84, 100–103 der in Anm. 3 zitierten Arbeit und auch F. HAUSDORFF, Momentprobleme für ein endliches Intervall, Math. Zeitschr. **16** (1923) S. 220—248.

ist[7]) *und der auf der linken Seite stehende Grenzwert endlich ist. Dabei ist*

$$a_\nu = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{e}{\lambda_\nu}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda_\nu}\right),$$

wo

$$\lambda_\nu = A$$

für diejenigen $0 < A < \infty$, *für die dieser Ausdruck von* 0 *verschieden ist.* (Daß es nur eine höchstens abzählbare Menge solcher A gibt, ist dabei eine Folge der Existenz der linken Seite.)

Beweis. Um die Notwendigkeit der Bedingung in der Behauptung zu zeigen, bezeichnen wir die durch die vorgelegte, für $x \geqq 0$ absolut konvergente Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \qquad (a_\nu \text{ reell}, \lambda_\nu > 0,\ x \geqq 0) \tag{1}$$

definierte Funktion mit $f(x)$. Gemäß S. 331 ist mit

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad \text{und} \quad \psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \tag{2}$$

$$\text{wo } \alpha_\nu = \tfrac{1}{2}(|a_\nu| + a_\nu) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \beta_\nu = \tfrac{1}{2}(|a_\nu| - a_\nu) \geqq 0,$$

$f(x)$ die Differenz dieser beiden total monotonen Funktionen

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \tag{3}$$

so daß mit Satz 5 die Existenz des auf der linken Seite der Behauptung stehenden Grenzwertes folgt. Dieser ist fernerhin gleich der totalen Variation in $[0, 1]$ einer schwankungsbeschränkten Funktion $\Theta(u)$, mit der

$$f(x) = \int_0^1 u^x \, d\,\Theta(u) \tag{9}$$

gilt. Es sei hier bemerkt, daß für unseren Fall nur solche Belegungsfunktionen in Betracht kommen, die in $u = 0$ und $u = 1$ stetig sind. Dies ergibt sich aus der Stetigkeit von $f(x)$ in $x = 0$ und wegen $\lambda_\nu \neq 0$[8]).

Weiter gibt es zu $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$, so daß mit (3) und (9) die Beziehungen

$$\varphi(x) = \int_0^1 u^x \, d\,\Phi(u) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_0^1 u^x \, d\,\Psi(u) \tag{10}$$

bestehen, wobei

$$\Theta(u) = \Phi(u) - \Psi(u) \tag{11}$$

---

[7]) Betreffs der Bedeutung des Symbols auf der rechten Seite vgl. die Bemerkungen zu Satz 1 und S. 332.

[8]) S. 103 der Anm. 3 und S. 280 der Note I.

ist. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß die rechte Seite in der Behauptung gleich der soeben erhaltenen totalen Variation ist, die wir mit T bezeichnen wollen. Zunächst können wir aus (8) S. 334 schließen

$$T \leqq \Phi(1) + \Psi(1), \tag{12}$$

da ja die durch (2) und (10) festgelegten $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ nicht kleiner sein können als das in § 2 erwähnte ausgezeichnete Paar.

Da nun $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei DIRICHLET'sche Reihen mit positiven Koeffizienten sind, können wir nach den Ausführungen der Note I [9]) die beiden Belegungsfunktionen $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ angeben und erhalten

$$\Phi(u) = \sum_{0<\vartheta\leq u} \alpha(\vartheta) \quad \text{und} \quad \Psi(u) = \sum_{0<\vartheta\leq u} \beta(\vartheta),$$

mit den Sprüngen

$$\alpha(\vartheta) = \alpha_\nu \quad \text{und} \quad \beta(\vartheta) = \beta_\nu \qquad \text{in } 0 < \vartheta < 1,$$

wobei diese sich im Endlichen beliebig häufen dürfen. Mit (11) können wir nun auch sofort $\Theta(u)$ hinschreiben:

$$\Theta(u) = \sum_{0<\vartheta\leq u} [\alpha(\vartheta) - \beta(\vartheta)] = \sum_{0<\vartheta\leq u} a(\vartheta),$$

mit den Sprunggrößen $a(\vartheta) = a_\nu$. Nun ist ersichtlich die totale Variation von $\Theta(u)$ mindestens ebenso groß wie die Summe der Beträge der Sprünge, d. h. mit $|a(\vartheta)| = \alpha(\vartheta) + \beta(\vartheta)$ ist

$$T \geqq \sum_{0<\vartheta<1} [\alpha(\vartheta) + \beta(\vartheta)].$$

Dies ergibt mit (2) und (10)

$$T \geqq \Phi(1) + \Psi(1), \tag{13}$$

woraus mit (12) folgt

$$T = \Phi(1) + \Psi(1), \tag{14}$$

wofür wir wieder schreiben können

$$T = \sum_{0<\vartheta<1} |a(\vartheta)|. \tag{15}$$

Die Funktionen $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ und $\Phi(u)$ bzw. $\Psi(u)$ besitzen also die in § 2 beschriebenen Minimaleigenschaften. Wenden wir nun auf $f(x)$ den Satz 4 an, so ergibt sich, nachdem wir den dortigen Ausdruck für die $a(\vartheta)$ in (15) einsetzen, mit $\vartheta = e^{-\lambda}$ die rechts in der Behauptung stehende Summe, deren Konvergenz und zugleich deren Übereinstimmung mit der linken Seite aus (15) folgt. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung gezeigt.

Daß sie auch hinreicht, ergibt sich so: Erfüllt eine Funktion $f(x)$ die Forderung der Behauptung, so ist sie zunächst wegen der Existenz des links stehenden Limes nach Satz 5 wiederum die Differenz zweier

[9]) Daselbst S. 282/283.

total monotoner Funktionen, die wieder mit $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnet seien. Es gibt also nach § 2 eine schwankungsbeschränkte Funktion $\Theta(u)$, so daß (9) gilt und ferner zwei monotone Funktionen $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$, so daß die Beziehungen (3), (10) und (11) bestehen. *Wählen* wir nun $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ im Sinne des § 2 als die kleinsten, dann gilt auch (14).

Sind jetzt $a(\vartheta)$ bzw. $\alpha(\vartheta)$ bzw $\beta(\vartheta)$ die Sprünge der Funktionen $\Theta(u)$ bzw. $\Phi(u)$ bzw. $\Psi(u)$ an den Stellen ϑ $(0 < \vartheta < 1)$, dann ist sicher

$$\Phi(1) \geqq \sum_{0<\vartheta<1} \alpha(\vartheta) \quad \text{und} \quad \Psi(1) \geqq \sum_{0<\vartheta<1} \beta(\vartheta), \tag{16}$$

denn $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ sind beide monoton wachsend und beschränkt, so daß deren totale Variationen in $[0, 1]$ (hier also einfach die Ordinaten bei $u = 1$) mindestens gleich der Summe der Sprünge sind. Andererseits ist auf Grund der Festsetzung S. 334 der Funktionen $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ als positive und negative Variationen von $\Theta(u)$ in $[0, u]$

$$\sum_{0<\vartheta<1} |a(\vartheta)| = \sum_{0<\vartheta<1} [\alpha(\vartheta) + \beta(\vartheta)]. \tag{17}$$

Ferner können wir auf die Funktion $f(x)$ den Satz 4 anwenden, und nachdem wir dort $\lg \vartheta = -A$ gesetzt haben, folgt, daß der rechts in der Behauptung stehende Ausdruck gleich der Summe der Beträge der Sprünge von $\Theta(u)$ ist. Mithin haben wir also aus Satz 5

$$\sum_{0<\vartheta<1} |a(\vartheta)| = T. \tag{15}$$

Die Konvergenz dieser Reihe (wie auch der beiden in (16) stehenden Reihen) ist dadurch sichergestellt, daß ja die Belegungsfunktion von beschränkter Schwankung ist und somit die Summe über die Sprünge absolut konvergiert.

Weiter folgt damit aus (17) und aus (14)

$$\sum_{0<\vartheta<1} [\alpha(\vartheta) + \beta(\vartheta)] = \Phi(1) + \Psi(1). \tag{18}$$

Es müssen jetzt aber in *jeder* der beiden Beziehungen von (16) die *Gleichheitszeichen* gelten, denn sonst wäre

$$\Phi(1) + \Psi(1) > \sum_{0<\vartheta<1} [\alpha(\vartheta) + \beta(\vartheta)],$$

was aber im Widerspruch zu (18) stehen würde. Da dann aber mit (10)

$$\varphi(0) = \sum_{0<\vartheta<1} \alpha(\vartheta) \quad \text{und} \quad \psi(0) = \sum_{0<\vartheta<1} \beta(\vartheta)$$

ist, so erfüllen die beiden total monotonen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bei Berücksichtigung von Satz 2 (wo $\vartheta = e^{-A}$ zu setzen ist), sämtliche Bedingungen des Satzes 1. Also sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Dirichletsche Reihen mit positiven Koeffizienten, die für $x \geqq 0$ konvergieren und damit ist $f(x)$ als deren Differenz eine für $x \geqq 0$ absolut konvergente Dirichlet'sche Reihe. Damit ist Satz 6 bewiesen.

§ 4.

Wir wollen noch hervorheben, daß der Satz 6 in den Satz 1 übergeht, wenn die vorgelegte Funktion total monoton ist. Dazu bemerken wir zunächst, daß die Bedingung S. 331 der totalen Monotonie, nämlich

$$(19) \qquad (-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0 \qquad \text{für alle } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } x > 0$$

völlig gleichwertig ist mit der Bedingung

$$(20) \qquad \Delta^n f_\nu \geqq 0 \qquad \text{für alle } n, \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

wo die Folge $f_\nu = f(\nu)$ ist.

Insbesondere ist einer Folge f_ν, die der Bedingung (20) genügt, *eindeutig* eine Funktion $f(x)$ durch $f(\nu) = f_\nu$ zugeordnet, die (19) erfüllt [9]).

Mit (20) geht nun die linke Seite der Behauptung von Satz 6 über in

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \Delta^{n-\nu} f(\nu) = f(0),$$

wie in der in Anm. 3 zitierten Arbeit von Hausdorff gezeigt wird [10]). Mit (19) haben wir sodann sämtliche Forderungen des Satzes 1.

Zum Abschluß erwähnen wir noch, daß man den Ausdruck auf der rechten Seite in Satz 6 durch einen solchen ersetzen kann, wo statt der Ableitungen Differenzen auftreten. Dann lautet die Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} |\Delta^{n-\nu} f(\nu)| = \sum_{0<\Lambda<\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\Delta^n f\left(\frac{\nu}{e^\Lambda - 1}\right)\right|}{\left(e^{-\frac{\Lambda}{e^\Lambda - 1}} - e^{\frac{\Lambda}{e^{-\Lambda}-1}}\right)^n}.$$

Um dies zu beweisen, hat man jetzt nur zu zeigen, daß in Satz 1 der in 4) stehende Ausdruck durch den obigen (ohne Absolutstriche) ersetzt werden kann. Dies verläuft dann ganz analog dem Beweise des Hauptsatzes in Note I und sei daher dem Leser überlassen.

---

[9]) S. 102 der Anm. 3.

[10]) Daselbst S. 79.

(Eingegangen am 26. April 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 4, S. 339—342 (1951).

Über eine Tschebyscheffsche Eigenschaft der Faberschen Polynome.

Von

P. Heuser in Darmstadt.

Es sei $\mathfrak{U}_x$ eine einfach zusammenhängende Umgebung des Punktes $x = \infty$ in der x-Ebene mit mindestens zwei Randpunkten, und

$$x = \psi(t) = t + a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \cdots \tag{1}$$

diejenige Funktion, die das Kreisäußere $|t| > r_0$ konform auf $\mathfrak{U}_x$ abbildet. Wegen der in (1) vorgenommenen Normierung sind die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \cdots$ sowie r_0 eindeutig bestimmt.

Es kann durch eine Parallelverschiebung $x - a_0 = x'$ immer erreicht und daher, wenn zweckmäßig, von vornherein angenommen werden, daß in (1) der Koeffizient $a_0 = 0$ ist. Von dieser Annahme kann man sich jederzeit wieder frei machen, indem man x durch $x - a_0$ ersetzt. Für $r_0 < r < \infty$ bezeichnen wir das durch (1) in der x-Ebene hergestellte Bild des Kreises $|t| = r$ mit C_r.

Ist nun (bei $a_0 = 0$)

$$t = \varphi(x) = x + \frac{1}{x}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2}$$

die Umkehrfunktion von (1), und bildet man allgemein

$$t^n = \varphi^n(x) = p_n(x) + \frac{1}{x}\,\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

so heißt $p_n(x)$ (bzw. $p_n(x - a_0)$, falls $a_0 \neq 0$) das zu $\mathfrak{U}_x$ (oder auch zu C_r, $r_0 < r < \infty$) gehörige Fabersche Polynom n-ter Ordnung[1]; es kann auch dadurch charakterisiert werden, daß es als einziges Polynom eine Darstellung von der Form

$$p_n(x) = t^n + \frac{1}{t}\,\mathfrak{Q}_n\left(\frac{1}{t}\right) \tag{4}$$

besitzt.

Zu jeder Kurve C_r gehört ferner ein Tschebyscheffsches Polynom $t_n(r; x)$[2], das durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

---

[1]) G. Faber, Über polynomische Entwicklungen, Math. Ann. 57 (1903), S. 389—408.

[2]) G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome, Journal f. die reine und angew. Mathematik 150 (1920), S. 79—106.

a) $t_n(r; x)$ ist in x vom Grade n,

b) der Koeffizient von x^n ist 1,

c) alle von $t_n(r; x)$ verschiedenen Polynome, welche auch die Eigenschaften a) und b) haben, besitzen auf C_r ein Maximum des absoluten Betrages, das größer ist als das Maximum von $|t_n(r; x)|$ auf C_r.

In vielen Fällen sind die Faberschen Polynome mit den Tschebyscheffschen identisch[3]). Daß diese Identität jedoch nicht in allen Fällen statt hat, zeigen einfache Beispiele. Im allgemeinen ist schon $p_1(x)$ verschieden von $t_1(r; x)$. In der Tat ist $p_1(x) \equiv x - a_0$, wo die Bedeutung von a_0 aus dem bei (1) Gesagten hervorgeht, während das absolute Glied in $t_1(r; x) \equiv x - c(r)$ nach der Definition der Tschebyscheffschen Polynome den Mittelpunkt des „Pferchkreises" angibt, d. h. der kleinsten Kreisscheibe, die C_r bedeckt. Außer in Fällen der Symmetrie sind a_0 und $c(r)$ voneinander verschieden[4]). Erst recht ist im allgemeinen $p_n(x) \not\equiv t_n(r; x)$ für Werte des Index n, die größer als 1 sind[5]). In diesem Falle ist für irgend zwei Zahlen $r_1, r_2 > r_0$ auch $t_n(r_1; x) \not\equiv t_n(r_2; x)$. Es ist daher sinnvoll, wenn wir im folgenden nur den Fall $p_n(x) \not\equiv t_n(r; x)$ betrachten.

Zwischen den $p_n(x)$ und den $t_n(r; x)$ bestehen Grenzbeziehungen, die im wesentlichen schon Herr Faber untersucht hat[6]). Man kann nun fragen, ob auf Grund dieses nahen Zusammenhangs auch den Faberschen Polynomen eine Tschebyscheffsche Eigenschaft zukommt. Antwort hierauf gibt der folgende Satz.

---

[3]) Vgl. G. Faber a. in Anm. [2]) a. O., Einleitung S. 81.

[4]) So ist im Falle der Lemniskate $|x-1|^2 \cdot |x+1| = \frac{32}{27}$,

$$t = \sqrt[3]{(x-1)^2\,(x+1)} = x - \frac{1}{3} + \frac{1}{x}\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \text{ also } p_1(x) \equiv x - \frac{1}{3}.$$

Man überzeugt sich in diesem Falle leicht, daß die Symmetrieachse der Kurve ein Durchmesser ihres Pferchkreises ist, woraus sich ihr Tschebyscheffsches Polynom 1. Ordn. ergibt. So findet man

$$t_1(x) \equiv x - \left\{1 - \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}\right)\right\} \approx x - 0{,}22.$$

[5]) Im Fall der Lemniskate $|x^2 - 1| = 1$ ergibt sich durch elementares Ausrechnen: $p_3(x) \equiv x^3 - \frac{3}{2}x$; $t_3(1; x) \equiv x^3 - \frac{6}{5}x$. Auf der Kurve ist

$$\max |p_3(x)| = \frac{9}{4}\sqrt{6};$$

$\max |t_3(1; x)|$ hat den (kleineren) Wert $\frac{48}{125}\sqrt{15}$.

[6]) Vgl. hierzu die in Anm. [2]) genannte Fabersche Arbeit, § 5, S. 88 und eine Note des Verf. in ds. Zeitschr. **51** (1949), S. 574—585.

Satz 1. *Ist*

$$q_n(x) \equiv x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

ein mit x^n beginnendes, sonst aber beliebiges Polynom n-ten Grades in x, so gibt es eine Zahl $r(q_n) \geqq r_0$, so daß für alle $r > r(q_n)$

$$\max_{x \in C_r} |p_n(x)| < \max_{x \in C_r} |q_n(x)| \tag{5}$$

ist.

Zum Beweise entwickeln wir $q_n(x)$ nach den $p_n(x)$:

$$q_n(x) = p_n(x) + c_1 p_{n-1}(x) + \cdots + c_n. \tag{6}$$

Da nach Voraussetzung mindestens einer der Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots c_n$ von Null verschieden ist, so sei etwa c_ν die erste in dieser Reihe wirklich auftretende Zahl. Nach (4) wird dann

$$q_n(x) = q_n(\psi(t)) = t^n + c_\nu t^{n-\nu} + t^{n-\nu-1} \cdot g\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} \mathfrak{Q}\left(\frac{1}{t}\right), \tag{7}$$

wo $g\left(\frac{1}{t}\right)$ eine ganze rationale Funktion in $\frac{1}{t}$ von höchstens $(n-\nu-1)$-tem Grad ist, während $\mathfrak{Q}\left(\frac{1}{t}\right)$ eine für $|t| > r_0$ reguläre Potenzreihe ist. Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned} k_1(r) &= k_1(r, c_\nu, c_{\nu+1}, \ldots c_n) = \max_{|t|=r} \left| g\left(\frac{1}{t}\right)\right|, \\ k_2(r) &= k_2(r, c_\nu, c_{\nu+1}, \ldots c_n) = \max_{|t|=r} \left| \frac{1}{t} \mathfrak{Q}\left(\frac{1}{t}\right)\right|, \end{aligned}\right\} \text{ für } r > r_0. \tag{8}$$

Wenn r unbegrenzt wächst, nimmt die Schranke $k_1(r)$ monoton zum Grenzwert $|g(0)|$ ab, während $k_2(r)$ monoton gegen Null geht.

Ist in (7) $\arg c_\nu = \gamma$, so ist für $t = t_0 = r \cdot e^{i\frac{\gamma}{\nu}}$

$$\arg t_0^n = \arg (c_\nu \cdot t_0^{n-\nu}) = \frac{n \cdot \gamma}{\nu}. \tag{9}$$

Aus (7), (8) und (9) ergibt sich dann

$$|q_n(\psi(t_0))| \geqq r^n + |c_1| r^{n-\nu} - k_1(r) r^{n-\nu-1} - k_1(r), \tag{10}$$

und a fortiori

$$\max_{x \in C_r} |q_n(x)| = \max_{|t|=r} |q_n(\psi(t))| \geqq r^n + |c_\nu| r^{n-\nu} - \{k_1(r) r^{n-\nu-1} + k_2(r)\}. \tag{11}$$

Lassen wir r wachsen, so wird das Glied $|c_\nu| r^{n-\nu}$ auf der rechten Seite schließlich um eine beliebig große, feste, positive Zahl größer sein, als der in der geschweiften Klammer stehende, abzuziehende Ausdruck. Wir schließen daraus, daß es eine Zahl $r = R_1$ gibt, so daß für $r \geqq R_1$

$$\max_{x \in C_r} |q_n(x)| > r^n + 1 \tag{12}$$

ist.

Anderseits ist nach (4) auf den Kreisen $|t| = r > r_0$ oder den Kurven C_r

$$\max_{x \in C_r} |p_n(x)| \leqq r^n + k_3(r), \tag{13}$$

wo $k_3(r)$ eine positive Zahl ist, die mit wachsendem r monoton gegen Null geht. Wählt man also R_2 so groß, daß für $r \geqq R_2$ auf C_r

$$\max_{x \in C_r} |p_n(x)| < r^n + 1 \tag{14}$$

wird, und bezeichnet man noch mit $R = R(q_n)$ die größere der beiden Zahlen R_1, R_2, so ist für alle $r \geqq R$ die Beziehung (5) erfüllt, und somit unser Satz bewiesen.

Wir betrachten nun die Gesamtheit der Zahlen r, für die (5) gilt. Die Funktionen $\max_{x \in C_r} |q_n(x)|$ und $\max_{x \in C_r} |p_n(x)|$ hängen stetig von r ab, was folglich auch für ihre Differenz gilt. Daraus ergibt sich:

Satz 2: *Es gibt entweder ein* $r = r^*(q_n) \geqq r_0$, *so daß für* $r^*(q_n)$

$$\max_{x \in C_{r^*}} |p_n(x)| = \max_{x \in C_{r^*}} |q_n(x)| \tag{15}$$

ist, und für alle $r > r^*$ *die Beziehung* (5) *gilt, dann ist* r^* *die kleinste Zahl, für die der Satz erfüllt ist, oder* (5) *gilt bereits für alle* $r \geqq r_0$.

Unser Satz beschreibt eine charakteristische Eigenschaft des Faber-schen Polynoms. Offenbar kann kein anderes, von $p_n(x)$ verschiedenes Polynom der Form (6) dieser Eigenschaft teilhaftig sein. Die durch unsere Abschätzung gelieferte Zahl $R(q_n)$ wird umso größer sein, je kleiner $|c_\nu|$ und je größer $|c_{\nu+1}| \ldots |c_n|$ ist. Aus dem Umstand, daß bei festem $\mathfrak{U}_x$ die Abschätzungen (11) bis (14) außer von r nur von $|c_\nu|, \ldots |c_n|$ abhängen, schließt man noch:

Satz 3: *Charakterisiert man eine Umgebung* $\mathfrak{U}_c$ *des Polynoms* $p_n(x)$ *dadurch, daß man zu ihr diejenigen Polynome* (6) *rechnet, für die*

$$|c_\lambda| < c, \qquad \lambda = \nu, \nu+1, \ldots n, \tag{16}$$

ist, so kann man für alle Polynome $q_n(x)$, *die zu* $\mathfrak{U}_c$ *gehören und für die* $|c_\nu| \geqq \varepsilon < c$ *ist, die Größe* R *gemeinsam wählen.*

Unser Satz gilt speziell auch für jedes einzelne der Polynome $t_n(r; x)$. Natürlich ist in diesem Falle jede Zahl r^*, von der ab (5) gilt, größer als der Index r der Kurve C_r, zu der $t_n(r; x)$ gehört.

(Eingegangen am 12. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 4, S. 343—346 (1951).

Zur Bewegungsinvarianz des Lebesgueschen Maßes.

Von

Wolfgang Jurkat in Tübingen.

Bei der Theorie des Lebesgueschen Maßes — oder auch des Riemannschen Inhalts — tritt folgende eigentümliche Schwierigkeit auf: Hat man das äußere Maß durch Überdeckungen mit achsenparallelen Würfeln definiert, so fragt es sich, ob dieses Maß gegenüber Bewegungen des n-dimensionalen euklidischen Raumes R_n invariant ist. Man kann leicht zeigen, daß ein achsenparalleler Würfel mit der Kantenlänge a das Maß a^n besitzt. Eine äquivalente Formulierung der Frage ist dann, ob der Würfel auch in schiefer Lage das Maß a^n hat.

Einen völlig elementaren, wenn auch nicht ganz einfachen Beweis dieser Invarianz gab E. Schmidt[1]). Vor kurzem hat nun R. Schmidt einen anderen Beweis gefunden[2]), der wohl einfacher ist, dafür aber einen großen Teil der Maßtheorie als bekannt voraussetzt. Der Grundgedanke seines Beweises besteht darin, daß man jedes orthogonale Bild einer Kugel bereits durch eine Translation gewinnen kann. Auf dieser Eigenschaft der Kugel beruht auch der folgende Beweisgedanke: Man zeigt, daß man das äußere Maß statt durch Würfelüberdeckungen ebensogut durch Kugelüberdeckungen erklären kann, wobei an die Stelle des elementargeometrischen Inhalts der Würfel das Maß der Kugeln im Sinne der als bekannt geltenden Maßtheorie tritt. Dadurch ist dann das äußere Maß invariant definiert, und das Ziel ist ebenfalls erreicht[3]). Weitere Beweise finden sich in den bekannten Lehrbüchern über reelle Funktionen.

---

[1]) E. Schmidt [3].

[2]) R. Schmidt [4], vgl. auch Schlesinger-Plessner [2].

[3]) Die Anregung, die Invarianz auf diese Art zu beweisen, erhielt ich von Prof. Kamke. Der Beweis kann hier nur angedeutet werden: Es genügt, daß man jede beschränkte, offene Menge O — z. B. einen Würfel — mit Kugeln überdecken kann, so daß die Summe der Kugelmaße das Maß von O um beliebig wenig übertrifft. Hierzu stellt man O als Vereinigung von achsenparallelen, abgeschlossenen Würfeln ohne gemeinsame innere Punkte dar und ersetzt diese durch ihre einbeschriebenen, abgeschlossenen Kugeln. Man kann aus O endlich viele solcher Kugeln entfernen, so daß die übrigbleibende offene Menge O_1 dem Maße nach höchstens einen festen Bruchteil von O ausmacht. Anwendung des gleichen Verfahrens auf O_1 und Iteration dieses Prozesses führt nach abzählbar vielen Schritten auf eine Nullmenge. Die gewünschte Überdeckung entsteht, wenn man zu den bisher ausgewählten Kugeln noch eine Kugelüberdeckung der Nullmenge (mit kleiner Summe der Kugelmaße) hinzunimmt.

Es liegt nun sehr nahe, das äußere Maß von vornherein invariant zu definieren, indem man zur Überdeckung beliebige und nicht nur achsenparallele Würfel zuläßt. In dieser Weise hatte schon E. Schmidt in der oben zitierten Arbeit den Riemannschen Inhalt definiert. Zur Herleitung der Ungleichung zwischen dem oberen und unteren Inhalt brauchte er allerdings einen elementargeometrischen Hilfssatz, der als Kern seines Invarianzbeweises anzusprechen ist. Man kann jedoch beim Aufbau der Maßtheorie auf den inneren Inhalt verzichten. Dann tritt natürlich die genannte Schwierigkeit an einer anderen Stelle wieder auf, nämlich bei der Berechnung des Maßes eines achsenparallelen Würfels. Der Zweck dieser Arbeit ist, diese Berechnung in elementarer und zugleich anschaulicher Weise durchzuführen, und zwar werden hierbei nur die einfachsten Eigenschaften des äußeren Maßes benutzt.

Es ist zweckmäßig, die für die Maßtheorie grundlegenden Eigenschaften des äußeren Maßes im folgenden neu zu entwickeln, da dadurch die bei unserem Invarianzbeweise benutzten Schlüsse klarer hervortreten und darüber hinaus erst so wirklich der Eindruck vermittelt werden kann, daß diese Einführung des äußeren Maßes der früheren an Einfachheit nicht nachsteht. Leichte Beweise können hier natürlich nur kurz angedeutet werden oder sind, soweit selbstverständlich, auch weggelassen.

0. Bezeichnungen. Mit W wollen wir einen Würfel der Kantenlänge a bezeichnen (gleichgültig ob der Rand ganz oder nur teilweise dazugehört). Der elementargeometrische Inhalt von W ist durch $|W| = a^n$ erklärt, allgemeiner wird der elementargeometrische Inhalt eines Rechtflachs als Produkt seiner Kantenlängen definiert. Unter der Überdeckung $\mathfrak{U}(M)$ einer Menge M ist eine abzählbare Menge von offenen Würfeln W_ν (diese brauchen nicht achsenparallel zu sein!) zu verstehen, deren Vereinigung M enthält. Das Maß der Überdeckung wird durch $m\,\mathfrak{U} = \sum_{\nu=1}^{\infty} |W_\nu|$ erklärt.

1. Das äußere Maß einer Menge M wird definiert durch

$$\overline{m}\,M = \inf_{\mathfrak{U}} m\,\mathfrak{U}(M), \tag{1}$$

wobei zur Konkurrenz alle Überdeckungen von M zugelassen sind. Ist M abgeschlossen und beschränkt, so genügt es nach dem Borelschen Überdeckungssatz, nur die Überdeckungen mit endlich vielen Würfeln zuzulassen.

2. Es gilt stets $0 \leqq \overline{m}\,M \leqq \infty$, und es gibt Mengen mit positivem, endlichem äußeren Maß.

Zum *Beweise* der zweiten Behauptung betrachten wir den Einheitswürfel E, der durch die Ungleichungen $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gegeben ist, und eine endliche Überdeckung $\mathfrak{U}(E)$. Ersetzen wir jeden

Würfel W_ν von $\mathfrak{U}(E)$ durch den achsenparallelen Würfel W_ν' mit gleichem Mittelpunkt und einer um den Faktor $\sqrt[n]{n}$ vergrößerten Kantenlänge, so bilden auch die W_ν' eine Überdeckung $\mathfrak{U}'(E)$ mit dem Maß

$$m\,\mathfrak{U}' = n^{\frac{n}{2}}\, m\,\mathfrak{U}.$$

Verlängern wir die Seiten von E und der endlich vielen W_ν' und vergleichen die elementargeometrischen Inhalte der entstehenden achsenparallelen Rechtflache, so finden wir $m\,\mathfrak{U}'(E) \geqq |E| = 1$. Da wir aber nur endliche Überdeckungen zu betrachten brauchen, folgt $n^{\frac{n}{2}}\,\overline{m}\,E = \operatorname{fin} m\,\mathfrak{U}' \geqq 1$, also $e = \overline{m}\,E > 0$. Andererseits gilt nach (1) offensichtlich $e \leqq 1$.

Wir fassen zusammen:

(2) $$0 < e \leqq 1.$$

3. Das äußere Maß ist unabhängig von einem Koordinatensystem definiert, also gegenüber Bewegungen invariant.

4. Aus $M_1 \leqq M_2$ folgt $\overline{m}\,M_1 \leqq \overline{m}\,M_2$.

5. Für das äußere Maß einer Vereinigung $M = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ gilt

(3) $$\overline{m}\,M \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{m}\,M_\nu,$$

insbesondere ist also

(3′) $$\overline{m}\,(M_1 + M_2) \leqq \overline{m}\,M_1 + \overline{m}\,M_2 \text{ und } \overline{m}\,(M_1 - M_2) \geqq \overline{m}\,M_1 - \overline{m}\,M_2$$

(bei der letzten Ungleichung ist $\overline{m}\,M_2 < \infty$ vorauszusetzen).

6. Eine Menge vom äußeren Maß Null — mit N bezeichnet — heißt Nullmenge. Änderung um Nullmengen ändert das äußere Maß nicht: $\overline{m}\,(M \pm N) = \overline{m}\,M$ nach (3′).

Eine Nullmenge ist z. B. jede $(n-1)$-dimensionale Menge.

7. Zusammenhang des äußeren Maßes mit dem elementargeometrischen Inhalt.

Satz: *Für jeden (abgeschlossenen) Würfel W gilt*

(4) $$\overline{m}\,W = |W|.$$

Beim *Beweise* können wir uns W durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x_\nu \leqq a \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gegeben denken (wegen 3.).

a) Ist E wieder der in 2. betrachtete Einheitswürfel und e sein äußeres Maß, so gilt

$$\overline{m}\,W = e\,a^n = e\,|W|,$$

denn E und W lassen sich durch Dehnungen im Verhältnis $a:1$ und $1:a$ ineinander überführen. Dabei entsteht aus jeder Überdeckung

von E auch eine solche von W und umgekehrt, und die Maße dieser Überdeckungen unterscheiden sich um den Faktor a^n.

b) Nach (2) ist jedenfalls $0 < e \leqq 1$. Wir wollen jetzt noch $e \geqq 1$ zeigen und betrachten dazu eine beliebige Überdeckung $\mathfrak{U}(E)$. Wegen 4. und 5. gilt

$$\overline{m}\, E \leqq \overline{m}\,(\sum W_\nu) \leqq \sum \overline{m}\, W_\nu,$$

und nach Division durch $e > 0$ erhalten wir $1 = |E| \leqq \sum |W_\nu|$. Hieraus folgt durch Bildung der unteren Grenze die Behauptung.

8. Da die Vereinigung $\sum W_\nu$ eine offene Menge darstellt, so gilt neben der Definition (1) auch

$$\overline{m}\, M = \operatorname*{fin}_{O \supseteq M} \overline{m}\, O, \tag{5}$$

wobei alle offenen Mengen $O \supseteq M$ zur Konkurrenz zugelassen sind.

9. Haben M_1 und M_2 einen positiven Abstand, so ist

$$\overline{m}\,(M_1 + M_2) = \overline{m}\, M_1 + \overline{m}\, M_2; \tag{6}$$

insbesondere gilt für zwei punktfremde, abgeschlossene Mengen

$$\overline{m}\,(A_1 + A_2) = \overline{m}\, A_1 + \overline{m}\, A_2.$$

Zum *Beweise* betrachtet man Überdeckungen, bei denen der Durchmesser der vorkommenden Würfel kleiner als der Abstand der beiden Mengen M_1 und M_2 ist. Gegebenenfalls teile man die Würfel!

Wir haben hiermit die grundlegenden Eigenschaften des äußeren Maßes hergeleitet: das äußere Maß ist eine „reguläre Maßfunktion" im Sinne von Carathéodory. Der weitere Aufbau der Maßtheorie kann nun auf einem der üblichen Wege erfolgen[4]).

[4]) Vgl. z. B. Saks [1].

Literatur.

Saks, S.

[1] Théorie de l'intégrale, Warszawa (1933).

Schlesinger, L. und Plessner, A.

[2] Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, Berlin-Leipzig (1926).

Schmidt, E.

[3] Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung, Math. Zeitschr., 12 (1922), 298—316.

Schmidt, R.

[4] Zur Orthogonalinvarianz des Inhalts, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Nr. 7 (1950), 103—106.

(Eingegangen am 11. Juli 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 4, S. 347—353 (1951).

Note on the colouring of graphs.

By

G. A. Dirac in London.

This paper is concerned with some topics connected with the colouring of graphs. The graphs considered here are such that a node is never joined to itself by an edge, and two nodes are never joined by more than one edge. A graph has *chromatic number* k, or is *k-chromatic*, if there exists a smallest positive integer k such that the nodes of the graph can be divided into k mutually disjoint (colour) classes so that no two nodes in the same class are joined by an edge. In this paper the nodes will be denoted by lower case letters a, b etc., possibly with suffixes, and the edges by (a, b) etc., where $a \neq b$ and $(a, b) = (b, a)$. The following notations and definitions will be useful:

If Γ is a graph, $K(\Gamma)$ will denote its chromatic number.

If the nodes a and b are joined by an edge, we write $a \times b$; if they are not joined by an edge, we write $a \cdot b$. If the node a belongs to the graph Γ (in symbols $a \in \Gamma$) the graph obtained from Γ by deleting a and all edges incident in a, leaving all other nodes and edges unchanged, will be denoted by $\Gamma - a$. Similarly if $a, b, \ldots, c \in \Gamma$ the graph obtained from Γ by deleting $a, b, \ldots, c$ and all edges incident with at least one of them will be denoted by $\Gamma - a - b - \cdots - c$.

A colouring of the nodes of Γ using at most k colours (a k-colouring) is a function C defined over the nodes of Γ and taking one of the values $1, 2, \ldots, k$ at each node, with the condition that $C(x) \neq C(y)$ if x and y are joined by an edge.

A *complete h-graph* is a graph with h nodes, every pair being joined by an edge.

If a graph is not connected, its chromatic number is the greatest among the set of chromatic numbers of its connected components, accordingly a graph of chromatic number k must have at least one connected component with the same chromatic number. De Bruijn proved that *an infinite k-chromatic graph always contains a finite k-chromatic subgraph* [1]. The importance of this theorem here lies in the fact that it shows that the chromatic number of an infinite graph is determined by the chromatic numbers of its finite subgraphs.

If a is a node of the graph Γ and $K(\Gamma - a) = K(\Gamma) - 1$, then a will be called a *critical* node of Γ. It is easy to see that *if a is critical, the degree of a is at least* $K(\Gamma) - 1$. (The degree of a is the

number of edges incident with a.) If every node of a graph is critical, the graph will be called a *critical graph*. It follows from the preceding remarks that *a critical graph Γ is finite and connected, and the degree of every node is at least $K(\Gamma)-1$.*

Now suppose that Γ is a k-chromatic graph. If it is not connected it contains a connected k-chromatic subgraph Γ'; if Γ is connected we may suppose $\Gamma = \Gamma'$. If Γ' is infinite, by DE BRUIJN's Theorem it contains a finite k-chromatic subgraph Γ''; if Γ' is finite we may suppose $\Gamma' = \Gamma''$. If Γ'' is not critical, it has a non-critical node a so that $\Gamma'' - a$ is also k-chromatic. If $\Gamma'' - a$ is not critical, it has a non-critical node b, so that $\Gamma'' - a - b$ is also k-chromatic. By successively deleting non-critical nodes in this way, after a finite number of steps we obtain a critical k-chromatic graph. Hence

(1) *A k-chromatic graph always contains a critical k-chromatic subgraph.*

If a is a node of the k-chromatic graph Γ, and if Γ contains a k-chromatic subgraph Γ' of which a is a critical node, then a will be called an *essential* node of Γ; if Γ contains no k-chromatic subgraph of which a is a critical node, then a will be called an *unessential* node of Γ. It is easy to see that *the degree of an essential node of Γ is at least $K(\Gamma)-1$.* If every node of a graph is essential the graph will be called an *essential graph.*

A critical node is also essential, but an essential node need not be critical; a critical graph is also essential, but an essential graph need not be critical. If all the unessential nodes are deleted from a k-chromatic graph Γ, the chromatic number of Γ and all its k-chromatic subgraphs is unchanged, but the number of possible colourings may increase. The nodes whose degree is less than $K(\Gamma)-1$ do not affect the colouring of the remainder.

It follows from (1) that

(2) *If a is an essential node of the k-chromatic graph Γ, then a is a node of a critical k-chromatic subgraph of Γ.*

Suppose a_1 and a_2 are two nodes of a k-chromatic graph Γ which are not joined by an edge. If a_1 and a_2 receive the same colour in every k-colouring of Γ we say that a_1 and a_2 are *bound* to have the same colour in Γ and write $a_1 \mathfrak{S} a_2$ in Γ. If a_1 and a_2 always receive different colours we say a_1 and a_2 are bound to have different colours and write $a_1 \mathfrak{D} a_2$ in Γ. If $a_1 \mathfrak{S} a_2$ in Γ or if $a_1 \mathfrak{D} a_2$ in Γ we say that a_1 and a_2 are bound in Γ and write $a_1 \mathfrak{B} a_2$. For example if Γ consists of the circuit whose nodes in cyclic order are $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2i}$ $(i \geqq 3)$ then $a_j \mathfrak{S} a_{j+2}$ and $a_j \mathfrak{D} a_{j+3}$ for $1 \leqq j \leqq 2i$ (here a_{2i+k} is to mean a_k for $1 \leqq k \leqq 2i$).

The presence of bound nodes restricts the colouring. Critical graphs do not contain bound nodes, any two nodes which are not joined

by an edge can be coloured the same and can be coloured differently. It will be proved first that

(3) *If two nodes are bound, neither of them is critical.*

For suppose that $a_1 \mathfrak{B} a_2$ in Γ and $K(\Gamma) = k$ and suppose that a_1 is a critical node, so that $K(\Gamma - a_1) = k-1$. Let C_1 be any $(k-1)$-colouring of $\Gamma - a_1$ and define C' over the nodes of Γ as follows:

$$C'(a_1) = k, \qquad C'(x) = C_1(x) \text{ if } x \neq a_1.$$

Also define C'' over the nodes of Γ as follows:

$$C''(a_1) = k, \qquad C''(a_2) = k, \qquad C''(y) = C_1(y) \text{ if } y \neq a_1 \text{ and } y \neq a_2.$$

Clearly C' is a permissible k-colouring of Γ, and C'' is then a permissible k-colouring of Γ because $a_1 . a_2$. (As defined above, $a_1 . a_2$ means a_1 and a_2 are not joined by an edge. By definition bound nodes are not joined by an edge.) But in C' a_1 and a_2 receive different colours and in C'' they receive the same colour, and this contradicts the hypothesis that they are bound. Thus a_1 is not a critical node, and in the same way a_2 is not critical. This proves (3).

For nodes which are bound to have different colours a stronger result holds:

(4) *If $a_1 \mathfrak{D} a_2$ in Γ then $K(\Gamma - a_1 - a_2) = K(\Gamma)$.*

Let $K(\Gamma) = k$, and suppose on the contrary that $K(\Gamma - a_1 - a_2) = k-1$. Then let C be any $(k-1)$-colouring of $\Gamma - a_1 - a_2$ and define C' over the nodes of Γ as follows:

$$C'(a_1) = C'(a_2) = k, \qquad C'(x) = C(x) \text{ if } x \neq a_1, \text{ and } x \neq a_2.$$

Now C' is obviously a permissible k-colouring of Γ because $a_1 . a_2$, and this contradicts the assumption that $a_1 \mathfrak{D} a_2$ in Γ. This proves (4).

(5) *If a node is joined to neither of two bound nodes, then it is not critical.*

Suppose that $K(\Gamma) = k$, $a_1 \mathfrak{B} a_2$ in Γ and $b \in \Gamma$, $a_1 . b$ and $a_2 . b$, and suppose on the contrary that $K(\Gamma - b) = k-1$. Then let C be any $(k-1)$-colouring of $\Gamma - b$ and define C' and C'' over the nodes of Γ as follows:

$$C'(b) = k, \qquad C'(a_1) = k, \qquad C'(x) = C(x) \text{ if } x \neq b \text{ and } x \neq a_1.$$

$$C''(b) = k, \quad C''(a_1) = k, \quad C''(a_2) = k, \quad C''(y) = C(y) \text{ if } y \neq b, a_1, a_2.$$

Clearly C' and C'' are both permissible k-colourings of Γ because $a_1 . a_2$ and $b . a_1$ and $b . a_2$, but a_1 and a_2 are coloured differently in C' and with the same colour in C'', and this contradicts the hypothesis that $a_1 \mathfrak{B} a_2$. This proves (5).

If the two nodes are bound to have the same colour a stronger result holds:

(6) *If $a_1 \mathfrak{S} a_2$ in Γ, only nodes joined to both a_1 and a_2 can be critical.*

To prove this we prove that if $a_1 \mathfrak{S} a_2$ in Γ and if $a_1 . c$ then $K(\Gamma - c) = K(\Gamma)$. (By (3) a_1 and a_2 are not critical, so we take $c \neq a_1$, $c \neq a_2$.)

If $a_2 . c$ then $K(\Gamma - c) = K(\Gamma)$ by (5). Hence it may be assumed that $a_2 \times c$. But if $a_1 \mathfrak{S} a_2$ and $a_2 \times c$ it follows that $a_1 \mathfrak{D} c$, since $a_1 . c$. Therefore by (3) $K(\Gamma - c) = K(\Gamma)$. Similarly if $a_2 . d$ then $K(\Gamma - d) = K(\Gamma)$. This proves (6).

(4) cannot be extended to the case $a_1 \mathfrak{S} a_2$. For example let Γ_1 be a complete $(k-1)$-graph whose nodes are $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ and let a_1 and a_2 be joined to all the nodes of Γ_1 but not to each other. The resulting graph Γ is k-chromatic, and $a_1 \mathfrak{S} a_2$ in Γ, but $\Gamma - a_1 - a_2$ is $(k-1)$-chromatic. (6) cannot be extended to the case $a_1 \mathfrak{D} a_2$. For example let Γ_1 be a complete 4-graph whose nodes are b_1, b_2, b_3, b_4 and let a_1 be joined to b_1 and b_2 and let a_2 be joined to b_3 and b_4. The resulting graph Γ_1 is 4-chromatic and $a_1 \mathfrak{D} a_2$ in Γ_1, but $\Gamma_1 - b_1$ is 3-chromatic although b_1 is not joined to a_2.

If $a_1 \mathfrak{S} a_2$ then neither a_1 nor a_2 is critical, but we can prove that:

(7) *If $a_1 \mathfrak{S} a_2$ in Γ, then both a_1 and a_2 are essential nodes of Γ.*

To prove this we first prove two results; these will also be used later.

(8) *Let Γ be a k-chromatic graph and let C denote any k-colouring of Γ, and let $\{i\}$ denote the set of nodes of Γ which are given the colour i in C, $1 \leq i \leq k$. Then if $\Gamma - \{i\}$ denotes the graph obtained from Γ by deleting all the nodes in $\{i\}$ and all edges incident in these nodes, $K(\Gamma - \{i\}) = k - 1$.*

For $K(\Gamma - \{i\}) \leq k - 1$, and if $K(\Gamma - \{i\})$ were less than $k - 1$ clearly $K(\Gamma)$ would be less than k. It follows that if $\{i_1\}, \{i_2\}, \ldots, \{i_j\}$ are distinct colour classes in C then

$$K(\Gamma - \{i_1\} - \{i_2\} - \cdots - \{i_j\}) = k - j.$$

(9) *Let Γ be a k-chromatic graph and let a be a node of Γ. If in every k-colouring of Γ in which $\Gamma - a$ is coloured using $K(\Gamma - a)$ colours, the colour of a is uniquely determined by the colouring of $\Gamma - a$, then a is an essential node of Γ.*

Proof: If $K(\Gamma - a) = k - 1$ then a is a critical node of Γ and therefore also an essential node. If $K(\Gamma - a) = k$, let C be any k-colouring of Γ, and let Γ' be the graph obtained from Γ by deleting a and all nodes which have the same colour as a in C. (By hypothesis $\Gamma - a$ contains at least one such node.) By (8) Γ' is $(k-1)$-chromatic, and Γ' contains all those nodes to which a is joined in Γ, because none of these are coloured the same as a in C. Further in any $(k-1)$-colouring of Γ' the nodes to which a is joined in Γ receive between them all the $k-1$ colours, otherwise it would be possible to reintroduce the nodes deleted from $\Gamma - a$, colour $\Gamma - a$ using k colours, and then obtain a k-colouring of Γ itself with a choice of two or

more colours for a, and so in this k-colouring of Γ the colour of a would not be fixed by the k-colouring of $\Gamma - a$. Therefore the graph Γ''' obtained from Γ' by adding a to it, and joining a to all those nodes to which it is joined in Γ (and which are all in Γ'), is a k-chromatic subgraph of Γ, and a is a critical node of Γ'''. This proves (9).

(7) is an immediate consequence of (9) because if $a_1 \mathfrak{S} a_2$ in Γ and Γ is k-chromatic, then in every k-colouring of Γ the colour of a_1 is uniquely determined by the colouring of $\Gamma - a_1$, so by (9) a_1 is an essential node of Γ, and in the same way a_2 is also an essential node of Γ. The second example after the proof of (6) shows that if $a_1 \mathfrak{D} a_2$ in Γ, neither a_1 nor a_2 need be essential.

Two nodes which are bound must be of sufficiently high degree, in fact:

(10) *If two nodes are bound to have the same colour in Γ, the degree of each is at least $K(\Gamma) - 1$. If two nodes are bound to have different colours in Γ, the sum of their degrees is at least $K(\Gamma)$.*

The first part of (10) is obvious. To establish the second part, suppose $a_1 \mathfrak{D} a_2$ in Γ and suppose the degrees of a_1 and a_2 in Γ are d_1 and d_2 respectively, where $d_1 \geqq 1$, $d_2 \geqq 1$. If $d_1 \geqq K(\Gamma) - 1$ or $d_2 \geqq K(\Gamma) - 1$ then clearly $d_1 + d_2 \geqq K(\Gamma)$ so it may be supposed that $d_1 < K(\Gamma) - 1$, $d_2 < K(\Gamma) - 1$. In this case if C is any $K(\Gamma)$-colouring of $\Gamma - a_1 - a_2$ there is a choice of $K(\Gamma) - d_1$ colours for a_1 and an independent choice of $K(\Gamma) - d_2$ colours for a_2 which extends the colouring C to a colouring of Γ. (By (4) $K(\Gamma - a_1 - a_2) = K(\Gamma)$). If the sum of the number of possible choices for a_1 and a_2 exceeds $K(\Gamma)$, there will be a choice for a_1 and a choice for a_2 in which both receive the same colour, contrary to the hypothesis that $a_1 \mathfrak{D} a_2$. Hence

$$K(\Gamma) - d_1 + K(\Gamma) - d_2 \leqq K(\Gamma)$$

$$\text{i. e.} \quad d_1 + d_2 \geqq K(\Gamma).$$

The reduced graph.

The colouring of a graph Γ of order n can be reduced to colouring a graph of order $\leqq n$ as follows: If $a_1 \mathfrak{S} a_2$ and $a_2 \mathfrak{S} a_3$ in Γ then $a_1 \mathfrak{S} a_3$, and this relation is therefore an equivalence relation which divides the nodes of the graph into mutually disjoint non empty equivalence classes $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\alpha\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_\beta\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_\gamma\}, \ldots, D = \{d_1, d_2, \ldots, d_\delta\}$ say. Construct the graph Γ^* whose nodes are denoted by $A, B, C, \ldots, D$ to correspond to the above equivalence classes, and in which two nodes are joined by an edge if and only if two nodes belonging to the equivalence classes which they represent are joined by an edge in Γ. This graph will be called the *reduced graph*. The order of Γ^* is less than or equal to the order of Γ, the orders of the two graphs are the same if no two nodes of Γ satisfy the relation $x \mathfrak{S} y$.

If we now colour Γ^* in any way and then give to $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ in Γ the colour of A in Γ^*, and so on for the remaining equivalence classes, we obtain a colouring of Γ. For every node of Γ is given a colour, and no two nodes which are joined by an edge in Γ are coloured the same. Hence $K(\Gamma^*) \geqq K(\Gamma)$. On the other hand if we colour Γ in any way and give to the nodes of Γ^* the colours of the equivalence classes in Γ to which they correspond (A is given the colour received by $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ etc.) we obtain a colouring of Γ^*, because every node of Γ^* is given a colour, and no two nodes which are joined by an edge in Γ^* are coloured the same. Hence $K(\Gamma^*) \leqq K(\Gamma)$.

It follows that $K(\Gamma) = K(\Gamma^*)$ and colouring Γ can always be reduced to colouring Γ^*. Γ was taken to be finite, but clearly the same applies also if Γ is infinite. As an illustration, if Γ is a circuit with an even number of edges then Γ^* consists of two nodes A and B joined by an edge.

The closely knit nature of critical graphs is illustrated by the following:

(11) *If a and b are any two critical nodes of a graph Γ then a is an essential node of $\Gamma - b$.*

Proof: If Γ is 2-chromatic the statement is obviously true. Let Γ be k-chromatic, $k \geqq 3$, and let C be a k-colouring of Γ in which a and only a receives the colour k. Let Γ' denote the graph obtained from Γ by deleting b and all nodes which receive the same colour as b in C, then by (8) Γ' is $(k-1)$-chromatic. a is a critical node of Γ' because in the $(k-1)$-colouring of Γ' defined by C it is the only node which receives the colour k; also Γ' is a subgraph of $\Gamma - b$; hence a is an essential node of $\Gamma - b$.

We note that if b is not a critical node of Γ then a is obviously a critical node of $\Gamma - b$, so that (11) is true also if b is not critical. But it is necessary that a should be critical and not merely essential, this is illustrated for instance by the case in which Γ consists of two unconnected critical graphs of the same chromatic number and a and b belong to the same connected component.

It follows easily from (11) that

(12) *If a is an essential node of the k-chromatic graph Γ_k then Γ_k contains a set of subgraphs $\Gamma_{k-1}, \Gamma_{k-2}, \ldots, \Gamma_1$ such that Γ_i is i-chromatic and a subgraph of Γ_{i+1} for $1 \leqq i \leqq k-1$ and such that a is an essential node of each of them.*

For if a is an essential node of Γ_k, it is a node of a critical k-chromatic subgraph of Γ_k, and if $k \geqq 2$ it is by (11) an essential node of a $(k-1)$-chromatic subgraph Γ_{k-1} of Γ_k; the argument can now be repeated starting with Γ_{k-1} instead of Γ_k; and so on until the graph consisting of a by itself, Γ_1, is reached.

In general there is no easy way to determine whether or not a k-chromatic graph is essential. If $k = 1$ every node is essential, if $k = 2$ every node incident in an edge is essential. In the case $k = 3$ it will now be proved that a connected 3-chromatic graph which contains no cut-point is essential. (If Γ is a connected graph, a cut-point is a node d such that $\Gamma - d$ is not connected.) To prove this we prove the following proposition about the structure of graphs:

(13) *If a graph which has no cut-point contains a circuit with an odd number of nodes and edges, then through each node of the graph there passes a circuit with an odd number of nodes and edges.*

Proof: Suppose Γ is a graph which has no cut-point and which contains a circuit $\mathfrak{C}$ of odd length. Let a be any node of Γ which is not a node of $\mathfrak{C}$. (If there is no such node, there is nothing to prove.) By MENGER's Theorem [2] the graph contains two ways W_1 and W_2, connecting a with $\mathfrak{C}$, which have no node in common with each other except for a, and which have only their end nodes in in common with $\mathfrak{C}$. Let a_1 and a_2 be the nodes in which W_1 and W_2 respectively meet $\mathfrak{C}$. The two nodes a_1 and a_2 divide $\mathfrak{C}$ into two arcs $\mathfrak{C}_1$ and $\mathfrak{C}_2$ connecting a_1 and a_2, one of these arcs contains an odd number of edges and the other an even number, suppose $\mathfrak{C}_1$ contains an odd number and $\mathfrak{C}_2$ an even number.

Then if W_1 and W_2 both contain an even number of edges or both contain an odd number of edges, the three ways W_1, W_2 and $\mathfrak{C}_1$ together constitute a circuit with an odd number of nodes and edges which passes through a. If one of W_1 and W_2 contains an even number of edges and the other an odd number, then the three ways W_1, W_2 and $\mathfrak{C}_2$ together constitute a circuit with an odd number of nodes and edges which passes through a. This proves (13).

A 3-chromatic graph always contains a circuit with an odd number of nodes and edges [3], hence a critical 3-chromatic graph is simply such a circuit by itself. It follows from (13) therefore that a connected 3-chromatic graph which has no cut-point is essential. More generally in a connected 3-chromatic graph a node is unessential if and only if it is separated from every circuit with an odd number of nodes and edges by a cut-point.

Literature.

[1] Unpublished.

[2] G. HAJÓS,
Zum Mengerschen Graphensatz, Acta Litterarum ac Scientiarum, Szeged, 7, 1934, S. 44—47.
D. KÖNIG,
Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, XIV. Kapitel.

[3] D. KÖNIG [2], p. 170.

(Eingegangen am 11. Mai 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 4, S. 354—387 (1951).

Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie[1]).

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

Unter dem Radikal $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus dem kommutativen Ringe $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement[2]) versteht man üblicherweise den Durchschnitt aller Primoberideale von $\mathfrak{a}$. Der von JACOBSON eingeführte Begriff des Radikals eines beliebigen, nicht notwendig kommutativen Ringes legt nun den Gedanken nahe, auch im kommutativen Spezialfall systematisch für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ neben $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ ein zweites, JACOBSONsches Radikal $\mathfrak{r}_j(\mathfrak{a})$ zu bilden, und zwar hat man, wie leicht zu sehen, $\mathfrak{r}_j(\mathfrak{a})$ gleich dem Durchschnitt aller *maximalen* Primoberideale $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{a}$ zu setzen, d. h. $\mathfrak{m} > \mathfrak{a}$, die ihrerseits kein von $\mathfrak{R}$ selbst verschiedenes echtes Oberideal besitzen. Ein Ring $\mathfrak{R}$, bei dem $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}_j(\mathfrak{a})$ für alle $\mathfrak{a}$ wird, möge kurz als *JACOBSONscher Ring* bezeichnet werden[3]); offenbar ist $\mathfrak{R}$ schon dann JACOBSONsch, wenn jedes Primideal als Durchschnitt maximaler Primoberideale darstellbar ist. Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{R}$ in die Klasse der JACOBSONschen Ringe gehört, lassen sich keine tiefergehenden Aussagen über die Struktur von $\mathfrak{R}$ ableiten (vgl. weiter unten). Daß gleichwohl die neue Begriffsbildung keineswegs wertlos ist, zeigt das folgende, sehr allgemeine und sehr einfach zu beweisende Theorem:

Ist $\mathfrak{R}$ ein JACOBSONscher Ring, so ist es auch jede endliche Ringerweiterung $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[a_1, \ldots, a_n]$, und es stellt außerdem bei jedem Körperhomomorphismus $\mathfrak{S} \to \mathfrak{K}$ von $\mathfrak{S}$ das Bild $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{R}$ einen Unter*körper* von $\mathfrak{K}$ dar, über dem $\mathfrak{K}$ *algebraisch* ist.

Spezialisiert man hier $\mathfrak{R}$ zu einem Körper K, $\mathfrak{S} = K[x_1, \ldots, x_n]$ zu einem Polynomring in endlich vielen Unbestimmten über K, so er-

---

[1]) Über den Inhalt von § 1 und § 2 habe ich Februar 1950 ein Kolleg und auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge vorgetragen (auf dem Kongreß ohne Ausführung der Beweise). Der Hauptteil der übrigen Untersuchungen (mit Ausnahme von § 3) entstand im Frühjahr 1950; eine skizzenhafte Übersicht wird in den Berichten des Internationalen Mathematikerkongresses erscheinen. Inzwischen ist eine völlig unabhängig von mir entstandene Arbeit von Herrn O. GOLDMAN erschienen, in der im wesentlichen der gleiche Stoff behandelt worden ist wie von mir hier in § 1 und § 2, (GOLDMAN [2]). Vgl. hierzu die Anmerkungen [3]), [11]), [12]).

[2]) Die Existenz des Einheitselements ist für den Hauptteil der durchgeführten Untersuchungen wesentlich; sie wird daher stets vorausgesetzt. Die angegebene Definition von $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ ist auch bei Ringen ohne Einheitselement brauchbar.

[3]) Herr GOLDMAN spricht von HILBERTschen Ringen, weil er das Wesen des „HILBERTschen Nullstellensatzes" anders interpretiert als der Text, vgl. [11]).

hält man fast unmittelbar den Hilbertschen Nullstellensatz im üblichen Sinne des Wortes und zwar auf einem denkbar einfachen und übersichtlichen Wege. Unser Theorem kann daher mit Recht als *verallgemeinerter Hilbertscher Nullstellensatz* bezeichnet werden. — Zu weitergehenden Resultaten kommt man, wenn man sich auf *Noethersche Ringe* (Ringe mit Maximalbedingung) beschränkt, weil hier an entscheidenden Punkten die Theorie der Noetherschen *Stellenringe* (Ringe mit einem einzigen maximalen Primideal) herangezogen werden kann. Definiert man wie üblich die (Maximal-)Dimension eines Primideals $\mathfrak{p}$ als die um 1 verminderte Gliederzahl einer möglichst langen mit $\mathfrak{p}$ beginnenden Primoberidealkette, und betrachtet man der Einfachheit halber nur den — praktisch allein wichtigen — Fall, daß alle Ringprimideale in diesem Sinne endliche Dimension haben, so zeigt sich: Dann und nur dann, wenn $\mathfrak{R}$ ein Jacobsonscher Ring ist, kann für den Polynomring $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ über dem Noetherschen Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ eine *Dimensionstheorie* entwickelt werden, die die bekannte Dimensionstheorie der Polynomringe mit Körperkoeffizienten in befriedigender Weise verallgemeinert. Man erhält insbesondere bei Jacobsonschem $\mathfrak{R}$ die folgenden Sätze:

Ist $\mathfrak{p}_x$ irgendein Primideal aus $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$, und ist d die Dimension von $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x \cap \mathfrak{R}$, so gilt für die Dimension d_x von $\mathfrak{p}_x$ die Ungleichung $d < d_x < d + n$, und es kann die Differenz $d_x - d$ genau wie im Falle der Polynomringe mit Körperkoeffizienten als ein Transzendenzgrad im Sinne der Körpertheorie gedeutet werden.

Auf der anderen Seite gewinnt man eine sehr einfache axiomatische Charaktersierung der Jacobsonschen Ringe mit Maximalbedingung. Hat insbesondere jedes Primideal eine endliche Dimension, so ergibt sich kurz: Der Noethersche Integritätsbereich ist dann und nur dann Jacobsonsch, wenn jedes eindimensionale Primideal unendlich viele maximale Primoberideale besitzt. — Die Eigenschaft eines Noetherschen Ringes $\mathfrak{R}$, Jacobsonsch zu sein, hat also nur wenig mit der Feinstruktur von $\mathfrak{R}$ zu tun, die ihrerseits im wesentlichen durch die zwischen den höher-dimensionalen Ringprimideal bestehenden Beziehungen charakterisiert wird. Diese Bemerkung macht es verständlich, daß der Versuch, die Dimensionstheorie von $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ über die bereits angegebenen Hauptsätze hinaus zu verschärfen, im wesentlichen zu negativen Resultaten führt. — In einem Polynomring $\boldsymbol{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit Körperkoeffizienten haben alle „geschlossenen" Primoberidealketten $\mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \cdots < \mathfrak{p}_m$ mit festen Enden $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_m$ die gleiche Gliederzahl. Ein beliebiger Noetherscher Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ mit dieser Eigenschaft möge für den Augenblick kurz als *Noetherscher Normalring* bezeichnet werden. Fragt man nun, ob $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ immer ein Normalring sein muß, wenn $\mathfrak{R}$ ein gleichzeitig Noetherscher und Jacobsonscher Normalring ist, so gelingt es zwar auf Grund der bereits entwickelten Dimensionstheorie, dieses Problem auf eine Frage über Stellenringe zurückzu-

führen, und so immerhin eine wesentliche Vereinfachung zu erreichen. Aber über diese Reduktion hinaus scheint zunächst kein Vordringen möglich, weil man an einem Punkte angekommen ist, wo sich die Grenzen des augenblicklichen Standes der Theorie der Stellenringe zeigen. Indessen ist auch dieses Resultat nicht ganz unwichtig. Man erkennt, daß der Beweis der untersuchten Vermutung kaum einfacher sein dürfte, als der Beweis des (wahrscheinlich falschen) Satzes, daß *jeder* Noethersche Stellenring ein Normalring ist. Darüber hinaus liefert die Analyse der auftretenden Schwierigkeiten wertvolle Hinweise auf den Weg, der — unter Berücksichtigung eines fundamentalen von J. S. Cohen für *vollständige* Stellenringe bewiesenen Struktursatzes — bei der Weiterentwicklung der Theorie beliebiger Stellenringe am zweckmäßigsten einzuschlagen sein dürfte.

Hinsichtlich der Anordnung des Stoffes und einiger bei der ersten Übersicht übergangener Punkte sei noch bemerkt: Im ersten Teil (§ 1 bis § 3) werden zunächst verhältnismäßig ausführlich die nötigen Grundbegriffe eingeführt (§ 1). Anschließend wird im § 2 der bereits besprochene verallgemeinerte Hilbertsche Nullstellensatz behandelt und in einem wichtigen Punkte ergänzt: Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}$ eine *endliche* Ringerweiterung von $\mathfrak{R}$ ist, kann zwar nicht einfach weggelassen werden. Sie läßt sich aber wenigstens durch die schwächere Forderung ersetzen, daß zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ eine endliche Ringerweiterung $\mathfrak{S}^*$ von $\mathfrak{R}$ existiert, derart, daß $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}^*$ algebraisch ganz abhängt. — Zur Gewinnung eines weiteren Einblicks in die Eigenart der bei unendlichen Ringerweiterungen auftauchenden Probleme wird in § 3 die Frage behandelt: Wann gilt der gewöhnliche Hilbertsche Nullstellensatz für einen Polynomring $K[x_1, x_2, \ldots]$ in abzählbar unendlich vielen Unbestimmten mit Körperkoeffizienten? Die überraschende Antwort lautet: Dann und nur dann, wenn K überabzählbar ist. Die Überabzählbarkeit vereinfacht nämlich hier das arithmetische Problem in ähnlicher Weise, wie man es bei den topologischen Räumen von der Vollständigkeit gewohnt ist. — Im zweiten Teil (§ 4 bis § 6) ist die Anordnung gerade umgekehrt wie in der vorläufigen Übersicht. Zuerst wird der grundlegende Satz bewiesen, daß in einem Noetherschen Stellenring jedes nichtmaximale Primideal als Durchschnitt von eindimensionalen Primidealen darstellbar ist, worauf dann leicht diejenigen Noetherschen Stellenringe, die gleichzeitig Jacobsonsche Ringe sind, axiomatisch charakterisiert werden können (§ 4). In § 5 wird vor allem durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß die gewonnenen axiomatischen Resultate sich nicht wesentlich verschärfen lassen. Auch wird ein gleichzeitig Noetherscher und Jacobsonscher Oberring $\mathfrak{S}$ eines Körpers K konstruiert, für den über K der Hilbertsche Nullstellensatz nicht gilt[4]).

[4]) Hier ist es wesentlich, daß der Hilbertsche Nullstellensatz im Sinne des Textes und nicht im Sinne von Herrn Goldman interpretiert wird.

§ 6 bringt dann die positiven Hauptsätze der oben besprochenen Dimensionstheorie. Im Schlußteil (§ 7 und § 8) wird zuerst die Frage, ob $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ immer ein Noetherscher Normalring sein muß, wenn $\mathfrak{R}$ nicht nur ein Noetherscher Normalring, sondern auch Jacobsonsch ist, auf eine „Zwischenprimidealhypothese" für den Polynomring $\mathfrak{S}[x]$ über einen Noetherschen Stellenring $\mathfrak{S}$ zurückgeführt, und es werden Spezialfälle diskutiert, in denen man bei dem reduzierten Problem zu positiven Aussagen kommt (§ 7). § 8 behandelt dann abschließend allgemeine Noethersche Stellenringe und gibt den oben angedeuteten Ausblick. Hervorgehoben sei hier noch die Diskussion einer möglichen Verschärfung des für die Theorie der Stellenringe grundlegenden (schon in § 4 formulierten) „Hauptidealsatzes".

§ 1.

Grundbegriffe.

Bei den Betrachtungen von § 1 bis § 3 [5]) werden ganz wenige Begriffe und Hilfssätze aus der allgemeinen Idealtheorie benutzt, die der Einfachheit halber hier kurz zusammengestellt werden sollen. Wir betrachten ausschließlich kommutative Ringe mit Einheitselement 1 [6]). Ein nullteilerfreier Ring heißt Integritätsbereich, unter einem Halb-Integritätsbereich verstehen wir einen Ring ohne echte nilpotente Elemente. $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ bezeichne eine homomorphe Abbildung des Ringes $\mathfrak{R}$ *auf* den Ring $\mathfrak{S}$ [7]). Zwei Homomorphismen $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}_2$ werden als gleich angesehen, wenn ein Isomorphismus $\mathfrak{S}_1 \longleftrightarrow \mathfrak{S}_2$ existiert, derart, daß aus $a \to \alpha_1$, bei $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}_1$ stets $a \to \alpha_2$ bei $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}_2$ folgt, falls $\alpha_1 \longleftrightarrow \alpha_2$ bei $\mathfrak{S}_1 \longleftrightarrow \mathfrak{S}_2$. Es entspricht dann jedem Homomorphismus $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ *umkehrbar* eindeutig ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$, derart, daß $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ isomorph wird, und daß $\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ nichts anderes ist als die Abbildung der Elemente aus $\mathfrak{R}$ auf die Restklassen modulo $\mathfrak{a}$. Definiert man weiter das Primideal in üblicher Weise, nennt man ein Ideal maximal, wenn es außer $\mathfrak{R}$ kein echtes Oberideal besitzt, und versteht man unter einem *Radikal* ein Ideal, das gleichzeitig mit $a^r (r \geq 1)$ stets auch a enthält, so ergibt sich sofort:

$\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann *Radikal* bzw. *Primideal*, wenn der zugehörige Homomorphismus $\mathfrak{R}$ auf einem *Halb-Integritätsbereich*

[5]) § 1 ist etwas ausführlicher gehalten als an sich unbedingt nötig, einerseits um die Bedeutung der eingeführten Begriffsbildungen klar herauszuarbeiten, andererseits um zu zeigen, wie wenig Hilfsmittel aus der allgemeinen Idealtheorie zum vollen Beweis des „verallgemeinerten Hilbertschen Nullstellensatzes" von § 2 nötig sind.

[6]) Wir schreiben 1, auch wenn $\mathfrak{R}$ eine von 0 verschiedene Charakteristik besitzt.

[7]) Es muß also *jedes* $a_s \in \mathfrak{S}$ Bild eines $a_r \in \mathfrak{R}$ sein. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so sprechen wir wie üblich von einem *Endomorphismus* von $\mathfrak{R}$ *in* $\mathfrak{S}$.

bzw. auf einen *Integritätsbereich* abbildet. Ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ ist stets ein Primideal. $\mathfrak{m}$ ist dann und nur dann *maximal*, wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{m}$ ein *Körper* wird, wenn also $\mathfrak{m}$ einen *Körperhomomorphismus* von $\mathfrak{R}$ definiert.

An Sätzen aus der allgemeinen Idealtheorie benötigen wir über diese Bemerkung hinaus nur noch das *Lemma*:

Es sei S ein m. a. System aus $\mathfrak{R}$, d. h. ein System, das gleichzeitig mit a und b stets auch das Produkt $a \cdot b$ enthält. $\mathfrak{a}$ *sei ein zu S elementfremdes Ideal. Dann gibt es stets ein maximales, zu S elementfremdes Oberideal* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{a}$, das seinerseits immer ein *Primideal* darstellt. (Existenzbeweis bei einem abzählbaren Ring $\mathfrak{R}$ durch triviale Induktion, im nichtabzählbaren Fall fast ebenso trivial mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Der Primidealcharakter von $\mathfrak{p}$ folgt sofort aus der Maximaleigenschaft [8].)

Korollare zum Lemma: a) *Jedes Ideal* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{R}$ *besitzt Primoberideale und zwar insbesondere maximale Primoberideale* $\mathfrak{m}$. (Man wähle für S das aus dem einen Element 1 bestehende System.) — b) Gehört a zu allen Primoberidealen von $\mathfrak{a}$, so liegt stets eine Potenz von a in $\mathfrak{a}$. Oder anders ausgedrückt: *Ein Radikal ist stets gleich dem Durchschnitt seiner Primoberideale.* (Man wähle für S das System aller Potenzen von a und schließe indirekt.)

Neben dem bisher benutzten, in der kommutativen Idealtheorie üblichen Radikalbegriff hat nun Jacobson für beliebige Ringe einen neuen Radikalbegriff geschaffen, der im kommutativen Fall zu der folgenden Definition führt: *Das Jacobsonsche Ringradikal* $\mathfrak{r}_0^*$ *des kommutativen Ringes* $\mathfrak{R}$ *mit Einheitselement ist der Durchschnitt aller maximalen Ringprimideale* [9]. Die Konzeption des Jacobsonschen Ringradikals legt es weiter nahe, ein beliebiges Ideal $\mathfrak{r}^*$ aus $\mathfrak{R}$ dann und nur dann als *Jacobsonsches Radikal* zu bezeichnen, wenn $\mathfrak{r}^*$ gleich dem Durchschnitt aller maximalen Primoberideale wird. Ein Jacobsonsches Radikal $\mathfrak{r}^*$ stellt dann stets ein Radikal $\mathfrak{r}$ im früher benutzten Sinne des Wortes („Radikal" schlechtweg) dar, während leicht durch Beispiele gezeigt werden kann, daß die Umkehrung nicht immer richtig ist. Wir werden uns weiter hauptsächlich für Ringe interessieren, bei denen die Begriffe *Jacobsonsches Radikal* und *Radikal schlechtweg* gleichwertig sind, bei denen also für ein Ideal $\mathfrak{r}$ dann und nur dann $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ein Halb-Integritätsbereich wird, wenn $\mathfrak{r}$ mit dem Durchschnitt aller *maximalen* Primoberideale zusammenfällt. Solche Ringe sollen kurz als *Jacobsonsche Ringe* bezeichnet werden. Offenbar ist jeder Restklassenring eines Jacobsonschen Ringes selbst Jacobsonsch. Auf Grund des Korollars b) zum Lemma ergibt sich weiter:

---

[8] Vgl. hierzu etwa Krull [2], Nr. 3.

[9] Zur Definition des Jacobsonschen Radikals vgl. etwa Jacobson [1], Goldman [1], sowie den Bericht von McCoy [1].

$\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein *Jacobsonscher Ring*, wenn *jedes Primideal* gleich dem *Durchschnitt seiner maximalen Primoberideale* wird.

Um dieses Resultat in die Sprache der Homomorphismen zu übersetzen, nennen wir im Anschluß an K. Dörge[10]) den Homomorphismus $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ die *Überlagerung* der (endlich oder unendlich vielen) Homomorphismen $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}_\tau$, wenn $\mathfrak{a} = \bigcap_\tau \mathfrak{a}_\tau$, wenn also für jedes $a \in \mathfrak{R}$ die Restklasse, auf die a durch $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ abgebildet wird, den Durchschnitt aller der Restklassen darstellt, die a bei den Homomorphismen $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/\mathfrak{a}_\tau$ entsprechen. Beachten wir dann noch, daß ein Ring dann und nur dann in einen Körper eingebettet werden kann, wenn er nullteilerfrei ist, daß also die homomorphen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ auf *Integritätsbereiche* nichts anderes sind als die *Körperendomorphismen* von $\mathfrak{R}$, so erhalten wir in der Terminologie der Homomorphismen die folgende, formal elegante Charakterisierung der Jacobsonschen Ringe: $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann ein Jacobsonscher Ring, wenn jeder Körperendomorphismus von* $\mathfrak{R}$ *als Überlagerung von Körperhomomorphismen dargestellt werden kann.*

§ 2.

Oberringe. Der verallgemeinerte Hilbertsche Nullstellensatz.

Der Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ wird als eine *endliche Ringerweiterung von* $\mathfrak{R}$ bezeichnet, wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[a_1, \ldots, a_n]$ aus $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion von endlich vielen Elementen entsteht, wenn also $\mathfrak{S}$ ein homomorphes Bild des Polynomrings $\mathfrak{R}[u_1, \ldots, u_n]$ in endlich vielen Unbestimmten u_i ist, bei dem keine zwei verschiedene Elemente aus $\mathfrak{R}$ in dieselbe Klasse fallen. — Ist $\mathfrak{S}$ ein beliebiger Oberring von $\mathfrak{R}$, so definiert jeder Homomorphismus $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1$ einen Homomorphismus $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$ von $\mathfrak{R}$ auf einen Unterring $\mathfrak{R}_1$ von $\mathfrak{R}$. Wir wollen $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$ als die *Verengung* von $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1$ auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1$ als eine *Erweiterung* von $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$ auf $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Die gleiche Terminologie benützen wir bei Endomorphismen. Offenbar ist der durch das $\mathfrak{S}$-Ideal $\mathfrak{a}_s$ definierte Homomorphismus $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1$ dann und nur dann eine Erweiterung des durch das $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}_r$ definierten Homomorphismus $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_1$, wenn die Durchschnittsgleichung $\mathfrak{a}_s \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ gilt. Ein Körperendomorphismus $\mathfrak{S} \to \mathfrak{L}_1$, der eine Erweiterung eines Körperhomomorphismus $\mathfrak{S} \to \mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{R}$ darstellt, möge eine *algebraische Erweiterung* von $\mathfrak{R} \to \mathfrak{K}_1$ genannt werden, wenn $\mathfrak{L}_1$, d. h. jedes Element aus $\mathfrak{L}_1$ über $\mathfrak{K}_1$ algebraisch ist. Aus der Tatsache, daß jeder über dem Körper $\mathfrak{K}_1$ algebraische, nullteilerfreie Oberring $\mathfrak{L}_1'$ von $\mathfrak{K}_1$ selbst einen Körper bildet, folgt sofort: Ist der *Körperendomorphismus* $\mathfrak{S} \to \mathfrak{L}_1$ *eine algebraische Erweiterung des Körperhomomorphismus* $\mathfrak{R} \to \mathfrak{K}_1$, so ist $\mathfrak{S} \to \mathfrak{L}_1$ selbst ein *Körperhomomorphismus*. Ist $\mathfrak{S}$ Oberring eines Körpers $\mathfrak{K}$, so ist jeder Homomorphismus oder Endomorphismus von $\mathfrak{S}$ eine Erweiterung des trivialen

[10]) Vgl. Dörge [1], S. 285.

Homomorphismus von $\mathfrak{K}$, der jedes $a \in \mathfrak{K}$ nur sich selbst zuordnet. In diesem Falle wollen wir einen Körperendomorphismus $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}$ eine *Nullstelle* des $\mathfrak{S}$-Elementes a bzw. des $\mathfrak{S}$-Ideals $\mathfrak{a}$ nennen, wenn $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1$ das Element a bzw. jedes $c \in \mathfrak{a}$ auf Null abbildet. Handelt es sich bei $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1$ um eine algebraische Erweiterung des trivialen Körperhomomorphismus von $\mathfrak{K}$, so wollen wir von einer *algebraischen Nullstelle* von a bzw. $\mathfrak{a}$ reden.

Nach unserer Definition entsprechen die Nullstellen des Ideals $\mathfrak{a}$ aus dem Oberring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ umkehrbar eindeutig den Primoberidealen von $\mathfrak{a}$, und es ist eine *algebraische* Nullstelle von $\mathfrak{a}$ bestimmt einem *maximalen* Primoberideal zugeordnet. Andererseits braucht keineswegs jedes maximale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ eine algebraische Nullstelle zu erzeugen. Aus dem Korollar b) zum Lemma von § 1 folgt sofort der

Nullstellensatz: *Ist jede Nullstelle von* $\mathfrak{a}$ *auch Nullstelle von* a, *so ist* $a^r \in \mathfrak{a}$ *für hinreichend großes* r.

Wir wollen nun, in Übereinstimmung mit der bei den Polynomringen üblichen Terminologie, von der Gültigkeit des *Hilbertschen Nullstellensatzes* (für $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{K}$) reden, falls der Nullstellensatz auch dann noch richtig bleibt, wenn wir das Wort „Nullstelle" durch „algebraische Nullstelle" ersetzen [11]). Man erkennt dann mühelos:

Der Hilbertsche Nullstellensatz gilt für $\mathfrak{S}$ *über* $\mathfrak{K}$ *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{S}$ *ein Jacobsonscher Ring ist, und wenn außerdem jeder Körperhomomorphismus von* $\mathfrak{S}$ *eine algebraische Fortsetzung des identischen Körperhomomorphismus von* $\mathfrak{K}$ *ist.*

(Man beachte den Nullstellensatz schlechthin, die Definition des Jacobsonschen Ringes, sowie die Tatsache, daß die auf die Körperhomomorphismen bezügliche Forderung nichts anderes besagt, als daß bei jedem maximalen $\mathfrak{S}$-Primideal die einzige vorhandene Nullstelle algebraisch sein soll.) — Es liegt jetzt äußerst nahe, den Begriff des Hilbertschen Nullstellensatzes auch dann einzuführen, wenn $\mathfrak{S}$ nicht Oberring eines Körpers $\mathfrak{K}$, sondern eines ganz beliebigen kleineren Ringes $\mathfrak{R}$ ist. Man wird einfach sagen:

Es gilt für $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ der *verallgemeinerte Hilbertsche Nullstellensatz* (in Zukunft kurz *v. H. N.*), wenn a) $\mathfrak{S}$ ein Jacobsonscher Ring ist, und wenn gleichzeitig b) jeder Körperhomomorphismus von $\mathfrak{S}$ eine algebraische Erweiterung eines Körperhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ darstellt. Daß die Einführung des v. H. N. keineswegs eine bloße Spielerei darstellt, zeigt das folgende Fundamentaltheorem:

---

[11]) Auf den Hilbertschen Nullstellensatz im Sinne von Herrn Goldman kommt man, wenn man statt der *algebraischen* Nullstellen eines $\mathfrak{S}$-Ideals $\mathfrak{a}$ alle die Nullstellen von $\mathfrak{a}$ auszeichnet, die durch Körper*homomorphismus* von $\mathfrak{S}$ (also durch beliebige maximale $\mathfrak{S}$-Primideale) definiert werden. Im Goldmanschen Sinne gilt daher der Hilbertsche Nullstellensatz für $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{K}$ bereits dann, wenn $\mathfrak{S}$ ein Jacobsonscher Ring ist. Zu dieser Auffassung, die auch aus Krull [5] Anm. [19]) herausgelesen werden kann, vgl. noch Zariski [1].

Satz 1. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Jacobsonscher Ring, so gilt für jede endliche Ringerweiterung $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[a_1, \ldots, a_n]$ der v. H. N. über $\mathfrak{R}$.*

Zum Beweis von Satz 1, der für $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_n]$ den gewöhnlichen Hilbertschen Nullstellensatz der Polynomidealtheorie liefert, sei zunächst bemerkt: Ist $\mathfrak{S}$ Oberring von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{a}_s$ irgendein $\mathfrak{S}$-Ideal, $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_s \cap \mathfrak{R}$, und gilt für $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ der v. H. N., so gilt der v. H. N. ersichtlich auch für $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_s$ über $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}_r$. Es genügt also offenbar, Satz 1 für den Fall zu beweisen, daß $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ den Polynomring in endlich vielen Unbestimmten x_i über $\mathfrak{R}$ darstellt. Weiter zeigt eine triviale Induktion, daß der Satz 1 für $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ richtig ist, falls er für $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[x]$ gilt. Was schließlich den eigentlichen Kernpunkt, den Beweis für $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[x]$ angeht, so kann im wesentlichen auf Goldman [1] verwiesen werden[12]).

Zur Frage, ob die Voraussetzungen von Satz 1 irgendwie abgeschwächt werden können, bemerken wir zunächst: Ist $\mathfrak{R}$ kein Jacobsonscher Ring, so ist es auch $\mathfrak{R}[x] = \mathfrak{S}$ nicht. Bedeutet nämlich $\mathfrak{p}_r$ ein nicht als Durchschnitt von maximalen $\mathfrak{R}$-Primidealen darstellbares $\mathfrak{R}$-Primideal, so kann wegen der Isomorphie der Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}_s$ auch das $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{p}_r \cdot \mathfrak{S} + (x) \cdot \mathfrak{S}$ nicht als Durchschnitt von maximalen $\mathfrak{S}$-Primidealen dargestellt werden. Etwas tiefer liegt der an sich bemerkenswerte

Satz 2. *Ist jeder Körperhomomorphismus von $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[x]$ eine Erweiterung eines Körperhomomorphismus von $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}$ ein Jacobsonscher Ring.*

Ein kurzer Beweis von Satz 2 wird später in größerem Zusammenhang gegeben (Beweis von Satz 14 a) α)). Im übrigen kann der Beweis auch Goldman [2] entnommen werden[13]). — Um einzusehen, daß die Forderung, $\mathfrak{S}$ solle eine *endliche* Ringerweiterung von $\mathfrak{R}$ sein, bei

[12]) Zunächst zeigt der Beweis von Goldman [2], Satz 3, daß jedes Primideal $\mathfrak{p}_x$ aus $\mathfrak{R}[x]$ Durchschnitt von maximalen Primoberidealen ist. Bedeutet ferner $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Primideal aus $\mathfrak{R}[x]$, und setzt man $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}_{x0} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}[x]$, so ist $\mathfrak{m}_x > \mathfrak{p}_{x0}$, weil $\mathfrak{p}_{x0}$ das echte Primoberideal $\mathfrak{p}_{x0} + (x) \cdot \mathfrak{R}[x]$ hat. Es sei nun $p(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$ ein Polynom niedrigsten Grades aus $\mathfrak{m}_x$ mit $c_n \overline{\in} \mathfrak{p}$. Dann existiert wegen des Jacobsonschen Charakters von $\mathfrak{R}$ ein maximales Primoberideal $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{p}$ mit $c_n \overline{\in} \mathfrak{m}$. Die Überlegungen von Goldman [1], Beweis von Satz 3, zeigen weiter mühelos, daß $\mathfrak{m}'_x \geq \mathfrak{m}_x$ für $\mathfrak{m}'_x = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{R}[x] + (p(x)) \cdot \mathfrak{R}[x]$. Wegen der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{m}_x$ folgt daraus schließlich $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}'_x$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. D. h. also, es ist der durch $\mathfrak{m}$ definierte Körperhomomorphismus von $\mathfrak{R}[x]$ eine Fortsetzung des durch $\mathfrak{m}$ bestimmten Körperhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ und zwar wegen

$$p(x) = c_n x^n + \cdots \in \mathfrak{m}_x, \quad c_n \overline{\in} \mathfrak{m}$$

eine *algebraische*. — Die auf $\mathfrak{m}_x$ bezüglichen Überlegungen können im übrigen auch aus Goldman [2], Beweis von Satz 5, herauspräpariert werden; die gegebene Skizze dürfte aber das Nachlesen wesentlich erleichtern.

[13]) Beweis von Satz 5, erste Hälfte.

Satz 1 nicht einfach weggelassen werden darf, wähle man z. B. für $\mathfrak{R}$ den Ring $\mathfrak{R}_0$ der ganzen rationalen Zahlen und für $\mathfrak{S}$ einmal den Ring aller rationalen Zahlen mit ungeradem Nenner, das andere Mal den Körper aller rationalen Zahlen. Dann ist $\mathfrak{R}$ ein Jacobsonscher Ring, aber es gilt in beiden Fällen für $\mathfrak{S}$ über $\mathfrak{R}$ *nicht* der v. H. N. Denn es ist im ersten Falle $\mathfrak{S}$ kein Jacobsonscher Ring, weil in $\mathfrak{S}$ außer (0) nur ein einziges weiteres Primideal, nämlich (2) existiert. Im zweiten Falle dagegen ist $\mathfrak{S}$ zwar Jacobsonsch, aber es gibt einen Körperhomomorphismus von $\mathfrak{S}$ (nämlich den identischen), der *nicht* eine Erweiterung eines Körperhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ darstellt. —

Trotz ihrer Trivialität geben die soeben betrachteten Beispiele einen wichtigen Hinweis: Will man ohne nähere Voraussetzungen über den Jacobsonschen Ring $\mathfrak{R}$ unendliche Ringerweiterungen $\mathfrak{S}$ zulassen, so muß man sich, anschaulich ausgedrückt, vor der Gefahr schützen, daß beim Übergang von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{S}$ allzu viele Primideale verlorengehen. Denn es darf ja z. B. $\mathfrak{S}$ weder ein Integritätsbereich mit nur endlich vielen maximalen Primidealen noch ein Körper werden. Sucht man aber möglichst allgemeine und einfach zu charakterisierende Ringklassen $\mathfrak{S}$, bei denen man ohne weitere Endlichkeitsbedingung sicher ist, daß die als notwendig erkannten Voraussetzungen erfüllt sind, so kommt man zwangsläufig und eindeutig auf die *ganz abhängigen Oberringe von* $\mathfrak{R}$. (Dabei heißt $\mathfrak{S}$, wie üblich, von $\mathfrak{R}$ ganz abhängig, wenn jedes $\alpha \in \mathfrak{S}$ einer Gleichung $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ ($a_i \in \mathfrak{R}$) genügt.) In der Tat ermöglicht die Einführung des Begriffes des ganz abhängigen Oberringes eine wichtige Verallgemeinerung von Satz 2:

Satz 3. *Der v. H. N. gilt für* $\mathfrak{S}$ *über* $\mathfrak{R}$ *immer, wenn zwischen* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{S}$ *eine endliche Ringerweiterung* $\mathfrak{R}^*$ *von* $\mathfrak{R}$ *so eingeschoben werden kann, daß* $\mathfrak{S}$ *von* $\mathfrak{R}^*$ *ganz abhängt.*

Man sieht sofort, daß es genügt, den Beweis von Satz 3 für den Fall $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^*$ zu führen; denn man kann ja im allgemeinen Fall auf Grund des bereits gewonnenen Satzes 1 sofort von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{R}^*$ übergehen, so daß nur noch der Schluß von $\mathfrak{R}^*$ auf $\mathfrak{S}$ übrig bleibt. Ist aber $\mathfrak{S}$ ein ganz abhängiger Oberring von $\mathfrak{R}$, so hat man für die Durchführung des Beweises drei fundamentale Primidealsätze zur Verfügung[14]: a) Zu jedem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}_r$ gibt es in $\mathfrak{S}$ mindestens ein darüberliegendes, also der Durchschnittsgleichung $\mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}_r$ genügendes $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{p}_s$. — b) Zwei $\mathfrak{S}$-Primideale, die über demselben $\mathfrak{R}$-Primideal liegen, sind stets gegenseitig prim. — c) Sind $\mathfrak{q}_r$ und $\mathfrak{p}_r \supset \mathfrak{q}_r$ zwei $\mathfrak{R}$-Primideale, so gibt es zu jedem über $\mathfrak{q}_r$ liegenden $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{q}_s$ mindestens ein über $\mathfrak{p}_r$ liegendes, $\mathfrak{q}_s$ umfassendes $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{p}_s$. Aus Satz c) folgt sofort: Ist $\mathfrak{p}_r$ nicht maximal in $\mathfrak{R}$, so ist auch $\mathfrak{p}_s$ nicht maximal in $\mathfrak{S}$. Es muß also jeder Körperhomomorphismus von $\mathfrak{S}$ Erweiterung eines Körperhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ sein, und daß nur eine

[14]) Vgl. Krull [3], § 1. Satz 3 findet sich in Goldman [1] nicht.

algebraische Erweiterung in Betracht kommt, ist klar, weil gleichzeitig mit $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ stets auch $\mathfrak{S}/\mathfrak{a}_s$ von $\mathfrak{R}/(\mathfrak{a}_s \cap \mathfrak{R})$ ganz abhängt. — Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{S}$ ein JACOBSONscher Ring ist, daß also zu jedem $\mathfrak{S}$-Primideal $\mathfrak{p}_s$ und zu jedem $\alpha \in \mathfrak{S}$, $\overline{\in} \mathfrak{p}_s$ mindestens ein α nicht enthaltendes, maximales Primoberideal $\mathfrak{m}_s$ von $\mathfrak{p}_s$ existiert. Zum Beweis schalten wir zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ den Ring $\mathfrak{T} = \mathfrak{R}[\alpha]$ ein und setzen $\mathfrak{p}_t = \mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{T}$ eine endliche Ringerweiterung von $\mathfrak{R}$ ist und $\alpha \in \mathfrak{T}$ nicht zu $\mathfrak{p}_t$ gehört, gibt es in $\mathfrak{T}$ ein maximales, $\mathfrak{p}_t$ aber nicht α enthaltendes Primideal $\mathfrak{m}_t$. Wegen $\mathfrak{p}_t = \mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{m}_t \supseteq \mathfrak{p}_t$ existiert weiter in $\mathfrak{S}$ ein $\mathfrak{p}_s$ umfassendes der Gleichung $\mathfrak{m}_s \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{m}_t$ genügendes Primideal $\mathfrak{m}_s$. Da der Integritätsbereich $\mathfrak{S}/\mathfrak{m}_s$ ein ganz abhängiger Oberring des Körpers $\mathfrak{T}/\mathfrak{m}_t$ ist, muß $\mathfrak{S}/\mathfrak{m}_s$ ebenfalls ein Körper sein, d. h. es ist $\mathfrak{m}_s$ in $\mathfrak{S}$ maximal; andererseits ist α kein Element von $\mathfrak{m}_s$ wegen $\alpha \overline{\in} \mathfrak{m}_t$, $\mathfrak{m}_s \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{m}_t$. Es besitzt also $\mathfrak{m}_s$ alle gewünschten Eigenschaften.

§ 3.

Polynome in abzählbar unendlich vielen Unbestimmten [15].

In § 2 wurde an zwei einfachen Beispielen klargemacht, daß der v. H. N. für eine unendliche Ringerweiterung eines JACOBSONschen Ringes nicht mehr zu gelten braucht. Um weitere Einblicke in die Eigenart der bei den unendlichen Ringerweiterungen auftretenden Schwierigkeiten zu gewinnen, betrachten wir einen Polynomring $\mathfrak{K}[x_1, x_2, \ldots] = \mathfrak{P}_\omega$ in abzählbar unendlich vielen Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots$ über einem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$. Hier ergibt sich:

Satz 4. a) *Ist $\mathfrak{K}$ endlich oder abzählbar, so gilt für $\mathfrak{P}_\omega$ der* HILBERTsche *Nullstellensatz nicht. Es gibt in $\mathfrak{P}_\omega$ nichtmaximale Primideale, die von dem Durchschnitt ihrer maximalen Primoberideale verschieden sind und maximale Primideale, deren Restklassenkörper über $\mathfrak{K}$ einen beliebig vorgeschriebenen Transzendenzgrad n (einschließlich $n = \infty$) besitzt.* b) *Ist dagegen $\mathfrak{K}$ überabzählbar, so gilt für $\mathfrak{P}_\omega$ der* HILBERTsche *Nullstellensatz immer.*

Zum Beweis von a) hat man nun zu bedenken: Ist $\mathfrak{K}$ endlich oder abzählbar, so gibt es abzählbare nicht-JORDANsche Oberringe von $\mathfrak{K}$ [16] und abzählbare Oberkörper, die über $\mathfrak{K}$ einen beliebig vorgeschriebenen Transzendenzgrad n haben. Alle diese Oberringe und Oberkörper aber lassen sich als homomorphe Bilder von $\mathfrak{P}_\omega$ darstellen. — Zum Beweis von b) zeigen wir zunächst: Ist $\mathfrak{K}$ überabzählbar, so läßt sich kein nichtalgebraischer Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ als homomorphes Bild von $\mathfrak{P}_\omega$

[15] Die Untersuchungen von § 3 sind erst bei der endgültigen Ausarbeitung entstanden und zum Teil durch DÖRGE [1] angeregt.

[16] Z. B. der Ring aller Polynomquotienten

$$\frac{z(x)}{n(x)} \; (z(x), n(x) \in \mathfrak{K}[x]; \quad n(x) \neq 0(x)).$$

darstellen. Ist nämlich $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ nicht algebraisch, so kann man zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ einen Körper $\mathfrak{K}(\ldots u_\tau \ldots) = \mathfrak{L}_0$ einschieben derart, daß $\mathfrak{L}_0$ über $\mathfrak{K}$ rein transzendent von einem (nicht notwendig endlichen) Grade $n \geqq 1$, $\mathfrak{L}$ aber über $\mathfrak{L}_0$ algebraisch ist. In $\mathfrak{L}_0$ wiederum ist der Polynomring $\mathfrak{K}[\ldots u_\tau \ldots]$ in den erzeugenden, untereinander algebraisch unabhängigen Transzendenten u_τ ausgezeichnet, und mit Hilfe des über $\mathfrak{K}$ irreduziblen Polynoms $p(u)$ aus $\mathfrak{K}[\ldots u_\tau \ldots]$ erhält man überabzählbar viele diskrete Bewertungen B_ϱ von $\mathfrak{L}_0$. Jeder Bewertung B_ϱ entsprechen endlich oder unendlich viele, nicht notwendig diskrete Bewertungen $B_{\varrho\sigma}$ von $\mathfrak{L}$, und es gilt der Satz, daß jedes Element aus $\mathfrak{L}$ nur für endlich viele ϱ in mindestens einer Bewertung $B_{\varrho\sigma}$ einen negativen Wert besitzt [17]). Es sei nun irgendein Endomorphismus E von $\mathfrak{P}_\omega$ in $\mathfrak{L}$ gegeben, und zwar habe man $x_i \to \lambda_i$ $(\lambda_i \in \mathfrak{L})$; $\varrho_{i1}, \ldots, \varrho_{in_i}$ seien die Indizes ϱ, zu denen es mindestens ein σ gibt, derart, daß der Wert von λ_i in $B_{\varrho\sigma}$ negativ wird. Dann kann der Wert des Bildelements λ eines $p(x) \in \mathfrak{P}_\omega$ nur dann in $B_{\varrho\sigma}$ negativ ausfallen, wenn ϱ der abzählbaren Menge $\{\ldots \varrho_{ik} \ldots\}$ $(i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, \ldots, n_i)$ angehört. Da aber überabzählbar viele Indizes ϱ existieren, denen Bewertungen $B_{\varrho\sigma}$ von $\mathfrak{L}$ entsprechen, folgt aus unserer letzten Bemerkung, daß die Bildelemente λ der $p(x)$ nicht den ganzen Körper $\mathfrak{L}$ erschöpfen können, wir haben es also bei E bestimmt mit *keinem Homomorphismus* zu tun. Es ist damit gezeigt, daß jeder Körperhomomorphismus von $\mathfrak{P}_\omega$ eine *algebraische* Erweiterung des identischen Körperhomomorphismus von $\mathfrak{K}$ sein muß. Es bleibt noch zu beweisen, daß $\mathfrak{P}_\omega$ ein Jacobsonscher Ring ist. Dazu bilden wir mit einer neuen Unbestimmten x den Ring $\mathfrak{P}_{\omega+1} = \mathfrak{P}_\omega[x]$. Da $\mathfrak{P}_{\omega+1}$ zu $\mathfrak{P}_\omega$ über $\mathfrak{K}$ isomorph ist, muß jeder Körperhomomorphismus $H_{\omega+1}$ von $\mathfrak{P}_{\omega+1}$ eine algebraische Erweiterung des identischen Homomorphismus von $\mathfrak{K}$ sein. Dann aber gilt ersichtlich das gleiche für die Verengung H_ω von $H_{\omega+1}$ auf $\mathfrak{P}_\omega$. Es ist also gleichzeitig mit $H_{\omega+1}$ stets auch H_ω ein Körper*homomorphismus* (nicht nur -endomorphismus), und Satz 2 zeigt sofort, daß $\mathfrak{P}_\omega$ tatsächlich ein Jacobsonscher Ring ist. —

Offenbar läßt sich ein Gegenstück zu Satz 4 für den allgemeinen Fall, daß die Menge der Elemente des Körpers $\mathfrak{K}$ und die Menge der adjungierten Unbestimmten x beliebige Mächtigkeiten besitzen, mühelos formulieren und beweisen. Doch würde es sich wohl nicht lohnen, darauf näher einzugehen. Hingegen ziehen wir aus unseren allgemeinen Nullstellenbetrachtungen und aus Satz 4 einige die Lösbarkeit von unendlich vielen simultanen algebraischen Gleichungen betreffende

[17]) Zur Konstruktion dieser Bewertungen vgl. z. B. W. Krull, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, IV. Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen, Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 766—773. Der negative Beweis für den algebraischen Charakter aller Körperhomomorphismen von $\mathfrak{K}(x_1, x_2, \cdots)$ bei überabzählbarem $\mathfrak{K}$ ist hier nur skizziert, weil später noch ein zweiter, positiver Beweis gegeben wird.

Folgerungen, die vor allem im Hinblick auf K. Dörge [1] von Interesse sein dürften. Es seien $p_\tau(x)$ unendlich (nicht notwendig abzählbar unendlich) viele Polynome aus $\mathfrak{P}_\omega = \mathfrak{K}[x_1, x_2, \ldots]$. Gefragt wird nach den Lösungen des Gleichungssystems

$$p_\tau(x) = 0. \tag{1}$$

Satz 5. a) *Das System* (1) *ist dann und nur dann in* $\mathfrak{K}$ *oder irgendeinem Oberkörper von* $\mathfrak{K}$ *lösbar, wenn jedes endliche Teilsystem eine in einem passenden algebraischen Oberkörper von* $\mathfrak{K}$ *liegende Lösung besitzt.* — b) *Ist* $\mathfrak{K}$ *überabzählbar, so ist* (1), *wenn überhaupt, stets in einem algebraischen Oberkörper von* $\mathfrak{K}$ *lösbar. Ist dagegen* $\mathfrak{K}$ *endlich oder abzählbar, so kann es vorkommen, daß zu* (1) *zwar in keinem algebraischen Oberkörper von* $\mathfrak{K}$, *wohl aber in einem passenden Oberkörper von positivem (eventuell unendlich großen) Transzendenzgrad eine Lösung existiert.*

Zunächst ist nämlich die Lösung von (1) gleichwertig mit der Bestimmung einer Nullstelle des Ideals $\mathfrak{a} = (\ldots p_\tau(x) \ldots)$ aus $\mathfrak{P}_\omega$. Eine solche existiert dann und nur dann, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{P}_\omega$, d. h. wenn $(p_{\tau_1}(x), \ldots, p_{\tau_m}(x)) \neq \mathfrak{P}_\omega$ für jedes Unterideal $(p_{\tau_1}(x), \ldots, p_{\tau_m}(x))$ von $\mathfrak{a}$. Ist ferner $(p_{\tau_1}(x), \ldots, p_{\tau_m}(x)) \neq \mathfrak{P}_\omega$, so ist das Gleichungssystem

$$p_{\tau_1}(x) = p_{\tau_2}(x) = \cdots = p_{\tau_m}(x)$$

in einem *algebraischen* Oberkörper von $\mathfrak{K}$ lösbar, weil $p_{\tau_i}(x) \in \mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_N]$ $(i = 1, \ldots, m)$ bei hinreichend großer Wahl von N, und weil für $\mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_N]$ der Hilbertsche Nullstellensatz gilt. Damit ist a) bereits bewiesen. Der Beweis von b) ergibt sich unmittelbar durch Anwendung von Satz 4. (Man wähle z. B. bei abzählbarem $\mathfrak{K}$ die $p_\tau(x)$ von (1) so, daß $(\ldots p_\tau(x) \ldots) = \mathfrak{m}$ ein maximales Primideal aus $\mathfrak{P}_\omega$ wird, das $\mathfrak{P}_\omega$ homomorph auf einen Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ abbildet, der über $\mathfrak{K}$ einen beliebig vorgeschriebenen Transzendenzgrad besitzt.)

Die Bemerkung, daß (1) dann und nur dann lösbar ist, wenn jedes endliche Teilsystem lösbar ist, findet sich (als Nebenergebnis allgemeiner Untersuchungen) bereits bei Dörge [18]. Hier kam es im wesentlichen auf die genaueren Aussagen über den Lösungskörper $\mathfrak{L}$ an. — Es soll jetzt noch ein zweiter, direkter Beweis für die Tatsache gegeben werden, daß bei überabzählbarem $\mathfrak{K}$ jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ aus $\mathfrak{P}_\omega$ mindestens eine algebraische Nullstelle besitzt. Dabei wird gleichzeitig der innere Grund für die auf den ersten Blick paradox erscheinende Vorzugsstellung der überabzählbaren Körper sichtbar werden. Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\mathfrak{K}$ *algebraisch abgeschlossen* annehmen. Dann dient uns als Ausgangspunkt das folgende, leicht beweisbare

[18]) Vgl. die Einteilung und die Schlußbemerkung von Dörge [1]. Die Untersuchungen von § 3 entstanden größtenteils aus dem Bestreben heraus, die Tragweite der Aussage von Satz 18 a) genauer zu erfassen.

Lemma. *Ist $\mathfrak{K}_0$ ein beliebiger abzählbarer Unterkörper des überabzählbaren, algebraisch abgeschlossenen Körpers $\mathfrak{K}$, und bedeutet $\mathfrak{L}_1$ einen beliebigen, abzählbaren Oberkörper von $\mathfrak{K}_0$, so gibt es in $\mathfrak{K}$ stets einen zu $\mathfrak{L}_1$ über $\mathfrak{K}_0$ isomorphen Unterkörper $\mathfrak{K}_1$* [19]).

Die Anwendung des Lemmas auf unser Problem wiederum ermöglicht der

Hilfssatz. *In $\mathfrak{P}_\omega$ besitzt (bei beliebigem $\mathfrak{K}$) jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eine höchstens abzählbare Basis $(q_1(x), q_2(x), \ldots)$.*

In der Tat, setzen wir $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_i]$, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dann hat jedes $\mathfrak{a}_i$ eine endliche Basis $q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{im_i}$, und es ist klar, daß die abzählbar unendlich vielen q_{ik} $(i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, \ldots, m_i)$ zusammengenommen eine Basis von $\mathfrak{a}$ bilden. — Es sei nun (bei überabzählbarem, algebraisch abgeschlossenem $\mathfrak{K}$) $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{P}_\omega$ ein fest gegebenes Ideal aus $\mathfrak{P}_\omega$ mit der abzählbaren Basis $(q_1(x), q_2(x), \ldots)$. Dann brauchen wir nur zu zeigen, daß das Gleichungssystem

$$q_1(x) = q_2(x) = \cdots = 0 \tag{2}$$

mindestens eine in $\mathfrak{K}$ liegende Lösung $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ besitzt. Ist nämlich eine solche Lösung bekannt, so definiert die Zuordnung $p(x) \to p(\xi)$ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{P}_\omega$ auf $\mathfrak{K}$, bei der $a(\xi) \to 0$ für jedes $a(x) \in \mathfrak{a}$. Um nun (2) in der gewünschten Weise zu lösen, bilden wir den kleinsten, sicher höchstens abzählbaren Körper $\mathfrak{K}_0$, der alle Koeffizienten aller $q_i(x)$ enthält und betrachten im Polynomring $\mathfrak{P}_\omega^{(0)} = \mathfrak{K}_0[x_1, x_2, \ldots]$ das Ideal $\mathfrak{a}^{(0)} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{P}_\omega^{(0)}$ mit der Basis $(q_1(x), q_2(x), \ldots)$. Wegen $\mathfrak{a}^{(0)} \neq \mathfrak{P}_\omega^{(0)}$ gibt es zu $\mathfrak{a}^{(0)}$ mindestens ein maximales Primoberideal $\mathfrak{m}^{(0)}$ und damit einen Homomorphismus $H^{(0)}$ von $\mathfrak{P}_\omega^{(0)}$ auf einen, notwendig abzählbaren Oberkörper $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}_0$ derart, daß $l_i(x) \to 0$, oder anders ausgedrückt, daß $l_i(\xi) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, falls $x_k \to \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Nach dem Lemma dürfen wir nun — und das ist der entscheidende Punkt — $\mathfrak{K}_1$ als Unterkörper von $\mathfrak{K}$ annehmen; dann aber haben wir in Gestalt von $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ bereits die gewünschte Lösung von (2) gefunden.

Um die Tragweite des gewonnenen Resultats herauszuarbeiten, denken wir uns eine wohlgeordnete Kette von abzählbaren, algebraisch abgeschlossenen Körpern $\mathfrak{K}_\tau$ so gegeben, daß $\mathfrak{K}_{\tau_1} \subset \mathfrak{K}_{\tau_2}$, falls $\tau_1 < \tau_2$, und daß der Vereinigungskörper $\mathfrak{K}$ aller $\mathfrak{K}_\tau$ überabzählbar wird. Setzen wir dann noch $\mathfrak{P}_\omega^{(\tau)} = \mathfrak{K}_\tau[x_1, x_2, \ldots]$, und richten wir unser Augenmerk auf die maximalen Primideale $\mathfrak{m}_\sigma^{(\tau)}$ der $\mathfrak{P}_\omega^{(\tau)}$ und ihre zugehörigen Homomorphismen $H_\sigma^{(\tau)}$, so können wir feststellen: Einerseits führen die $H_\sigma^{(\tau)}$ nicht aus der Kette der $\mathfrak{K}_\tau$ heraus insofern, als jeder $H_{\sigma_1}^{(\tau_1)}$, den Ring $\mathfrak{P}_\omega^{(\tau_1)}$ homomorph auf einen Unterkörper eines passenden $\mathfrak{K}_{\tau_2}$ $(\tau_2 \geq \tau_1)$ abbildet. Andererseits ist die Kette der $\mathfrak{K}_\tau$ hinsichtlich der Anwendung

[19]) Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf die Bemerkung, daß man in $\mathfrak{L}_1$ ein abzählbares System von über $\mathfrak{K}_0$ unabhängigen Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ so bestimmen kann, daß $\mathfrak{L}_1$ über $\mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{K}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ algebraisch wird.

der $H_\sigma^{(\tau)}$ offen, d. h. es existiert zu jedem Körperpaar $\mathfrak{K}_{\tau_1}, \mathfrak{K}_{\tau_2}$ $(\tau_2 > \tau_1)$ ein $H_{\sigma_1}^{(\tau_1)}$, der $\mathfrak{P}_\omega^{(\tau_1)}$ auf $\mathfrak{K}_{\tau_2}$ abbildet. — Gehen wir nun aber *zur Grenze über*, indem wir den Vereinigungskörper $\mathfrak{K}$ aller $\mathfrak{K}_\tau$ bilden, so *schließt sich die Kette.* Die Homomorphismen H_σ von $\mathfrak{P}_\omega = \mathfrak{K}[x_1, x_2, \ldots]$ führen nicht mehr über $\mathfrak{K}$ hinaus, weil (kurz gesagt) auf Grund des Lemmas und des Hilfssatzes die Bildung jedes H_σ auf die Bildung eines passenden $H_\sigma^{(\tau)}$ reduziert werden kann. Man kommt also in unserem Falle von arithmetisch unbefriedigenden Sätzen (in den Ringen $\mathfrak{P}_\omega^{(\tau)}$) zu arithmetisch befriedigenden Sätzen (im Ringe $\mathfrak{P}_\omega$) durch einen *Grenzübergang*, — eine der modernen Algebra geläufige Erscheinung. Das Reizvolle in dem vorliegenden Beispiel ist uns die Tatsache, daß der nötige Grenzübergang diesmal letzten Endes einfach in der Bildung der oberen Grenze aller Zahlen der zweiten Zahlklasse besteht.

§ 4.

Noethersche Ringe.

Im folgenden sollen die *Noetherschen Ringe* (Ringe mit *Maximalbedingung*), die gleichzeitig Jacobsonsche Ringe sind, genauer charakterisiert werden. Dabei erhalten wir in Gestalt von Satz 6 ein Theorem, das über den Zusammenhang, in dem es bewiesen wird, hinaus selbständige Bedeutung besitzt. Unser Haupthilfsmittel bei allen Überlegungen ist die bekannte Dimensionstheorie der Primideale eines Noetherschen Ringes, deren Grunddefinitionen hier, vor allem auch mit Rücksicht auf spätere Anwendungen in § 5, etwas schärfer formuliert werden sollen als gebräuchlich. Die Werte „unmittelbares Primideal", „unmittelbares Primoberideal", „Zwischenprimideal" haben bei uns den üblichen Sinn. Das $\mathfrak{a}$ enthaltende Primideal $\mathfrak{p}$ heißt *minimales Primoberideal von* $\mathfrak{a}$, wenn kein gleichfalls $\mathfrak{a}$ enthaltendes echtes Primunterideal von $\mathfrak{p}$ existiert. Andererseits wird ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus dem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ *in* $\mathfrak{J}$ *minimal* genannt, wenn $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ unmittelbares Primoberideal des Nullideals ist. Grundlegend für unsere Untersuchungen ist der

Hauptidealsatz. *Bei einem Noetherschen Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$ *ist jedes minimale Primoberideal* $\mathfrak{p}$ *eines Hauptideals* $(a) \neq (0)$ *in* $\mathfrak{J}$ *minimal*[20].

Unter einer *geschlossenen Primidealkette* mit dem Anfangsglied $\mathfrak{q}$ und dem Endglied $\mathfrak{p}$ von der *Länge* l verstehen wir eine Primoberidealkette $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 < \mathfrak{p}_1 < \cdots < \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}$, die nicht durch Einschaltung eines Zwischenglieds verlängert werden kann. Für Noethersche Ringe gilt der fundamentale

Längensatz. *Zu zwei beliebig vorgegebenen Primidealen* $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} > \mathfrak{q}$ *des Noetherschen Ringes* $\mathfrak{R}$ *gibt es stets geschlossene Primidealketten*

[20]) Zum Hauptidealsatz und Längensatz vgl. z. B. Krull [4].

mit dem Anfangsglied $\mathfrak{q}$ *und dem Endglied* $\mathfrak{p}$. *Die Längen aller dieser Ketten sind beschränkt.*

Wir definieren jetzt: Unter der $\mathfrak{p}$-*Maximaldimension* bzw. $\mathfrak{p}$-*Minimaldimension* des Primunterideals $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{p}$ soll das Maximum bzw. Minimum der geschlossenen, mit $\mathfrak{q}$ beginnenden und mit $\mathfrak{p}$ endigenden Primidealketten verstanden werden. Die Maximaldimension bzw. Minimaldimension von $\mathfrak{q}$ schlechtweg sei das Minimum bzw. die obere Grenze aller $\mathfrak{m}$-Maximal- bzw. $\mathfrak{m}$-Minimaldimensionen von $\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{m}$ beliebiges maximales Primoberideal von $\mathfrak{q}$). Man beachte, daß bei der Maximaldimension auch der „Wert" ∞ zum mindesten möglich ist, während die Minimaldimension wegen des Längensatzes immer endlich ist. Bei einem Primideal, bei dem Maximal- und Minimaldimension zusammenfallen, sprechen wir von der *Dimension* schlechthin. In diesem Sinne sind die nulldimensionalen Primideale, die Primideale von der Maximal- und die von der Minimaldimension 0 alle identisch mit den maximalen Ringprimidealen. In ähnlicher Weise sind die Primideale von der Maximaldimension 1 gleichzeitig eindimensional schlechthin und im übrigen dadurch gekennzeichnet, daß sie zwar echte Primoberideale besitzen, aber nur solche, die im Ringe maximal sind. Dagegen können Primideale von der Minimaldimension 1 existieren, deren Maximaldimension größer als 1 ist. — Ein Integritätsbereich, in dem das Nullideal und damit jedes Primideal eine endliche Maximaldimension besitzt, möge kurz endlich-dimensional genannt werden. So gut wie alle praktisch wichtigen Noetherschen Integritätsbereiche sind endlich-dimensional. Unter einem *Noetherschen Normalring* wollen wir einen Noetherschen Integritätsbereich verstehen, in dem *jedes Primideal eine Dimension schlechthin* besitzt. Wegen der Endlichkeit der Minimaldimensionen ist jeder Noethersche Normalring endlich-dimensional. Seine Dimension möge gleich der seines Nullideals gesetzt werden. — Wir beweisen nun zunächst den

Hilfssatz. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein nichtminimales Primideal aus dem Noetherschen Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$, *so ist stets* (0) *Durchschnitt von in* $\mathfrak{J}$ *minimalen Primunteridealen von* $\mathfrak{p}$.

Es seien nämlich $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l$ endlich viele in $\mathfrak{p}$ enthaltene, in $\mathfrak{J}$ minimale Primideale. Dann kann man wegen $\mathfrak{p} > \mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ nach einer bekannten Konstruktion stets ein Element a finden, das zwar zu $\mathfrak{p}$, aber zu keinem $\mathfrak{q}_i$ gehört. Nach dem Hauptidealsatz sind die endlich vielen minimalen Primoberideale von (a) alle in $\mathfrak{J}$ minimal. Mindestens eines von ihnen, etwa $\mathfrak{q}_{l+1}$, muß wegen $(a) \leq \mathfrak{p}$ ein Unterideal von $\mathfrak{p}$ sein, und wegen $a \bar{\in} \mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ ist $\mathfrak{q}_{l+1}$ von $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_l$ verschieden.

Es gibt also sicher *unendlich viele*, in $\mathfrak{p}$ enthaltene, in $\mathfrak{J}$ minimale Primideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$. Wäre ihr Durchschnitt $\mathfrak{d}$ von (0) verschieden, wären alle $\mathfrak{q}_i$ minimale Primoberideale von $\mathfrak{d}$ im Widerspruch zu der Tatsache, daß in dem Noetherschen Ringe $\mathfrak{J}$ jedes Ideal nur endlich

viele minimale Primoberideale besitzt. Aus dem Hilfssatz und dem Längensatz zusammengenommen folgt leicht der für uns grundlegende

Satz 6. *In einem* Noetherschen *Ringe* $\mathfrak{R}$ *ist jedes echte Primunterideal* $\mathfrak{q}$ *eines beliebigen Primideals* $\mathfrak{p}$ *Durchschnitt von unmittelbaren Primunteridealen von* $\mathfrak{p}$.

Da gleichzeitig mit $\mathfrak{q}$ auch $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ ein Noetherscher Ring ist, dürfen wir beim Beweise $\mathfrak{q} = (0)$ annehmen. Hat nun (0) die $\mathfrak{p}$ Maximaldimension 1, ist also (0) unmittelbares Primunterideal von $\mathfrak{p}$, so ist Satz 6 richtig. Wir brauchen also nur noch die Gültigkeit von Satz 6 für ein Nullideal der $\mathfrak{p}$-Maximaldimension $d \geq 2$ zu zeigen unter der Voraussetzung, daß der Satz für alle Primideale $\mathfrak{q}$ einer $\mathfrak{p}$-Maximaldimension $d' \leq d-1$ bereits bewiesen ist. Nach dem Hilfssatz kann nun das betrachtete Nullideal als Durchschnitt von ringminimalen und damit *echten* Primunteridealen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ von $\mathfrak{p}$ dargestellt werden. Wegen $(0) < \mathfrak{q}_i$ ist weiter bei jedem $\mathfrak{q}_i$ die $\mathfrak{p}$-Maximaldimension d_i' höchstens gleich $d-1$. Wir haben daher für jedes $\mathfrak{q}_i$ nach Induktionsannahme eine Durchschnittsdarstellung $\mathfrak{q}_i = \bigcap_\sigma \mathfrak{p}_{i\sigma}$, bei der die $\mathfrak{p}_{i\sigma}$ unmittelbare Primunterideale von $\mathfrak{p}$ sind, und aus $(0) = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}_i = \bigcap_\sigma \mathfrak{p}_{i\sigma}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ folgt sofort $(0) = \bigcap_{i,\sigma} \mathfrak{p}_{i\sigma}$. — Es sei noch hervorgehoben, daß aus unserem Beweis mühelos die Tatsache entnommen werden kann, daß man bei der Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{q}$ immer mit höchstens *abzählbar* unendlich vielen unmittelbaren Primunteridealen von $\mathfrak{p}$ auskommt. — Aus Satz 6 folgt sofort eine Reihe von Bedingungen dafür, daß ein Noetherscher Ring Jacobsonsch ist:

Satz 7. a) *Der* Noethersche *Ring* $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann* Jacobsonsch, *wenn jedes Primideal von der Minimaldimension* 1 *als Durchschnitt von maximalen Primidealen darstellbar ist.* — b) $\mathfrak{R}$ *ist sicher ein* Jacobsonscher *Ring, wenn jedes Primideal von der Minimaldimension* 1 *unendlich viele unmittelbare, maximale Primoberideale besitzt.*

Satz 8. *Ein echter Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$, *bei dem für jeden echten Restklassenring die Minimalbedingung erfüllt ist, ist dann und nur dann ein* Jacobsonscher *Ring, wenn in* $\mathfrak{J}$ *unendlich viele Primideale existieren.*

Satz 9. *Ein endlich-dimensionaler* Noetherscher *Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$ *ist dann und nur dann* Jacobsonsch, *wenn jedes eindimensionale Primideal unendlich viele maximale Primoberideale hat.*

Beweise. Satz 7 a) ist selbstverständlich, da nach Satz 6 jedes nichtmaximale Primideal in $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von Primidealen dargestellt werden kann, die alle unmittelbare Primunterideale eines festen maximalen Primideals $\mathfrak{m}$ sind und infolgedessen die Minimaldimension 1 besitzen. — Unter der Voraussetzung von Satz 7 b) existieren für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ von der Minimaldimension 1 im Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ unendlich viele gleichzeitig ringmaximale und ringminimale Primideale, und es muß nach dem beim Hilfssatz durchgeführten Schlusse der Durchschnitt aller dieser Primideale gleich dem Nullideal werden.

Es sind also in $\mathfrak{R}$ alle Primideale $\mathfrak{q}$ von der Minimaldimension 1 Durchschnitt von maximalen Primidealen und man kann Satz 7 a) anwenden. — Zum Beweise von Satz 8 braucht man nur zu beachten, daß ein Integritätsbereich der dort genannten Art ein Noetherscher Integritätsbereich ist, in dem das Nullideal die Dimension 1 hat, so daß im Falle der Existenz von unendlich vielen Primidealen auf Satz 7 b) zurückgegriffen werden kann. — Satz 9 schließlich kann durch einen leichten Induktionsschluß gewonnen werden. Die Behauptung, bei der es allein auf das „dann" ankommt, ist nach Satz 8 richtig, wenn das Nullideal von $\mathfrak{J}$ die Maximaldimension 1 hat. Hat nun das Nullideal in $\mathfrak{J}$ eine Maximaldimension $d > 2$, so ist in $\mathfrak{J}$ nach dem Hilfssatz (0) Durchschnitt von minimalen Ringprimidealen, und so bleibt daher nur zu zeigen, daß in $\mathfrak{J}$ unter der Voraussetzung von Satz 9 jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ Durchschnitt von maximalen Primoberidealen wird. Die Richtigkeit dieser Tatsache darf aber vorausgesetzt werden, da $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}$ einen Noetherschen Integritätsbereich darstellt, dessen Nullideal eine Maximaldimension $d' \leq d - 1$ besitzt[21]).

§ 5.

Drei Gegenbeispiele.

Im folgenden konstruieren wir zunächst einen *Noetherschen Normalring $\mathfrak{R}$ der Dimension 2, der kein Jacobsonscher Ring ist*, weil in ihm ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ der Dimension 1 nur *ein* maximales Primoberideal $\mathfrak{m}$ hat, während alle übrigen eindimensionalen Primideale unendlich viele maximale Primoberideale besitzen. Da überdies $\mathfrak{R}$ ein Z. P. E.-Ring (Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung der Elemente) ist, also auch im Sinne der Idealtheorie eine denkbar einfache Struktur hat, zeigt uns der Modellring $\mathfrak{R}$, daß bei den endlich-dimensionalen Noetherschen Integritätsbereichen über Satz 9 von § 4 hinaus keine genauere axiomatische Charakterisierung der Jacobsonschen Ringe möglich sein dürfte. — An zweiter Stelle bilden wir einen *endlichdimensionalen, gleichzeitig Noetherschen und Jacobsonschen Oberring $\mathfrak{R}'$ eines Körpers $\mathfrak{K}$, für den der Hilbertsche Nullstellensatz nicht gilt*[4]), weil ein maximales Primideal in $\mathfrak{R}'$ existiert, das eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}'$ auf einen einfach transzendenten Oberkörper von $\mathfrak{K}$ bestimmt. — Schließlich geben wir die ganzen Zahlen n, m, d_i $(i = 1, \ldots, n;\ 0 < d_i < n - 1)$ willkürlich vor und konstruieren einen Noetherschen Normalring $\mathfrak{R}''$ der Dimension n, in dem das Jacobsonsche Ringradikal im Sinne von § 1 der Durchschnitt von genau m

[21]) Die Heranziehung von Satz 4 aus Goldman [2] würde den Beweis von Satz 9 nicht wesentlich vereinfachen. Man beachte, daß Satz 7 und 9 ziemlich triviale Folgerungen aus dem (wegen der notwendigen Fundierung auf dem Hauptidealsatz nicht trivalen) Satz 6 sind.

gegenseitig primen Primidealen $\mathfrak{p}_i$ der Dimension d_i wird. Damit ist dann gezeigt: *Es ist in einem* Noetherschen *Ringe* $\mathfrak{R}$ *nicht möglich, hinsichtlich des Ringradikals* $\mathfrak{r}$ *Aussagen zu machen, die über die triviale Bemerkung,* $\mathfrak{r}$ *sei der Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, hinausgehen*[22].

1. Konstruktion des Modellringes $\mathfrak{R}$. Es sei $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}[x, y]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten x, y über einem abzählbaren, algebraisch abgeschlossenen Körper K. Ein von $\mathfrak{p}$ abhängiges bzw. von $\mathfrak{p}$ freies Polynom $p(x, y)$ aus $\mathfrak{J}$ möge *normiert* genannt werden, wenn der Koeffizient der höchsten, in $p(x, y)$ wirklich auftretenden y- bzw. x-Potenz gleich 1 ist. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ seien die irgendwie abgezählten, von 0 verschiedenen Elemente aus K. Entsprechend sollen

$$\{p_1(x, y), q_1(x, y)\}, \quad \{p_2(x, y), q_2(x, y)\}, \ldots$$

diejenigen irgendwie abgezählten Paare normierter Polynome aus $\mathfrak{J}$ bedeuten, bei denen $p_i(x, y)$ über K irreduzibel und von x verschieden, $q_i(x, y)$ durch $p_i(x, y)$ unteilbar ist[23]. Wir zeigen nun zunächst: Es kann eine unendliche Doppelfolge

$$\{l_i(x, y) = \xi_i x + y + c_i, \mathfrak{m}_i = (x - d_i, y - \beta_i)\}$$

von je einem linearen Polynom und einem maximalen Primideal aus $\mathfrak{J}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ so bestimmt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. Ist (bei festen i für irgendein k) $p_i(x, y) = l_k(x, y)$, so ist $\mathfrak{m}_i = (x, y)$. 2. Ist $p_i(x, y) \neq l_k(x, y)$ für alle k, so ist

$$\alpha_i \neq 0, \quad p_i(x, y) \in \mathfrak{m}_i, \quad q_i(x, y) \bar{\in} \mathfrak{m}_i.$$

3. $l(\alpha_k, \beta_k) \neq 0$ für alle k. — Unsere Doppelfolge $\{l_i(x, y), \mathfrak{m}_i\}$ genügt offenbar den Bedingungen 1., 2., 3. für alle i, k, wenn jede Teilfolge $\{l_i(x, y), \mathfrak{m}_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ „zulässig ist", d. h. den Bedingungen 1., 2., 3. für alle $i \leq n, k < n$ genügt. Zum Existenzbeweis hat man daher nur zu zeigen: Ist eine zulässige Teilfolge $\{l_i(x, y), \mathfrak{m}_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ bereits bekannt $(n > 0)$, so kann aus ihr durch Zufügung eines passenden $l_{n+1}(x, y)$ und eines passenden $\mathfrak{m}_{n+1}$ wieder eine zulässige Teilfolge gewonnen werden. Die Konstruktion von $l_{n+1}(x, y)$ und $\mathfrak{m}_{n+1}$ aber läßt sich stets nach folgendem Schema durchführen: Ist $p_{n+1}(x, y) = l_k(x, y)$ für irgendein $k < n$, so setze man $\mathfrak{m}_{n+1} = (x, y)$. Ist dagegen

$$p_{n+1}(x, y) \neq l_k(x, y) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

[22]) Vgl. hierzu Krull [5], Beispiel zu Beginn von § 2 und Anm. [10]) und [19]). Unser drittes Beispiel beantwortet geradezu für Noethersche Ringe die in [19]) aufgeworfene Frage. Die „systematische Konstruktionsmethode", auf die in [10]) hingewiesen wird, ist nichts anderes als die Bildung passender Quotientenringe von Polynomringen, mit deren Hilfe alle drei Beispiele unseres Paragraphen gewonnen werden.

[23]) Man beachte, daß jedes feste, normierte, irreduzible Polynom $p(x) \neq x$ in der Reihe der $p_i(x)$ unendlich oft vorkommt!

so wähle man $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ so, daß

$$r_{n+1}(x, y) = x \cdot q_{n+1}(x, y) \cdot \prod_{k=1}^{n} l_k(x, y)$$

für $x = \alpha_{n+1}, y = \beta_{n+1}$ nicht verschwindet, wohl aber

$$p_{n+1}(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) = 0$$

wird. Diese Bedingungen sind angesichts der algebraischen Abgeschlossenheit von K sicher erfüllbar, weil unter unseren Voraussetzungen $p_{n+1}(x, y)$ zu $r_{n+1}(x, y)$ faktorfremd ist. Nach der Festlegung von $\mathfrak{m}_{n+1} = (x - \alpha_{n+1}, y - \beta_{n+1})$ bestimme man schließlich ξ_{n+1} so, daß für $l_{n+1}(x, y) = \xi_{n+1} x + y + c_{n+1}$ die Ungleichungen

$$l_{n+1}(x, y) \neq p_k(x, y), \; l_{n+1}(\alpha_k, \beta_k) \neq 0 \qquad (k = 1, \ldots, n+1)$$

gelten. Die Möglichkeit einer solchen Wahl von ξ_{n+1} ergibt sich sofort aus der Bemerkung, daß stets entweder $\alpha_k \neq 0$ oder $\alpha_k = \beta_k = 0$ und damit $l_{n+1}(\alpha_k, \beta_k) = c_{n+1} \neq 0$ ist.

Wir arbeiten jetzt weiter mit einer festen, unseren Forderungen 1., 2., 3. genügenden Doppelfolge $\{l_i(x, y), \mathfrak{m}_i\}$. Es sei S das kleinste multiplikativ abgeschlossene System aus $\mathfrak{J}$, das 1 und die sämtlichen Linearpolynome $l_i(x, y)$ enthält. Für unseren *Modellring* $\mathfrak{R}$ wählen wir dann den zu S gehörigen Quotientenring von $\mathfrak{J}$, also den Ring aller Polynomquotienten

$$\frac{a(x, y)}{m(x, y)} \qquad (a(x, y) \in \mathfrak{J};\; m(x, y) \in S).$$

Aus der bekannten Theorie der Quotientenringe[24]) ergibt sich dann zunächst sofort:

$\mathfrak{R}$ ist ebenso wie $\mathfrak{J}$ ein Noetherscher Ring und ein Ring mit Z. P. E. (eindeutiger Primelementzerlegung seiner Elemente). Die Primideale von $\mathfrak{R}$ entsprechen umkehrbar eindeutig denjenigen Primidealen aus $\mathfrak{J}$, die kein $\mathfrak{m}(x, y) \in S$ enthalten. Es gibt also in $\mathfrak{R}$ ebenso wie in $\mathfrak{J}$ außer 0 nur Primideale der Form $(x - \alpha, y - \beta)$, die sicher nulldimensional sind und Primhauptideale, deren Dimension jedenfalls nicht größer sein kann als die Dimension 1, die allen Primhauptidealen von $\mathfrak{J}$ zukommt. — Aus der speziellen Konstruktion von $\mathfrak{R}$ folgt weiter der für uns entscheidende

Satz. *Alle Primhauptideale aus $\mathfrak{R}$ sind total eindimensional, das Nullideal besitzt dementsprechend gleichzeitig die Maximal- und die Minimaldimension 2. Alle von (x) verschiedenen Primhauptideale sind, ebenso wie das Nullideal, als Durchschnitte von maximalen Ringprimidealen darstellbar. Das Hauptideal (x) dagegen besitzt das einzige maximale Primoberideal (x, y).*

---

[24]) Zur Theorie der Quotientenringe vgl. hier und im folgenden Krull [2], Nr. 7.

Zum Beweis hat man nur zu beachten: a) Es gibt in $\mathfrak{R}$ unendlich viele Primhauptideale. Sie entsprechen eindeutig umkehrbar dem Polynom x und denjenigen $p_i(x, y)$, die von allen $l_k(x, y)$ verschieden sind. Wegen der unendlichen Anzahl der Primhauptideale ist ihr Durchschnitt gleich dem Nullideal. b) Da $l_k(0, 0) = c_k \neq 0$ für alle k, ist (x, y) in $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{R}$ selbst verschieden und damit ein maximales Primoberideal von (x). In $\mathfrak{J}$ besitzt jedes von (x, y) verschiedene maximale Primoberideal von (x) die Gestalt $(x, y - c_k)$; wegen $l_k(x) \in (x, y - c_k)$ wird in $\mathfrak{R}$ für alle k stets $(x, y - c_k) = \mathfrak{R}$. Es ist also (x, y) in $\mathfrak{R}$ das einzige maximale Primoberideal von (x). c) Es sei $\mathfrak{p} = (p_{i_0}(x, y))$ ein von (x) verschiedenes Primhauptideal aus $\mathfrak{R}$, $q(x, y)$ sei irgendein normiertes durch $p_{i_0}(x, y)$ in $\mathfrak{J}$ unteilbares und damit nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Polynom. Dann wird $p_{i_0}(x, y) = p_i(x, y) \cdot q(x, y) = q_i(x, y)$ für ein passendes i, und man hat nach Konstruktion von $\mathfrak{m}_i = (x - \alpha_i, y - \beta_i)$ sicher $p_i(x, y) \in (x - \alpha_i, y - \beta_i)$, $q_i(x, y) \overline{\in} (x - \alpha_i, y - \beta_i)$ in $\mathfrak{J}$. Wegen $l_k(x, y) \overline{\in} (x - \alpha_i, y - \beta_i)$ bleiben diese Beziehungen aber auch für $\mathfrak{R}$ gültig, es wird also $(x - \alpha_i, y - \beta_i)$ in $\mathfrak{R}$ ein maximales Primoberideal von $\mathfrak{p} = (p_{i_0}(x, y))$, das $q(x, y)$ nicht enthält. In dem (in $\mathfrak{R}$ gebildeten) Durchschnitt $\mathfrak{d}$ aller maximalen Primoberideale von $\mathfrak{p}$ kann also kein nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Polynom $q(x, y)$ liegen, und daraus folgt sofort $\mathfrak{p} = \mathfrak{d}$. — Der Modellring $\mathfrak{R}$ besitzt also tatsächlich alle Eigenschaften, die im Einleitungsabschnitt von § 4 angegeben werden.

2. Aus dem Ring $\mathfrak{R}$ bilden wir weiter den Ring $\mathfrak{R}'$ aller Quotienten $\frac{\varrho(x, y)}{y^n}$ $(\varrho(x, y) \in \mathfrak{R})$. Dann ist $\mathfrak{R}'$ ebenso wie $\mathfrak{R}$ ein Noetherscher Z. P. E.-Ring, dessen von (0) verschiedene Primideale entweder die Gestalt $(x - \alpha, y - \beta)$ oder die Gestalt $(p(x, y))$ besitzen. Weiter erhält man offenbar alle Primhauptideale aus $\mathfrak{R}'$, wenn man für $p(x, y)$ einerseits x, andererseits alle von y und den sämtlichen $l_k(x, y)$ verschiedenen $p_i(x, y)$ einsetzt. Schließlich ist (x) in $\mathfrak{R}'$ maximal, weil das einzige echte Primoberideal, das (x) in $\mathfrak{R}$ besaß, nämlich (x, y), in $\mathfrak{R}'$ verloren geht $((x, y) \cdot \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}')$. $\mathfrak{R}'/(x)$ wird also ein Körper, und zwar ist dieser Körper ersichtlich zu $\mathfrak{K}(y)$ isomorph. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{R}'$ ein Jacobsonscher Ring ist, und dazu ist wegen Satz 9 aus § 3 bloß nachzuweisen, daß jedes Primhauptideal $(p_i(x, y))$ mit $p_i(x, y) \neq y$ nicht nur in $\mathfrak{R}$, sondern auch in $\mathfrak{R}'$ unendlich viele Primoberideale der Form $(x - \alpha, y - \beta)$ besitzt. Wäre aber diese Bedingung für ein bestimmtes $p_{i_0}(x, y) \neq y$ nicht erfüllt, so müßten in $\mathfrak{R}$ fast alle maximalen Primoberideale von $(p_{i_0}(x, y))$ das Element y enthalten, und daraus folgte sofort der Widerspruch, daß in $\mathfrak{R}$ der Durchschnitt aller maximalen Primoberideale von $(p_{i_0}(x, y))$ nicht gleich $(p_{i_0}(x, y))$ sein könnte. — $\mathfrak{R}'$ ist also tatsächlich ein Jacobsonscher Ring.

3. Es sei $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in n Unbestimmten über einem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ seien paarweise

prime Primideale aus $\mathfrak{J}$ von den Dimensionen d_i, und es werde $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m$ gesetzt. S'' sei das multiplikativ abgeschlossene System aller der $p(x) \in \mathfrak{J}$, die in keinem einzigen maximalen Primoberideal von $\mathfrak{r}$ liegen, und es bedeute $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{J}_{S''}$ den zu S'' gehörigen Quotientenring von $\mathfrak{J}$. — Dann ist zunächst (wie in den Fällen 1. und 2.) $\mathfrak{R}''$ ebenso wie $\mathfrak{J}$ ein Noetherscher Ring mit Z. P. E. Weiter sieht man leicht: Die Primideale von $\mathfrak{R}''$ entsprechen umkehrbar eindeutig denjenigen Primidealen von $\mathfrak{J}$, die in mindestens einem maximalen Primideal von $\mathfrak{r}$ enthalten sind. Ist nämlich das $\mathfrak{J}$-Primideal $\mathfrak{p}$ Unterideal des maximalen Primoberideals $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{p}$ zu S'' elementefremd und man hat $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}'' = \mathfrak{p}'' \neq \mathfrak{R}''$, $\mathfrak{p}'' \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{p}$. Hat dagegen $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{r}$ kein maximales Primoberideal gemein, so wird $\mathfrak{p} + \mathfrak{r} = \mathfrak{J}$, es gilt also eine Gleichung $p(x, y) + r(x, y) = 1$ $(p(x, y) \in \mathfrak{p},\ r(x, y) \in \mathfrak{r})$, bei der $p(x, y)$ notwendig zu S'' gehört, und es muß daher $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}''$ sein.

Aus unserem letzten Resultat folgt insbesondere, daß jedes in $\mathfrak{R}''$ maximale Primideal Erweiterungsideal eines in $\mathfrak{J}$ maximalen Primideals ist, und daraus schließt man mühelos, daß $\mathfrak{R}''$ ebenso wie $\mathfrak{J}$ ein Noetherscher *Normalring* von der Dimension n sein muß. Durchläuft schließlich $\mathfrak{m}_\tau''$ mit variierendem τ alle maximalen Primoberideale von

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{p}_1'' \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m'' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}'' \qquad (\mathfrak{p}_i'' = \mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{R}),$$

so durchläuft $\mathfrak{m}_\tau = \mathfrak{m}_\tau'' \cap \mathfrak{J}$ alle maximalen Primoberideale von $\mathfrak{r}$ und angesichts des zwischen $\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{J}$ bestehenden Zusammenhanges erhält man unter Berücksichtigung des Jacobsonschen Charakters von $\mathfrak{J}$ sofort:

$$\bigcap_\tau \mathfrak{m}_\tau'' = \bigcap_\tau [(\mathfrak{m}_\tau'' \cap \mathfrak{J}) \cdot \mathfrak{R}''] = [\bigcap_\tau (\mathfrak{m}_\tau'' \cap \mathfrak{J})] \cdot \mathfrak{R}'' = [\bigcap_\tau \mathfrak{m}_\tau] \cdot \mathfrak{R}'' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{R}'' = \mathfrak{r}''.$$

Es hat also auch der Modellring $\mathfrak{R}''$ alle im Einleitungsabschnitt geforderten Eigenschaften. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, daß alle drei Modellringe aus dem denkbar einfachsten Ringtypus, nämlich dem Polynomring, durch den elementaren Prozeß der Quotientenringbildung gewonnen werden konnten.

§ 6.

Polynomringe über Noetherschen Ringen (Dimensionstheorie).

Bei einem endlich-dimensionalen Noetherschen Ringe $\mathfrak{R}$ besagt nach Satz 9 die Behauptung „gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ ist stets auch $\mathfrak{R}[x]$ ein Jacobsonscher Ring" genau so viel wie „hat in $\mathfrak{R}$ jedes eindimensionale Primoberideal unendlich viele Primoberideale, so gilt das gleiche für $\mathfrak{R}[x]$". An diese Feststellung anknüpfend kann man allgemein fragen: Welche Aussagen lassen sich bei einem endlich-dimensionalen Noetherschen Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ über die Primideale aus $\mathfrak{R}[x]$ und ihre Beziehungen zu den Primidealen von $\mathfrak{R}$ machen? Mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ bezeichnen wir Primideale aus $\mathfrak{R}$. Unter $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_{x0}$, $\mathfrak{p}_{x1}$, ... $(\mathfrak{p}_x'$, $\mathfrak{p}_{x0}'$, $\mathfrak{p}_{x1}'$, ...

usw.) verstehen wir Primideale aus $\mathfrak{R}[x]$, die über dem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}'$ usw.) liegen, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{R}$ also gleich $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}'$ usw.) wird. Es gilt dann zunächst für einen beliebigen Ausgangsring $\mathfrak{R}$:

Satz 10. *Das kleinste über dem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ liegende $\mathfrak{R}[x]$-Primideal ist $\mathfrak{p}_{x0} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}[x]$. Außer $\mathfrak{p}_{x0}$ gibt es in $\mathfrak{R}[x]$ stets unendlich viele weitere über $\mathfrak{p}$ liegende Primideale $\mathfrak{p}_{x\iota}$. Die $\mathfrak{p}_{x\iota}$ sind paarweise prim und unmittelbare Primoberideale von $\mathfrak{p}_{x0}$.*

Der erste Teil von Satz 10 ist so gut wie selbstverständlich. Um die Richtigkeit des zweiten einzusehen, bedenke man zunächst: Bei der Bestimmung der von $\mathfrak{p}_{x0}$ verschiedenen über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideale $\mathfrak{p}_x$ darf man die Untersuchung von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}[x]$ nach $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$, $\mathfrak{R}[x]/\mathfrak{p}_{x0}$ verlegen und dabei $\mathfrak{R}[x]/\mathfrak{p}_{x0}$ als einfach transzendente Ringerweiterung von $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ durch die Restklasse $x + \mathfrak{p}_{x0}$ auffassen. Da in $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ dem Primideal $\mathfrak{p}$ das Nullideal entspricht, haben wir also das Resultat: Die zweite Hälfte von Satz 10 braucht nur für $\mathfrak{p} = (0)$ bewiesen zu werden. In diesem Falle aber gilt das scharfe, die Behauptung von Satz 10 einschließende Theorem:

Satz 11. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$. Dann entsprechen die Primhauptideale $(\mathfrak{p}_r(x)) \cdot \mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{K}[x]$ durch die Zuordnung von Verengungs- und Erweiterungsideal umkehrbar eindeutig den über $\mathfrak{p} = (0)$ liegenden Primidealen $\mathfrak{p}_x$ aus $\mathfrak{R}[x]$*[25]).

Satz 11 folgt mühelos aus der bereits in § 4 benutzten allgemeinen Theorie der Quotientenringe. Man beachte, daß $\mathfrak{K}[x]$ nichts anderes ist als der durch das multiplikativ abgeschlossene System S aller von 0 verschiedenen $\mathfrak{R}$-Elemente definierte Quotientenring von $\mathfrak{R}[x]$. — Auf Satz 11 stützt sich das folgende Theorem, bei dem wir zum ersten Male die Voraussetzung benützen, daß $\mathfrak{R}$ ein Noetherscher Ring ist:

Satz 12. *Ist in dem Noetherschen Ringe $\mathfrak{R}$ das Primideal $\mathfrak{p}'$ unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$, so kann in $\mathfrak{R}[x]$ niemals $\mathfrak{p}'_{x0}$ Oberideal eines von $\mathfrak{p}_{x0}$ verschiedenen $\mathfrak{p}_x$ sein.*

Zum Beweise betrachten wir in $\mathfrak{R}[x]$ neben $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{p}'_{x0}$ das echte Primoberideal $\mathfrak{p}'_{x1} = \mathfrak{p}'_{x0} + x \cdot \mathfrak{R}[x]$ von $\mathfrak{p}'_{x0}$. Es sei unter der Annahme $\mathfrak{p}'_{x0} > \mathfrak{p}_x$ das Primideal $\mathfrak{p}''_x$ irgendein echtes Zwischenprimideal zwischen $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{p}'_{x1}$, also $\mathfrak{p}_x < \mathfrak{p}''_x < \mathfrak{p}'_{x1}$. Dann ist $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}'' < \mathfrak{p}'$, man hat also, da $\mathfrak{p}'$ unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$ sein sollte, nur die beiden Möglichkeiten $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}'$. Wegen $\mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{p}_{x0}$ ist $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}$ nach Satz 10 ausgeschlossen. Es wird somit notwendig $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}'$ und aus $\mathfrak{p}'_x < \mathfrak{p}'_{x1}$, $\mathfrak{p}'_x \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}'_{x1} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}'$ folgt, wiederum nach Satz 10, sofort $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}'_{x0}$. Es ist also $\mathfrak{p}'_{x0}$ das einzige echte Zwischenprimideal. Diese Folgerung widerspricht aber dem fundamentalen Satz 6 (bzw. bereits dem „Hilfs-

[25]) Der offenbar von der Maximalbedingung unabhängige Satz 11 ist u. a. auch für den Beweis des verallgemeinerten Hilbertschen Nullstellensatzes wesentlich. Dementsprechend wird er auch in Goldman [1] ohne ausdrückliche Formulierung implizit benutzt.

satz“ von § 4). Die Ausgangsannahme $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}'_{x0}$ war also falsch. Mit Hilfe von Satz 12 zeigen wir weiter:

Satz 13. *Ist $\mathfrak{R}$ ein endlich-dimensionaler*[26]) *Noetherscher Ring, $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{R}$ von der Maximaldimension d, dann ist die Maximaldimension von $\mathfrak{p}_{x_0}$ genau gleich $d+1$, während für die Maximaldimension d_1 eines von $\mathfrak{p}_{x0}$ verschiedenen $\mathfrak{p}_{x1}$ immer die Ungleichung $d_1 \leq d$ gilt.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst: Ist $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}'' \subset \ldots \subset \mathfrak{p}^{(d)}$ eine Primoberidealkette mit dem Anfangsglied $\mathfrak{p}$ von der Länge d, so stellt $\mathfrak{p}_{x0} \subset \mathfrak{p}'_{x0} \subset \ldots \subset \mathfrak{p}^{(d)}_{x0} \subset (\mathfrak{p}'^{(d)}_{x0} + (x) \cdot \mathfrak{R}[x]) = \mathfrak{p}^{(d)}_{x1}$ eine mit $\mathfrak{p}_{x0}$ beginnende Primoberidealkette von der Länge $d+1$ dar. Für die Maximaldimension d_0 von $\mathfrak{p}_{x0}$ gilt daher sicher die Ungleichung $d_0 \geq d+1$ und es bleibt dementsprechend nur zu zeigen, daß immer $d_0 \leq d+1$, $d_1 \leq d$ sein muß. Ist nun $d = 0$, so folgt aus Satz 10 sofort $d_0 = 1 = d+1$, $d_1 = 0 = d$. Wir dürfen also den Beweis für ein festes d unter der Voraussetzung führen, daß für alle $d' \leq d$ die gewünschten Ungleichungen gelten. Es sei jetzt zuerst in $\mathfrak{R}[x]$ eine Primoberidealkette $\mathfrak{p}_{x1} \subset \mathfrak{p}'_x \subset \mathfrak{p}_x$ vorgelegt. Dann ist sicher $\mathfrak{p}' > \mathfrak{p}$ und wir haben zwei Unterfälle zu unterscheiden: a) $\mathfrak{p}'_x > \mathfrak{p}_{x0}$. Hier haben wir, da die Maximaldimension d' von $\mathfrak{p}'$ höchstens gleich $d-1$ sein kann, nach Induktionsvoraussetzung für die Maximaldimension d'_1 von $\mathfrak{p}'_x$ die Ungleichung $d'_1 \leq d-1$, woraus sich unmittelbar $d_1 \leq d$ ergibt. b) $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}'_{x0}$. Hier wissen wir nach Satz 12, daß $\mathfrak{p}'$ ein nicht unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$ darstellt. Die Maximaldimension von $\mathfrak{p}'$ ist also höchstens gleich $d-2$ und die Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert für die Maximaldimension d'_0 von $\mathfrak{p}'_{x0}$ die Beziehung $d'_0 \leq (d-2)+1 = d-1$, wir haben somit wieder $d_1 \leq d$. Damit ist die Ungleichung $d_1 \leq d$ gesichert. — Ist andererseits eine Primoberidealkette $\mathfrak{p}_{x0} \subset \mathfrak{p}'_x \subset \mathfrak{p}''_x \subset \ldots \subset \mathfrak{p}'^{(f)}_x$ gegeben, so hat man wieder zwei Möglichkeiten: a) $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}_{x1}$. Hier folgt aus $d_1 \leq d$ sofort $f \leq d+1$. b) $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. Hier liefert die Anwendung der Induktionsvoraussetzung in jedem Falle $d' \leq (d-1)+1 = d$ für die Maximaldimension d' von $\mathfrak{p}'_x$, man hat also auch dieses Mal $f \leq d+1$. Es muß somit $d_0 \leq d+1$ sein, und der Beweis von Satz 13 ist abgeschlossen.

Man beachte, daß bei unseren Überlegungen nicht von der Maximalbedingung, sondern nur von dem Inhalt des (allerdings mit Hilfe der Maximalbedingung gewonnenen) Satzes 12 Gebrauch gemacht wurde. *Satz 13 gilt also für jeden Ring $\mathfrak{R}$, für den Satz 12 richtig ist*, unab-

[26]) Die Endlichkeitsvoraussetzung wird hier und bei Satz 14 nur gemacht, um die Sonderbehandlung des trivialen Falles, daß $\mathfrak{p}_x \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}$ unendliche Maximaldimension hat, zu ersparen. Bei Satz 13 ist natürlich im Sonderfall für $\mathfrak{p}_{x1}$ überhaupt nichts zu beweisen, während sich für $\mathfrak{p}_{x0}$ die Maximaldimension unendlich ergibt. Bei Satz 14 zeigt man leicht, daß unter der Annahme des Jacobsonschen Charakters von $\mathfrak{R}$ im Sonderfall $\mathfrak{p}_{x1}$ immer die Maximaldimension unendlich haben muß.

hängig davon, ob $\mathfrak{R}$ einen NOETHERschen Ring darstellt oder nicht. Auf der anderen Seite ist sofort zu sehen, daß Satz 12 bei unseren Schlüssen nicht entbehrt werden kann. Denn es müßte ja $d \geq d+1$ werden, falls $\mathfrak{p}$ ein maximales Primoberideal $\mathfrak{p}'$ von der Maximaldimension $d-1$ besäße, für das $\mathfrak{p}'_{x0} > \mathfrak{p}_{x1}$ würde. Behalten wir die in Satz 13 eingeführten Bezeichnungen bei, so können wir nunmehr ergänzend zeigen:

Satz 14. *Es gilt dann und nur dann für jedes Primideal* $\mathfrak{p}_{x1}$ *die Gleichung* $d_1 = d$, *wenn* $\mathfrak{R}$ *ein* JACOBSONscher *Ring ist.*

a) Es sei $\mathfrak{R}$ *kein* JACOBSONscher Ring, $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal aus $\mathfrak{R}$, derart, daß der Durchschnitt aller maximalen Primoberideale von $\mathfrak{p}$ ein nicht zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Element a enthält. Dann ist $\mathfrak{p}_{x1} = \mathfrak{p}_{x0} + (1 + ax) \cdot \mathfrak{R}[x]$ ein Primideal aus $\mathfrak{R}[x]$, für das $d_1 < d$ wird. Zum Beweis hat man nur zu beachten:

α) Ist $\mathfrak{p}'_x$ irgendein Primoberideal von $\mathfrak{p}_{x1}$, so kann jedenfalls $\mathfrak{p}'$ kein maximales Primoberideal von $\mathfrak{p}$ sein. Denn anderenfalls hätten wir $a \in \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{R}[x]$[27]).

β) Aus einer leichten Verschärfung des beim Beweise von Satz 13 unter a) durchgeführten Induktionsschlusses ergibt sich: Ist $\mathfrak{p}_{x1} < \mathfrak{p}'_x < \ldots < \mathfrak{p}'^{(d)}_x$ eine mit $\mathfrak{p}_{x1}$ beginnende Primoberidealkette von der genauen Länge d, so muß unbedingt $\mathfrak{p}^{(d)}$ ein maximales Primideal aus $\mathfrak{R}$ darstellen. — b) Es sei $\mathfrak{R}$ ein JACOBSONscher Ring. Dann genügt es offenbar, zu zeigen: $\mathfrak{p}_{x1}$ besitzt stets ein Primoberideal $\mathfrak{p}'_{x1}$, bei dem die Maximaldimension d' von $\mathfrak{p}'$ genau gleich $d-1$ ist. Außerdem darf man dabei (auf Grund derselben Überlegungen, wie sie vom Satz 10 zu Satz 11 führten) $\mathfrak{p} = (0)$ annehmen. Wir zerlegen den Beweis in vier Schritte: α) Ist $\mathfrak{p} = (0)$ in $\mathfrak{R}$ eindimensional, so besitzt $\mathfrak{p}$ wegen des JACOBSONschen Charakters von $\mathfrak{R}$ unendlich viele nulldimensionale Primoberideale. Ist andererseits (0) von einer Maximaldimension $d > 1$, so gibt es ein Primoberideal $\mathfrak{p}''$ von der Maximaldimension $d-2$ und zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}''$ liegen nach dem „Hilfssatz" vom § 4 unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}'$, die alle die Maximaldimension $d-1$ haben müssen. In jedem Falle also ist die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p}'$ von der Maximaldimension $d-1$ in $\mathfrak{R}$ unendlich groß. β) Es sei $p(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$ ein Polynom niedrigsten Grades aus $\mathfrak{p}_{x1}$, $\mathfrak{K}$ sei der Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$. Dann wird nach Satz 11 wegen $\mathfrak{p} = (0)$ sicher $\mathfrak{p}_{x1}\mathfrak{K} = (p(x)) \cdot \mathfrak{K}$, und daraus schließt man mühelos: Zu jedem $q(x) \in \mathfrak{p}_{x1}$ gibt es ein r, derart, daß $c^r \cdot q(x) \in (p(x))$ in $\mathfrak{R}[x]$. γ) Wegen der für $\mathfrak{R}$ gültigen Maximalbedingung besitzt das Hauptideal (c_0) in $\mathfrak{R}$ nur endlich viele minimale Primoberideale. Angesichts von α) existiert daher in $\mathfrak{R}$ ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von der Maximaldimension $d-1$, das c_0 nicht enthält. Setzt man $\mathfrak{a}'_x = \mathfrak{p}'_{x0} + (p(x)) \cdot \mathfrak{R}[x]$, so wird $\mathfrak{a}'^x \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}'$ und in

[27]) Hier haben wir in größter Knappheit einen Beweis von Satz 2; vgl. den dortigen Hinweis.

gleicher Weise erhält man $\mathfrak{c}_x \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}'$, wenn man unter $\mathfrak{c}'_x$ das Ideal aller der $c(x) \in \mathfrak{R}[x]$ versteht, bei denen $c_0^r \cdot c(x) \in \mathfrak{a}_x$ für hinreichend großes r. Nach β) haben wir $\mathfrak{p}_x < \mathfrak{c}'_x$. δ) Da $\mathfrak{R}[x]$ gleichzeitig mit $\mathfrak{R}$ ein Noetherscher Ring ist, hat $\mathfrak{c}'_x$ nur endlich viele minimale Primoberideale. Für mindestens eines von diesen, etwa für $\mathfrak{p}'_{x1}$, muß $\mathfrak{p}'_{x1} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}'$ werden, da sonst $\mathfrak{c}'$ ein nicht zu $\mathfrak{p}'$ gehöriges Element aus $\mathfrak{R}$ enthielte. $\mathfrak{p}'_{x1}$ ist offenbar ein Ideal der von uns gesuchten Art. — Daß für die Minimaldimension keine ähnlich befriedigenden Resultate erwartet werden dürfen, wie sie für die Maximaldimension gewonnen werden, zeigt:

Satz 15. *Es kann vorkommen, daß die Minimaldimension von* $\mathfrak{p}_{x1}$ *größer ist als die Minimaldimension von* $\mathfrak{p}$.

Es sei nämlich z. B. $\mathfrak{R}$ ein Noetherscher Integritätsbereich, in dem das Nullideal die Maximaldimension 2, die Minimaldimension 1 hat, und in dem alle unmittelbaren Primoberideale von (0) mit einer einzigen Ausnahme $\mathfrak{p}^*$ unendlich viele maximale Primoberideale besitzen, während das Ausnahmeideal $\mathfrak{p}^*$ ein in $\mathfrak{R}$ gleichzeitig minimales und maximales Primhauptideal (ξ) darstellt. (Ein Ring dieses Typus wurde in § 5 unter 2. konstruiert.)

Bilden wir für irgendein Primideal $\mathfrak{p}' \neq (\xi)$ aus $\mathfrak{R}$ — einschließlich $\mathfrak{p}' = (0)$ — zunächst das Ideal $\mathfrak{a}'_{x1} = \mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{R}[x] + (1 + \xi \cdot x) \cdot \mathfrak{R}[x]$ und dann das Ideal $\mathfrak{p}'_{x1}$ aller der $p(x)$, bei denen $\xi^r \cdot p(x) \in \mathfrak{a}_{x1}$ für hinreichend großes r, so ist $\mathfrak{p}'_{x1} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{p}'$ wegen $\xi \bar{\in} \mathfrak{p}'$ und es erweist sich $\mathfrak{p}'_{x1}$ wegen der Linearität in x von $1 + \xi x$ mühelos als Primideal. Andererseits kann ein Ideal $\mathfrak{c}_x \neq \mathfrak{R}[x]$ gleichzeitig $1 + \xi x$ und ξ enthalten. Auf Grund dieser Bemerkungen folgt leicht: Das über $\mathfrak{p} = (0)$ liegende Primideal $\mathfrak{p}_{x1}$ hat die Minimaldimension 2. Ist nämlich $\mathfrak{p}'_x$ irgendein echtes Primoberideal von $\mathfrak{p}_{x1}$, so ist $\mathfrak{p}'_x$ ersichtlich identisch mit unserem ausgezeichneten, über $\mathfrak{p}'$ liegenden Primideal $\mathfrak{p}'_{x1}$ und es gibt wegen der speziellen Natur von $\mathfrak{R}$ entweder ein $\mathfrak{p}'' > \mathfrak{p}$ oder ein von (0) verschiedenes $\mathfrak{p}'' < \mathfrak{p}$. Die Primidealkette $\mathfrak{p}_{x1} < \mathfrak{p}'_{x1}$ ist also nie geschlossen, weil aus ihr stets entweder eine Kette $\mathfrak{p}_{x1} < \mathfrak{p}'_{x1} < \mathfrak{p}''_{x1}$ oder eine Kette $\mathfrak{p}_{x1} < \mathfrak{p}''_{x1} < \mathfrak{p}'_{x1}$ gebildet werden kann. — Aus der (beim Beweise nicht benutzten) Voraussetzung, jedes von (ξ) verschiedene unmittelbare Primoberideal von (0) sollte unendlich viele maximale Primoberideale haben, folgt nach Satz 9, daß der betrachtete Modellring Jacobsonsch ist. Satz 15 bleibt also auch dann richtig, wenn wir uns auf *Jacobsonsche Ringe* beschränken. Auf der anderen Seite sieht man sofort:

Ist $\mathfrak{R}$ *nicht Jacobsonsch, so kann die Minimaldimension von* $\mathfrak{p}_{x1}$ *kleiner werden als die Minimaldimension von* $\mathfrak{p}$.

Man braucht nur von einem nicht-Jacobsonschen Noetherschen Normalring $\mathfrak{R}$ auszugehen, wie er in § 5 unter 1. konstruiert wurde. Dann folgt der Beweis unserer Behauptung sofort aus Satz 14, da ja bei jedem Primideal aus $\mathfrak{R}$ die Maximaldimension gleich der Minimaldimension ist. Es bleibt noch die Frage übrig, ob nicht etwa im Falle

eines *Jacobsonschen Ringes* $\mathfrak{R}$ die Minimaldimension von $\mathfrak{p}_{x1}$ niemals kleiner ausfallen kann als die Minimaldimension von $\mathfrak{p}$. Leider stößt man bei dem Versuch, diese plausible Vermutung zu beweisen, auf unerwartete Schwierigkeiten, auf die (in einem Spezialfall) im nächsten Paragraphen näher eingegangen werden soll. Zunächst sollen die in den Sätzen 10—14 formulierten Ergebnisse zu Aussagen über den mit endlich vielen Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ gebildeten Polynomring $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ benutzt werden.

Satz 16. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein endlich-dimensionaler, gleichzeitig Noetherscher und Jacobsonxscher Ring, d sei die Maximaldimension des $\mathfrak{R}$-Primideals $\mathfrak{p}$. Dann ist $d+n$ die Maximaldimension des Primideals $\mathfrak{p}_{x0} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ aus $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Für die Maximaldimension d_1 eines über $\mathfrak{p}$ liegenden, von $\mathfrak{p}_{x0}$ verschiedenen Primideals $\mathfrak{p}_{x1}$ gilt die Ungleichung $d+n-1 > d_1 > d$, und zwar kommen innerhalb der angegebenen Grenzen alle zulässigen Werte von d wirklich vor. $\mathfrak{p}_{x1}$ hat dann und nur dann die kleinstmögliche Maximaldimension $d_1 = d$, wenn in $\mathfrak{p}_{x1}$ für jedes i ein nur von x_i allein abhängiges Polynom $p(x_i)$ mit nicht durchweg zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Koeffizienten enthalten ist.*

Der Beweis von Satz 16 ergibt sich unter Berücksichtigung von Satz 1 leicht aus einer n-maligen Anwendung von Satz 14. Es dürfte genügen, wenn wir auf die letzte Behauptung von Satz 16 etwas genauer eingehen. Es werde $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_0[x_1, \ldots, x_i] = \mathfrak{R}_{i-1}[x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ gesetzt. Soll nun $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{x1} \cap \mathfrak{R}_n$ die Maximaldimension d haben, so muß, wie aus Satz 14 zu entnehmen, für jedes $i > 1$ die Maximaldimension von $\mathfrak{p}_{x1} \cap \mathfrak{R}_i$ genau gleich d sein, und diese Bedingung wiederum ist nach Satz 14 dann und nur dann erfüllt, wenn für jedes $i > 1$ das Primideal $\mathfrak{p}_{x1} \cap \mathfrak{R}_i$ aus $\mathfrak{R}_i$ ein Polynom $q_i(x_1, \ldots, x_i) = c_m(x_1, \ldots, x_{i-1}) \cdot x_i^m + c_{m-1}(x_1, \ldots, x_{i-1}) \cdot x_i^{m-1} + \ldots + c_0(x_1, \ldots, x_{i-1})$ enthält, bei dem die Koeffizienten c_k nicht alle zu $\mathfrak{p}_{x1} \cap \mathfrak{R}_{i-1}$ gehören. Aus dieser Bemerkung folgt sofort, daß die in Satz 16 angegebene Bedingung für die Maximaldimension d von $\mathfrak{p}_{x1}$ hinreichend ist; sie ist aber auch notwendig. Denn für $i = 1$ erhalten wir, daß in $\mathfrak{p}_{x1}$ im Falle der Maximaldimension d sicher ein von x_1 allein abhängiges Polynom $q_1(x_1) = p(x_1)$ mit nicht durchweg zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Koeffizienten liegen muß. Da aber die Numerierung der x_i völlig gleichgültig ist, muß für jedes i ein $p(x_i)$ der gewünschten Art in $\mathfrak{p}_{x1}$ enthalten sein.

Bei einem beliebigen über $\mathfrak{p}$ liegenden Primideal $\mathfrak{p}_x$ aus $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ läßt sich offenbar durch geeignete (nicht eindeutig bestimmte) Numerierung der x_i erreichen, daß für ein gewisses s zwischen 0 und n jedes allein von $x_1, \ldots, x_s$ abhängige Polynom aus $\mathfrak{p}_x$ ausschließlich zu $\mathfrak{p}$ gehörige Koeffizienten hat, während für jedes $k > s$ in $\mathfrak{p}_x$ ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_s, x_k)$ auftritt, dessen Koeffizienten nicht alle in $\mathfrak{p}$ liegen. Die Zahl s möge als der *Transzendenzgrad von* $\mathfrak{p}_x$ (über $\mathfrak{R}$) bezeichnet werden. Setzen wir der Kürze halber $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$, so ergibt sich die Invarianz des eingeführten Transzendenzgrades sofort aus:

Satz 17. *Der Transzendenzgrad von $\mathfrak{p}_x$ ist gleich dem Transzendenzgrad des Quotientenkörpers von $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}_x$ über dem Quotientenkörper von $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$.*

Satz 17 ist so gut wie selbstverständlich. Wir erhalten jetzt über Satz 16 hinaus:

Satz 18. *Ist $\mathfrak{R}$ ein endlich-dimensionaler, gleichzeitig Noetherscher und Jacobsonscher Ring, $\mathfrak{p}_x$ ein über dem $\mathfrak{R}$-Primideal $\mathfrak{p}$ liegendes Primideal aus $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ und bedeutet d_x bzw. d die Maximaldimension von $\mathfrak{p}_x$ bzw. $\mathfrak{p}$, s den Transzendenzgrad von $\mathfrak{p}_x$ über $\mathfrak{R}$, so gilt stets die Gleichung: $d_x = d + s$.*

Zum Beweis braucht man nur die Variablen so zu numerieren, wie wir es bei der Einführung des Transzendenzgrades getan hatten, und zwischen $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathfrak{R}$ den Ring $\mathfrak{T} = \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_s]$ einzuschieben. Dann wird $\mathfrak{p}_x \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{T}$, es ist also nach der ersten Behauptung von Satz 16 sicher $d + s$ die Maximaldimension von $\mathfrak{p}_x \cap \mathfrak{T}$, während die letzte Behauptung von Satz 16 zeigt, daß die Maximaldimension von $\mathfrak{p}_x$ gleich der von $\mathfrak{p}_x \cap \mathfrak{T}$ sein muß. Mit Satz 18 ist offenbar die bekannte Dimensionstheorie der Polynomringe mit Körperkoeffizienten auf den Fall ausgedehnt, daß der Koeffizientenbereich einen beliebigen endlich-dimensionalen, gleichzeitig Noetherschen und Jacobsonschen Ring $\mathfrak{R}$ darstellt. Die Übertragung darf als völlig befriedigend angesehen werden, solange wir die Möglichkeit zulassen, daß bei den $\mathfrak{R}$-Primidealen Maximal- und Minimaldimension auseinanderfallen. Anders liegen die Dinge, wenn wir uns auf Noethersche Normalringe $\mathfrak{R}$ beschränken. Auf die hier auftauchenden schwierigen Fragen soll in § 7 eingegangen werden.

§ 7.

Die Normalringhypothese.

Der Polynomring $\mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n]$ in n Unbestimmten mit Körperkoeffizienten ist ein Noetherscher Normalring im Sinne von § 4[28]). Die Bemerkung und die Ergebnisse von § 6 führen auf die folgende *Normalringhypothese:*

Ist $\mathfrak{R}^*$ ein Noetherscher Normalring, der gleichzeitig einen Jacobsonschen Ring darstellt, so ist $\mathfrak{R}^*$ stets auch ein Noetherscher Normalring.

Überraschenderweise zeigt es sich, daß die Theorie der kommutativen Ringe in ihrem augenblicklichen Stand anscheinend noch nicht

[28]) Es sei daran erinnert, daß wir (im wesentlichen zur Vereinfachung der Diskussion) nur *Integritätsbereiche* als Normalringe bezeichnet hatten. Erst im Schlußteil von § 8 werden wir diese Beschränkung aufheben. — Man beachte, daß das (nur der Kürze halber benutzte) Wort „Normal-" hier einen anderen Sinn hat als in der arithmetischen Theorie algebraischer Mannigfaltigkeiten. Insbesondere braucht ein Noetherscher Normalring im Sinne des Textes nicht ganz abgeschlossen zu sein.

weit genug entwickelt ist, um über die Gültigkeit der Normalringhypothese zu entscheiden. Doch gelingt wenigstens eine wesentliche Reduktion der Fragestellung und die Erledigung gewisser Spezialfälle:

Satz 19. *Die Richtigkeit der Normalringhypothese ist gesichert, sobald die folgende Zwischenprimidealhypothese bewiesen ist:*

Es sei $\mathfrak{S}$ *ein* Noetherscher *Integritätsbereich mit einem einzigen maximalen Primideal* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}_{x1} \neq (0)$ *ein über* $\mathfrak{p} = (0)$ *liegendes Primideal aus* $\mathfrak{S}[x]$, $\mathfrak{m}_x$ *ein über* $\mathfrak{m}$ *liegendes Primoberideal von* $\mathfrak{p}_x$. *Gibt es dann in* $\mathfrak{S}$ *ein minimales Primideal* $\mathfrak{p}'$, *derart, daß* $\mathfrak{m}_x$ *zwar ein echtes, aber kein unmittelbares Primoberideal von* $\mathfrak{p}'_{x0} = \mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{S}[x]$ *ist, so existiert stets ein echtes Zwischenprimideal zwischen* $\mathfrak{p}_x$ *und* $\mathfrak{m}_x$.

Die Normalringhypothese ist gleichwertig mit der Zwischenprimidealhypothese, wenn wir bei dieser zusätzlich fordern, daß $\mathfrak{S}$ *ein Normalring sein soll.*

Der Beweis von Satz 19 stützt sich auf eine längere Reihe von Einzelüberlegungen:

α) Die Normalringhypothese ist evidenterweise richtig, wenn wir zeigen können: Ist $\mathfrak{p}'_x$ in $\mathfrak{R}^*[x]$ unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}_x$, so ist die Maximaldimension von $\mathfrak{p}'_x$ stets um genau eine Einheit kleiner als die Maximaldimension von $\mathfrak{p}_x$. β) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{R}^*$ von der Dimension d, so ist $d+1$ nach Satz 14 die Maximaldimension von $\mathfrak{p}_{x0} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}^*[x]$. Ist ferner $\mathfrak{p}'_x$ ein unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}_{x0}$, so ist entweder $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ und es hat $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}_{x1}$ die Maximaldimension d. Oder aber es muß, wie mühelos zu sehen, $\mathfrak{p}'$ ein unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$ sein, und $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}'_{x0}$ werden; dann aber hat $\mathfrak{p}'$ die Dimension $d-1$ und $\mathfrak{p}'_x$ die Maximaldimension $(d-1)+1 = d$. Das gewonnene Resultat zeigt, daß die unter α) formulierte Behauptung nur für $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_{x1} + \mathfrak{p}_{x0}$ bewiesen zu werden braucht. γ) Hat $\mathfrak{p}_{x1}$ die Maximaldimension d, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{x1} \cap \mathfrak{R}^*$ die Dimension d, so besitzt das Primoberideal $\mathfrak{p}'_x$ von $\mathfrak{p}_x$ nach Satz 14 in genau zwei Fällen die Maximaldimension $d-1$. Einerseits dann, wenn $\mathfrak{p}' \leq \mathfrak{p}_x \cap \mathfrak{R}^*[x]$ ein unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}$ ist und somit wegen des Normalcharakters von $\mathfrak{R}^*$ die Dimension $d-1$ hat; in diesem ersten Falle ist stets $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}'_{x1} + \mathfrak{p}_{x0}$ (vgl. Satz 11). Zweitens dann, wenn die Dimension von $\mathfrak{p}'$ gleich $d-2$ ist, wenn also wohl eine Kette $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}'' < \mathfrak{p}'$, aber keine Kette $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}'' < \mathfrak{p}''' < \mathfrak{p}'$ existiert, und wenn gleichzeitig $\mathfrak{p}'_x = \mathfrak{p}'_{x0}$ wird. δ) Aus γ) folgt leicht: Hat $\mathfrak{p}_{x1}$ die Maximaldimension d, so hat $\mathfrak{p}''_x > \mathfrak{p}_{x1}$ dann und nur dann eine Maximaldimension $d'' \leq d-2$, wenn ein unmittelbares Primoberideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$ existiert, derart, daß $\mathfrak{p}''_{x0}$ zwar ein echtes, aber kein unmittelbares Primoberideal von $\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{R}^*[x] = \mathfrak{p}'_{x0}$ ist. Denn die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines $\mathfrak{p}'$ der angegebenen Art ist offenbar die, daß entweder eine Kette $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}' < \mathfrak{p}''' < \mathfrak{p}''$ vorhanden ist oder $\mathfrak{p}''$ die Dimension $d-2$ besitzt und $\mathfrak{p}''_x$ von $\mathfrak{p}''_{x0}$ verschieden ist. ε) Aus δ) ergibt sich: Die Normalringhypothese ist gleichwertig mit der Behauptung: Ist $\mathfrak{p}''_x$ ein Primoberideal von $\mathfrak{p}_{x1}$,

und gibt es ein echtes Zwischenprimideal $\mathfrak{p}'$ zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}''$, derart, daß $\mathfrak{p}'_{x0}$ kein unmittelbares Primunterideal von $\mathfrak{p}''_x$ ist, so existiert stets ein echtes Zwischenprimideal zwischen $\mathfrak{p}_{x1}$ und $\mathfrak{p}''_x$. Beim Beweis dieser letzten Behauptung aber sind die folgenden Vereinfachungen möglich: Man kann zuerst von $\Re^*$, $\Re^*[x]$ zu $\Re^*/\mathfrak{p}$, $\Re^*[x]/\mathfrak{p}_{x0}$ übergehen; bedeutet dann weiter $\bar{S}$ das multiplikativ abgeschlossene System aller nicht zu $\bar{\mathfrak{p}}'' = \mathfrak{p}''/\mathfrak{p}$ gehörigen Elemente aus $\overline{\Re}^* = \Re^*/\mathfrak{p}$, so darf man $\overline{\Re}^*$ durch den von $\bar{S}$ bestimmten Quotientenring $\overline{\Re}^*_{\bar{S}}$ (in dem bereits in § 5 benutzten Sinne) ersetzen. Damit kommt man dann unmittelbar auf die Zwischenprimidealhypothese in der in Satz 19 gewählten Fassung unter der Zwischenvoraussetzung, daß $\mathfrak{S} = \overline{\Re}^*_{\bar{S}}$ ein Noetherscher Normalring ist.

Die Hauptbedeutung von Satz 19 liegt einerseits in der Erkenntnis, daß an der kritischen Stelle des Beweises der Normalringhypothese der Begriff des Jacobsonschen Ringes keine Rolle mehr spielt. Die Voraussetzung, $\Re^*$ sei ein Jacobsonscher Ring, ist bei der Normalringhypothese selbstverständlich notwendig, es wird auch von ihr bzw. von dem auf ihr beruhenden Satz 14 bei dem Übergang zu der Zwischenprimidealhypothese immer wieder Gebrauch gemacht. Diese ihrerseits aber ist ein rein „lokales" Problem; die bei ihr als Koeffizientenbereiche auftretenden Ringe mit einem einzigen maximalen Primideal (*Stellenringe* in der gebräuchlichen Terminologie) repräsentieren einen Ringtypus, der in gewisser Hinsicht dem der Jacobsonschen Ringe gerade entgegengesetzt ist. — Auf der anderen Seite zeigen sich erst bei der Zwischenprimidealhypothese klar die eigentlichen Schwierigkeiten der gestellten Aufgabe. Man erhält zunächst positiv:

Satz 20. *Die Zwischenprimidealhypothese (in allgemeinster Fassung) ist sicher richtig, wenn das betrachtete Primideal* $\mathfrak{p}_{x1}$ *ein Hauptideal darstellt.*

Es sei $\mathfrak{p}'$ eines der Primideale, deren Existenz in unserer Hypothese gefordert ist, und es werde $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}/\mathfrak{p}'$, $\overline{\mathfrak{S}}[x] = \mathfrak{S}[x]/\mathfrak{p}'_{x0}$ gesetzt; $\bar{\mathfrak{q}}_{x1}$ sei das Ideal $(\mathfrak{p}_{x1} + \mathfrak{p}'_{x0})/\mathfrak{p}'_{x0}$ aus $\overline{\mathfrak{S}}[x]$, entsprechend sei $\overline{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{p}_{x0}$. Dann ist $\bar{\mathfrak{q}}_{x1} < \overline{\mathfrak{m}}_x$, es muß daher auch mindestens ein minimales Primoberideal $\bar{\mathfrak{p}}''_{x1}$ von $\bar{\mathfrak{q}}_{x1}$ Unterideal von $\overline{\mathfrak{m}}_x$ sein. Andererseits ist $\bar{\mathfrak{q}}_{x1}$ in $\overline{\mathfrak{S}}[x]$ ebenso wie $\mathfrak{p}_{x1}$ in $\mathfrak{S}[x]$ Hauptideal. Nach dem Hauptidealsatz von § 4 muß also jedes minimale Primoberideal von $\bar{\mathfrak{q}}_{x1}$ in $\overline{\mathfrak{S}}[\bar{x}]$ minimal sein. $\overline{\mathfrak{m}}_x$ aber besitzt wegen der Wahl von $\mathfrak{p}'$ diese Eigenschaft bestimmt nicht, wir haben somit $\overline{\mathfrak{m}}_x > \bar{\mathfrak{p}}'_x$. Gehen wir nun zu $\mathfrak{S}[x]$ zurück, so entspricht $\bar{\mathfrak{p}}'_x$ ein echtes Primunterideal von $\mathfrak{m}_x$, das wegen $\mathfrak{p}_{x1} + \mathfrak{p}'_x \leq \mathfrak{p}'_x$ ein echtes Primoberideal von $\mathfrak{p}_x$ ist. — Aus Satz 20 folgt insbesondere:

Satz 21. *Ist* $\mathfrak{S}$ *ganz abgeschlossen und* $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_{x0}$, *so ist die Zwischenprimidealhypothese stets erfüllt.*

Aus der Tatsache, daß der ganz abgeschlossene Ring $\mathfrak{S}$ gleichzeitig ein Stellenring ist, folgt nämlich der Satz: Ist $\mathfrak{p}_{x1}$ kein Unterideal von $\mathfrak{m}_{x0}$, so muß $\mathfrak{p}_{x1}$ Hauptideal sein [29]). Man hat also entweder $\mathfrak{p}_x < \mathfrak{m}_{x0} < \mathfrak{m}_{x1} = \mathfrak{m}_x$, oder es läßt sich die Existenz eines echten Zwischenprimideals $\mathfrak{p}'_x$ zwischen $\mathfrak{p}_x$ und $\mathfrak{m}_{x1}$ aus Satz 20 erschließen. Der Hauptnachteil von Satz 21 liegt in dem Umstand, daß er nur den Hauptfall $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{x1} > \mathfrak{m}_{x0}$ erledigt, für $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{x0}$ aber keine Aussage liefert. Außerdem hat man zu beachten: Selbst wenn der in der Normalringhypothese auftauchende Ring $\mathfrak{R}^*$ ganz abgeschlossen angenommen wird, brauchen keineswegs die Ringe $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{R}}^*_s$, die den einzelnen Primidealen von $\mathfrak{R}^*$ entsprechen, alle ganz abgeschlossen zu sein. Die Anwendbarkeit von Satz 21 auf die Normalringhypothese ist also noch aus einem zweiten Grunde beschränkt. Sucht man über Satz 20 hinaus auf direktem Wege zu einem allgemeinen Beweis der Zwischenprimidealhypothese vorzudringen, so ist der Weg ziemlich eindeutig vorgezeichnet. Man hat wie beim Beweis von Satz 20 von einem Primideal $\mathfrak{p}'$ möglichst großer Maximaldimension auszugehen, und zu zeigen, daß $\mathfrak{m}_x$ nicht *minimales* Primoberideal von $\mathfrak{q}_{x1} = \mathfrak{p}_{x1} + \mathfrak{p}'_{x0}$ sein kann. Dabei darf man noch, da unendlich viel Primideale $\mathfrak{p}'$ der gewünschten Art existieren, eine Zusatzforderung von der Art einer Ungleichung stellen, etwa die, daß der höchste Koeffizient eines Polynoms niedrigsten Grades aus $\mathfrak{p}_{x1}$ nicht in $\mathfrak{p}'$ liegt. Im übrigen ist man ganz darauf angewiesen, die Eigenart von $\mathfrak{p}_{x1}$ auszunützen, die nach Satz 11 darin besteht, daß eine Gleichung $\mathfrak{p}_{x1} = (p(x)) \cdot \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}[x]$ gilt, falls $\mathfrak{R}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{S}$ bedeutet. Diese Quasihauptidealeigenschaft kann aber in keiner Weise die in Satz 20 angenommene Hauptidealeigenschaft ersetzen. Denn es ist zwar sicher $\bar{\mathfrak{q}}_{x1} = (\mathfrak{p}_{x1} + \mathfrak{p}'_{x0})/\mathfrak{p}'_{x0}$ gleichzeitig mit $\mathfrak{p}_{x1}$ Hauptideal; aber im allgemeinen Fall braucht für $\bar{\mathfrak{q}}_{x1}$ nicht einmal mehr der Satz zu gelten, daß $\bar{\mathfrak{q}}_{x1}$ ein Polynom $\bar{p}(\bar{x})$ niedrigsten Grades enthält, derart, daß alle Polynome aus $\bar{\mathfrak{q}}_{x1}$ über dem Quotientenkörper $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}/\mathfrak{p}'$ durch $\bar{p}(\bar{x})$ teilbar sind. Ganz allgemein überzeugt man sich leicht, daß die Aussagen, die man über die möglichen Basen von $\mathfrak{p}_{x1}$ aus der Quasihauptidealeigenschaft ableiten kann, nicht ausreichen, um irgendwelche brauchbare Aussagen über das Verhalten dieser Basen bei Restklassenabbildung abzuleiten. Der Versuch eines „direkten" Beweises der Zwischenprimidealhypothese erscheint also ziemlich aussichtslos, und man wird nach Theoremen allgemeinerer Art fragen (etwa im Sinne einer Verschärfung des Hauptidealsatzes für beliebige Noetherscher Stellenringe), auf die sich ein Beweis gründen ließe. Tatsächlich kommt man so auf interessante Probleme, die im Schlußparagraphen kurz besprochen werden sollen.

---

[29]) Vgl. W. Krull, Zur Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen, J. f. Math. (1951), Satz 6.

§ 8.

Schlußbemerkungen.

Nach der Art, wie der Beweis von Satz 20 geführt wurde, ist es unmittelbar klar, daß die Richtigkeit der Zwischenprimidealhypothese gesichert wäre, wenn man über den Hauptidealsatz von § 4 hinaus die folgende *Hypothese der minimalen Primideale* beweisen könnte:

Sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ *zwei minimale Primideale aus dem nullteilerfreien* Noetherschen *Stellenring* $\mathfrak{S}$, *so ist jedes minimale Primoberideal von* $\overline{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2)/\mathfrak{p}_2$ *minimales Primideal in* $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}/\mathfrak{p}_2$. Indessen lassen sich aus unserer Hypothese so weitgehende Folgerungen ziehen, daß ihre Allgemeingültigkeit sehr unwahrscheinlich ist. Um das zu zeigen, beweisen wir zunächst:

Satz 22. *Gilt die Hypothese der minimalen Primideale für den nullteilerfreien* Noetherschen *Stellenring* $\mathfrak{S}$ *und für jedes homomorphe nullteilerfreie Bild* $\overline{\mathfrak{S}}$ *von* $\mathfrak{S}$, *so ist* $\mathfrak{S}$ *ein* Noetherscher *Normalring.*

Die Behauptung ist trivial, wenn in $\mathfrak{S}$ das Nullideal die Maximaldimension 1 besitzt. Wir brauchen sie daher für den Fall einer beliebigen Maximaldimension d des Nullideals nur unter der Induktionsvoraussetzung zu beweisen, daß ihre Richtigkeit für alle echten nullteilerfreien homomorphen Bilder von $\mathfrak{S}$ bereits feststeht. D. h. also, wir dürfen annehmen, daß jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ aus $\mathfrak{S}$ eine Dimension $d' (< d)$ schlechtweg besitzt. Es sei nun $\mathfrak{p}_1$ ein beliebiges unmittelbares Primoberideal von (0), $\mathfrak{p}_2$ sei ein (sicher vorhandenes) unmittelbares Primoberideal, dessen Dimension genau gleich $d-1$ ist. Dann hat angesichts der Gültigkeit unserer Hypothese für $\mathfrak{S}/\mathfrak{p}_2$ jedes unmittelbare Primoberideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ die Dimension $d-1$. $\mathfrak{p}_1$ besitzt somit ein echtes Primoberideal der Dimension $d-2$ und damit seinerseits die Dimension $d-1$. D. h. also: (0) hat die Dimension d, weil alle unmittelbaren Primoberideale von (0) die Dimension $d-1$ haben. — Wie man sieht, verläuft der Beweis von Satz 22 genau nach dem Vorbild des Beweises des Jordan-Hölderschen Satzes der Gruppentheorie, wobei die Hypothese der minimalen Primideale die Rolle des „zweiten Isomorphiesatzes" übernimmt. — Es fragt sich nun:

Ist wirklich jeder nullteilerfreie Stellenring ein Normalring?

Ich habe früher an diese Vermutung geglaubt, bin aber jetzt — obwohl ich kein Gegenbeispiel kenne — der Ansicht, daß die aufgeworfene Frage höchstwahrscheinlich zu verneinen ist. Ist diese Annahme richtig, so gilt angesichts von Satz 22 auch die Hypothese der minimalen Primideale nicht allgemein. Die Zwischenprimidealhypothese von § 7 dagegen wäre durch eine solche Erkenntnis noch nicht widerlegt. Denn bei ihr braucht man ja an der kritischen Stelle nur eine Aussage über die Struktur der Summe zweier *spezieller* minimaler

Ringprimideale. Wohl aber dürfte man sagen, daß kein Grund vorhanden ist, die Allgemeingültigkeit der Zwischenprimidealhypothese auch nur als wahrscheinlich zu bezeichnen. Es dürfte daher im Augenblick nicht ratsam sein, die in § 6 angeschnittenen Fragen über das dort erreichte Hauptergebnis — (Äquivalenz von Normalring- und Zwischenprimidealhypothese) — hinaus weiter zu verfolgen. Die dringendste Aufgabe ist, (wenn möglich), die Konstruktion eines nullteilerfreien Noetherschen Stellenringes, der nicht gleichzeitig Normalring ist. Ein Weg, auf dem diese Aufgabe möglicherweise angegriffen werden könnte, soll hier kurz angedeutet werden.

Wir wollen einen nicht notwendig nullteilerfreien Noetherschen Ring $\mathfrak{R}$ als Normalring bezeichnen, wenn jedes nullteilerfreie homomorphe Bild von $\mathfrak{R}$ ein Noetherscher Normalring in bisherigem Sinne ist, und wenn außerdem die minimalen Primoberideale des Nullideals in $\mathfrak{R}$ alle dieselbe Dimension haben. Im übrigen wurde der Begriff des *vollständigen* Noetherschen Stellenrings als bekannt vorausgesetzt und ebenso die Tatsache, daß jeder Noetherscher Stellenring $\mathfrak{R}$ eindeutig in einem kleinsten umfassenden vollständigen Stellenring, seine *vollständige Hülle* $\mathfrak{\bar{R}}$, eingebettet werden kann[30]. Für vollständige Noethersche Stellenringe hat J. S. Cohen einen fundamentalen Strukturtheorem gestattet bei Dimensionsfragen die Anwendung der Methoden, die ich ursprünglich für Ringe von ganzen algebraischen oder analytischen Funktionen entwickelt hatte[31], und man erhält so leicht den Satz:

Ein vollständiger Noetherscher Stellenring $\mathfrak{\bar{R}}$ *ist dann und nur dann ein Noetherscher Normalring, wenn alle minimalen Primoberideale des Nullideals ein und dieselbe Maximaldimension haben*[32]. (Statt von der Maximaldimension könnte man gleich kurz von der Dimension reden; da nämlich jedes homomorphe Bild eines vollständigen Noetherschen Stellenringes selbst wieder ein solcher Ring ist, folgt aus unserem Theorem sofort, daß in $\mathfrak{R}$ alle minimalen Primoberideale des Nullideals eine Dimension schlechtweg besitzen.)

Ich möchte nun anschließend an die Ergebnisse von Herrn Cohen auf zwei weiterführende Fragen hinweisen: 1. Gibt es nullteilerfreie

[30] Vgl. Krull [1], Cohen [1]. Die an die Cohensche Terminologie („complete" local ring) anknüpfende Bezeichnungsweise „vollständiger" Stellenring dürfte zweckmäßiger sein als die ursprüngliche Krullsche Bezeichnungsweise „perfekter" Stellenring.

[31] Krull [3], Nr. 4. Vgl. auch [32].

[32] Der zitierte Satz ist im wesentlichen das Theorem 19 von Cohen [1], S. 96. (Vgl. insbesondere die Schlußbemerkung zum Beweis auf S. 97, unmittelbar vor dem „Korollar".) — Der fundamentale Strukturtheorem, der die Anwendung der Methoden von Krull [3] gestattet, ist Theorem 16, S. 90 (vgl. vor allem auch Anm. [19]).

Noetherschе Stellenringe $\mathfrak{R}$, bei denen das Nullideal der vollständigen Hülle $\bar{\mathfrak{R}}$, kurz gesagt, eine beliebig vorgegebene Struktur besitzt? Kann man insbesondere die Anzahl der minimalen Primoberideale des Nullideals von $\bar{\mathfrak{R}}$ und ihre Dimensionen willkürlich vorschreiben? — Nach gewissen bei den *primären* Stellenringen (Stellenringen mit einem einzigen von (0) verschiedenen Primideal) gemachten Erfahrungen halte ich es für sehr wahrscheinlich, daß die aufgeworfene Frage, zum mindesten ihr zweiter, präzis gefaßter Teil, zu bejahen ist[33]). — 2. Spiegelt sich etwa jede bei den Primidealketten von $\mathfrak{R}$ auftretende Unregelmäßigkeit in der Struktur des Nullideals von $\bar{\mathfrak{R}}$ wider? Gilt insbesondere der Satz: $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein Noetherscher Normalring, wenn es $\bar{\mathfrak{R}}$ ist? Oder kann man wenigstens feststellen: Haben die minimalen Primoberideale von $\bar{\mathfrak{R}}$ *nicht* alle ein und dieselbe Dimension, so ist der Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ sicher *kein* Normalring? — Das hier gestellte Problem ist insofern keineswegs einfach, als ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ beim Übergang zu $\bar{\mathfrak{R}}$ (also bei Bildung des Erweiterungsideals $\mathfrak{p}\cdot\bar{\mathfrak{R}}$) keineswegs Primideal zu bleiben braucht — man denke nur an das Beispiel $\mathfrak{p} = (0)$. Indessen hat man voraussichtlich wenigstens einen wichtigen Anknüpfungspunkt zur Verfügung, nämlich die Bemerkung, daß die Maximaldimension eines beliebigen Ideals aus $\mathfrak{R}$ stets gleich der des zugehörigen „Leitideals" ist[34]).

Wie sofort zu sehen, ist es durchaus möglich, daß die Beantwortung der gestellten Fragen das gesuchte Beispiel eines nichtnormalen, nullteilerfreien Noetherschen Stellenringes liefert[35]). Darüber hinaus dürfte der angedeutete Weg nach meiner Ansicht bei weitem der aussichts-

---

[33]) Zur Theorie der primären, vollständigen Noetherschen Stellenringe vgl. Krull [1]. Man sieht im primären Fall leicht: Ist $\bar{\mathfrak{R}}$ die vollständige Hülle eines primären Noetherschen Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$, so sind in $\bar{\mathfrak{R}}$ alle minimalen Primoberideale $\bar{\mathfrak{p}}_1, \cdots, \bar{\mathfrak{p}}_m$ eindimensional, und es wird $(0) = \bar{\mathfrak{q}}_1 \cap \cdots \cap \bar{\mathfrak{q}}_m$, wobei $\bar{\mathfrak{q}}_i$ jeweils ein zu $\bar{\mathfrak{p}}_i$ gehöriges Primärideal bedeutet. Darüber hinaus gilt nun der Satz: $\bar{\mathfrak{R}}$ hat über $\mathfrak{R}$ dann und nur dann eine endliche Modulbasis, wenn $\bar{\mathfrak{p}}_i = \bar{\mathfrak{q}}_i$ für jedes i, — und ein von J. A. Akizuki (Proc. Math. Soc. Japan (3) **17**, S. 327—336, 1935) angegebenes Beispiel zeigt, daß keineswegs immer eine endliche Modulbasis zu existieren braucht. Damit ist die (von mir lange gehegte) Vermutung widerlegt, es müsse in der zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Hülle $\bar{\mathfrak{R}}$ das Nullideal stets ein Radikal sein, und diese Erfahruug ist es, die mich — wenn auch vielleicht vom Standpunkt strenger Logik aus nicht ganz mit Recht — in der im Text ausgesprochenen Ansicht bestärkt.

[34]) Zur Definition des Leitideals vgl. Krull [4].

[35]) Natürlich ist es durchaus möglich, daß ein Beispiel der gewünschten Art direkt, ohne Umweg über die vollständige Hülle, gewonnen werden kann. Das in [33]) erwähnte Beispiel von Akizuki ist ja auch ohne Benutzung der vollständigen Hülle konstruiert.

reichste sein, wenn man genauer die Grenzen festlegen will, bis zu denen die Theorie beliebiger nullteilerfreier Noetherscher Stellenringe der solcher Stellenringen parallel läuft, die aus einem Polynomring durch Quotientenbildung abgeleitet sind, — ein Problem, dem ich persönlich in der allgemeinen Strukturtheorie Noetherscher Stellenringe einen zentralen Platz einräumen möchte.

Literatur.

Cohen, I. S.

[1] On the structure and ideal theory of complete local rings. Transactions Americ. Math. Soc. **59** (1946), S. 54—106.

Mac Coy, N. H.

[1] Subdirect sums of rings. Bull. Americ. Math. Soc. **53** (1947), S. 805—872.

Dörge, K.

[1] Bemerkungen über Elimination in beliebigen Mengen mit Operationen. Math. Nachrichten (1951), S. 282—297.

Goldman, O.

[1] A characterization of semi-simple rings with descending chain condition. Bull. Americ. Math. Soc. **52** (1946), S. 1021—1027.

[2] Hilbertrings and the Hilbert Nullstellensatz. Math. Zeitschr. **54** (1951), S. 136—140.

Jacobson, N.

[1] The radical and semi-simplicity for arbirary rings. Americ. J. Math. **67** (1945), S. 300—320.

Krull, W.

[1] Ein Satz über primäre Integritätsbereiche. Math. Ann. **103** (1930), S. 540—565.

[2] Idealtheorie. Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Bd. **4**, Heft 3 (1935).

[3] Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie. Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 744—766.

[4] Dimensionstheorie in Stellenringen. Journ. f. Math. **179** (1938), S. 204—226.

[5] Subdirekte Summendarstellungen von Integritätsbereichen. Math. Zeitschr. **52** (1950), S. 810—820.

Zariski, O.

[1] A new prof of Hilberts Nullstellensatz. Bull. Americ. Math. Soc. **53** (1947), S. 362—368.

(Eingegangen am 8. Mai 1951.)

Mathematische Zeitschrift, Band 54, Heft 4, S. 388 (1951).

Berichtigung

zu **„Einige Eigenschaften und Anwendungen der δ- und ε-Zahlen“** von Walter Neumer, Math. Zeitschr., Bd. 53, S. 419–449 (1951).

Durch das Herausfallen einiger Zeichen während des Druckes sind verschiedene Formeln in der genannten Arbeit entstellt worden; nachfolgend ist angegeben, wie diese Stellen lauten sollen.

S. 420, Z. 13 v. o. muß nach (1) fortfahren: $\iota_{\alpha+\beta} = \iota_\beta \ (\beta > 0)$

S. 427, Z. 10 v. o. muß beginnen: $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$

„ Z. 14 v. u. beginnt: $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$

S. 436, Z. 11 v. o. fängt an: $\delta = \omega^{\omega^\nu}$

„ Z. 12 v. u., Mitte, muß lauten:

$$\lim_{n<\omega} \varphi_{pq}(\delta_0^n) = \lim_{n<\omega} \left| \begin{matrix} \delta_0^n \\ p-1 \end{matrix}, \delta_0^{nq} \right|$$

„ Z. 11 v. u., zweiter Klammerausdruck: $\left| \begin{matrix} \delta_0^\omega \\ p-1 \end{matrix}, \delta_0^\omega \right|$

„ Z. 9 v. u. beginnt: $\delta = \varepsilon^{\omega^\lambda}$

„ Z. 5 v. u., nach dem ersten Gleichheitszeichen:

$$\lim_{\nu<\lambda} \varphi_{pq}(\varepsilon^{\omega^\nu})$$

S. 437, Z. 13 v. u. beginnt: $\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^{\varepsilon^{\cdot}(\mu+1)})$

S. 440, Z. 12 v. o. fährt nach (48) fort: $\sigma_{1q}(\alpha + \tilde{\alpha}) = \sigma_{1q}(\alpha) + \alpha^q \tilde{\alpha}$

„ Z. 17 v. o. lautet gegen Ende: $\omega\lambda \leqq \tilde{\alpha}$

S. 441, Z. 10 v. u., zweite Ungleichung: $\omega\eta_i < \delta^n$

S. 442, Z. 2 und 1 v. u. fahren beide nach dem Gleichheitszeichen fort: $\tilde{\varphi}_{pq}(\lambda)$

S. 447, Z. 10 v. u. muß schließen: $\tilde{\varphi}_{2,q+1}(\omega^\omega)$.